

Mathematische Erd- und Himmelskunde

Eine Einführung in die

Astronomie (Planetensystem)

Mit didaktischen Hinweisen

Prof. Siegfried Krauter

Version Januar 2012

Vorwort

Meine erste Begegnung mit der Astronomie – mit Ausnahme dessen, was man in der Schule bzw. beim Studium der Fächer Mathematik und Physik ohnehin als Standardwissen erfährt – erlebte ich am Beginn meiner beruflichen Tätigkeit als Lehrer für Mathematik und Physik am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Dort befand sich ein gutes, aber leider unbenutztes, astronomisches Fernrohr. Auf Anregung des damaligen Schulleiters habe ich mich in die Astronomie eingearbeitet, das Fernrohr für die Schüler zugänglich gemacht und eine astronomische Arbeitsgemeinschaft eingerichtet. Diese ist bei den Schülern auf großes Interesse gestoßen.

Während meiner späteren Dienstzeit an der PH Ludwigsburg habe ich gelegentlich einführende Veranstaltungen für Studierende aller Fachrichtungen zur mathematischen Erd- und Himmelskunde unter dem Titel „Einführung in die Astronomie“ abgehalten. Nach meiner Pensionierung im Jahr 2006 habe ich dieses Hobby durch gelegentliche Vorträge vor verschiedenen Zuhörerkreisen weiter betrieben. In allen Fällen sind mir zwei Dinge aufgefallen: Erstens besteht durchweg großes Interesse an und erstaunliche Wissbegier gegenüber astronomischen Sachverhalten und zweitens gibt es eine weit verbreitete Unkenntnis selbst über die einfachsten astronomischen Tatsachen. Bei vielen Menschen wird sogar die *Astronomie* mit der *Astrologie* verwechselt.

Diese Erfahrungen haben mich dazu veranlasst, meine Notizen und Unterlagen nicht brach liegen zu lassen, sondern Interessenten zugänglich zu machen. Da ich kein professioneller Astronom bin, halte ich die Form eines einführenden Skriptes für angemessen. Ich würde mir wünschen, dass vor allem Lehrerinnen und Lehrer der Fächer Mathematik, Physik und Geografie sich ein wenig informieren können, um schon bei jungen Schülerinnen und Schülern durch Beschäftigung mit einfachen astronomischen Fragen Interesse für dieses unendlich weite – im wahrsten Sinne des Wortes – und interessante Thema zu wecken. Aus diesem Grund habe ich Hinweise auf methodische Vorgehensweisen sowie auf die Verwendung und Herstellung einfacher Modelle aufgenommen.

Eigentlich hatte ich geplant, nach meiner Pensionierung die vorliegenden Materialien über das Planetensystem zu ergänzen mit einem zweiten Teil über den Sternenhimmel und den Aufbau unseres Weltalls. Andere Verpflichtungen und Engagements haben jedoch in den zurückliegenden Jahren Vorrang verlangt, und nun habe ich den Eindruck, dass ich schon zu weit von der beruflichen Arbeit entfernt bin, um den nur skizzenhaft vorhandenen Teil 2 in eine publizierbare Form zu bringen. Deshalb habe ich mich entschlossen, nun wenigstens den bisher erarbeiteten Teil 1 ins Internet zu stellen.

Ich würde mich freuen, wenn diese kleine Einführung, die durchaus selektiv aufgenommen werden kann, Interesse für die Beschäftigung mit astronomischen Fragen wecken und zu einem angemessenen Verständnis für die alltäglichen Erscheinungen am Himmel und auf Erden führen könnte. Für eine Vertiefung stehen viele Fachbücher über Astronomie zur Verfügung.

Fragen, Hinweise oder Rückmeldungen bitte an: siegfried.krauter@t-online.de

Stuttgart, im Januar 2012.

Siegfried Krauter

Inhaltsverzeichnis

1. Beobachtungen am Tag- und am Nachthimmel	4
2. Orientierung auf der Erde und am Himmel	11
3. Geometrie der Tagesbahnen	18
4. Koordinatensysteme	22
5. Die scheinbare Jahresbahn der Sonne und die Erdbewegung	27
6. Der Mond als Erdtrabant	37
7. Das Planetensystem der Sonne	42
Anhänge:	
8. Elemente der Kugelgeometrie	49
9. Stabschattenkurven	67
10. Mondentfernung nach Lacaille und Lalande (1752)	70
11. Loxodromen	71
12. Elemente der Kartografie	72
13. Grundlagen der Navigation	78

1. Beobachtungen am Tag- und am Nachthimmel

a) Beobachtungen am Taghimmel

Die beherrschende Erscheinung am Taghimmel ist der Lauf der Sonne. Diese geht normalerweise morgens im Osten auf, steigt dann südwärts weitergehend an bis sie im Süden ihren höchsten Stand (die **Kulmination**) erreicht hat, um dann abends im Westen unterzugehen. Dies Schauspiel wiederholt sich Tag für Tag - auch wenn die Sonne oft von Wolken verdeckt und gar nicht sichtbar ist. Allerdings ist dieser so genannte Tagbogen der Sonne verschieden hoch (abhängig von der Jahreszeit) und auch zeitlich unterschiedlich lang.

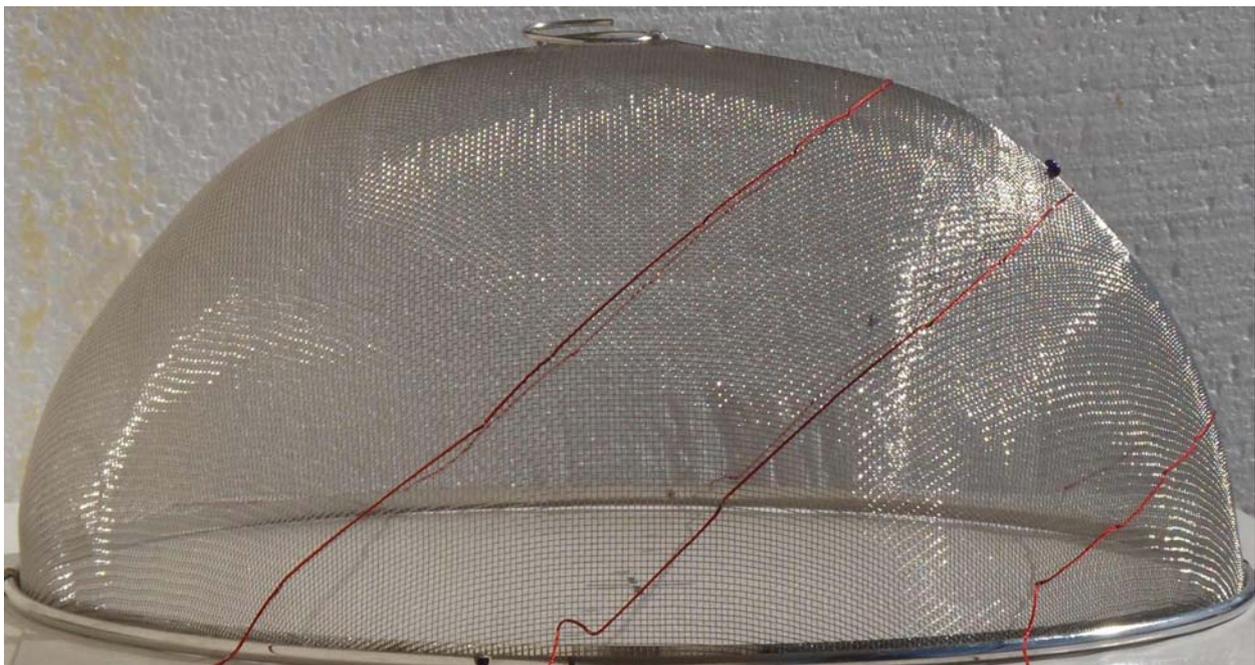
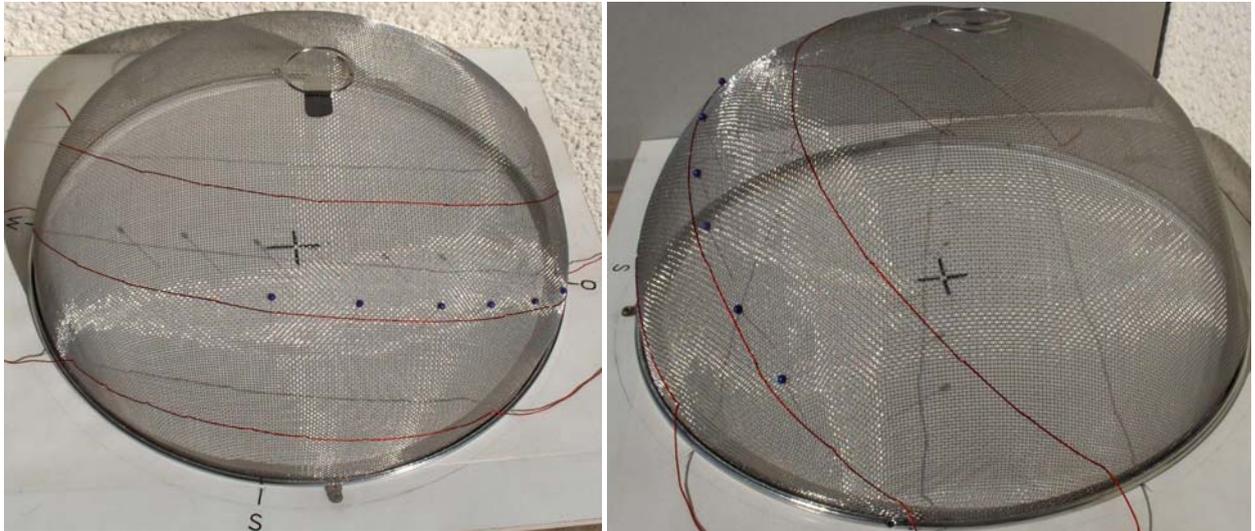
Man kann den Tageslauf der Sonne am Firmament sehr schön demonstrieren mit Hilfe eines einfachen aber anschaulichen und aussagekräftigen Experiments.

Tagesbahn der Sonne dargestellt mit dem Drahtglockenexperiment

- Geeignet ist ein halbkugelförmiges Sieb aus Drahtgeflecht (siehe nachfolgende Fotos) wie man es früher als Kuchenglocke oder Käseglocke im Haushalt gebrauchte. Ein großes Sieb aus dem Haushalt tut es zur Not auch. Je größer desto besser, aber möglichst halbkugelförmig soll es sein.
- Diese Drahtglocke wird auf einem Brett fest verankert. Zuvor kommt als Unterlage ein weißes Blatt Papier unter die Glocke, auf dem der Mittelpunkt des Bodenkreises der Drahtglocke (Mittelpunkt des Grundkreises) durch ein Kreuzchen (wie nebenstehend) markiert ist. 
- An einem möglichst ganztägig von der Sonne beschienenen Platz wird diese Drahtglocke horizontal (Wasserwaage) aufgestellt. Stündlich oder halbstündlich wird eine Stecknadel jeweils so in das Drahtgeflecht gesteckt, dass der Schatten des Stecknadelkopfes genau in die Mitte des markierten Kreuzchens fällt.
- Man erhält durch die Reihe der Stecknadelköpfe die Tagesbahn der Sonne an der Himmelskugel (Drahtglocke) für den Beobachter B, dessen Standort in der Mitte des Kreuzchens liegt. Das Holzbrett stellt die **Horizontebene** des Beobachters dar. Man kann nun die *Kulminationshöhe* der Sonne, den *Auf- und den Untergangspunkt*, die *Länge des gesamten Tagbogens*, den Winkel, den die Ebene des Tagbogens mit der Horizontebene bildet, die *Nord-Süd-Richtung* u. a. m. bestimmen.
- Empfehlenswert ist es, dieses Experiment über den Jahreslauf hinweg zu verfolgen. Besonders aussagekräftig sind die vier Messungen jeweils etwa um den 20. der folgenden Monate: März (Äquinoktium), Juni (Sommersonnwende), September (Äquinoktium) und Dezember (Wintersonnwende). Zum sinnvollen Vergleich der verschiedenen Tagbögen muss das Gerät natürlich immer dieselbe Südausrichtung haben, am besten stets exakt denselben Standplatz.
- Für jede ganztägige Beobachtung ersetzt man anschließend die Stecknadelreihe durch einen eingezogenen farbigen Faden und hängt an den Faden einen Zettel mit dem Beobachtungsdatum. Aus der Winkeldifferenz zwischen den Werten für Dezember und März bzw. Juni lässt sich z. B. die *Schiefe der Ekliptik* ermitteln. Der März- und der Septemberbogen markieren genau den **Himmelsäquator** sowie den **Ost- und Westpunkt in der Horizontebene**.

Das Ergebnis dieses Experiments gibt schon einen ersten anschaulichen Einblick in die Geschehnisse im Zusammenhang mit den Tagesbahnen der Sonne und anderer Gestirne. Im Winter, bei den hellen und hohen Bahnen des Wintervollmondes, ist das Drahtglockenexperiment auch bei Nacht mit dem Vollmond durchführbar.

Wie wir später sehen werden, sind die erhaltenen Tagesbahnen der Sonne sehr stark von der geografischen Breite des Beobachterortes abhängig.

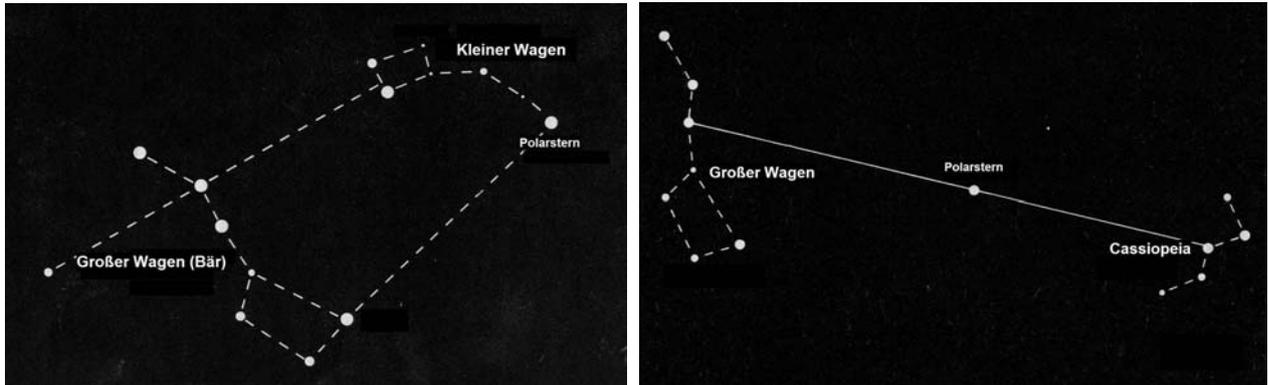


Drei Tagesbahnen der Sonne (21. 6., 21.3. und 21.12.) von Westen her gesehen.

b) Beobachtungen am Nachthimmel

Ein Blick zum Himmel in sternklarer Nacht zeigt eine Vielfalt von Sternen. Glücklicherweise ist diese Vielfalt nicht ein wirres Chaos, sondern die relative Stellung der Sterne gegeneinander ist immer die gleiche, die Sterne sind also fix. Daher nennt man sie auch **Fixsterne**. Sie werden in Gruppen zu bestimmten **Sternbildern** zusammengefasst. Die wichtigsten und in unseren Breiten stets sichtbaren sind der große und kleine Wagen

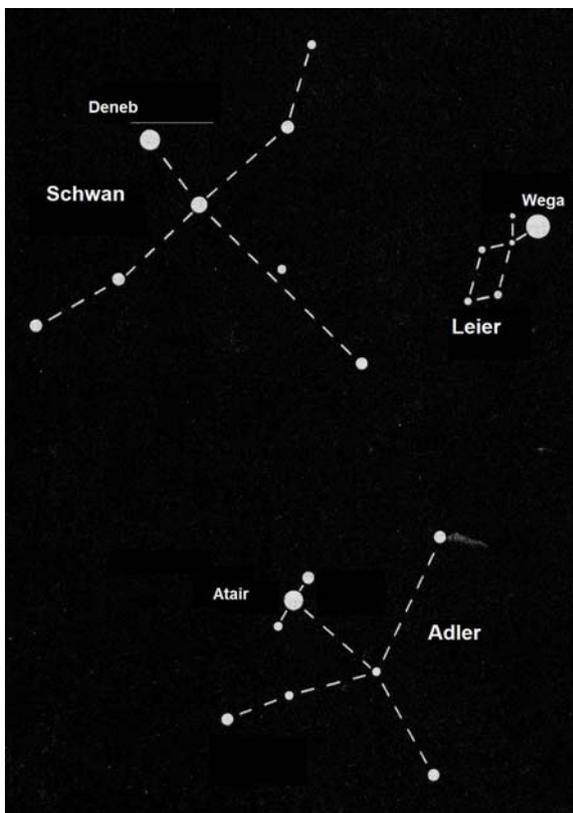
(großer und kleiner Bär) mit dem Polarstern sowie das Himmels-W (die Kassiopeia). Da diese Sternbilder am nördlichen Sternhimmel immer zu sehen sind, sollte man sie sich als erste einprägen.



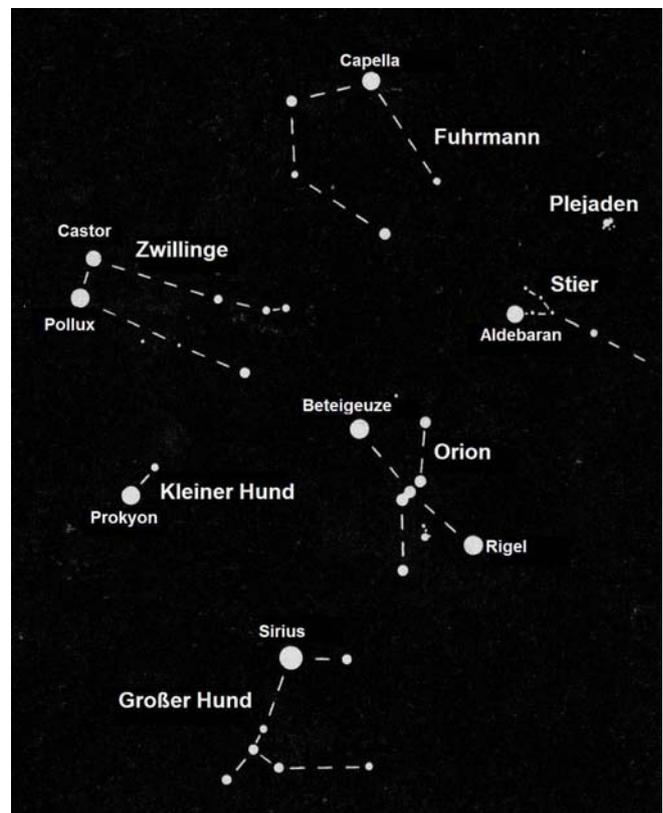
Je nach Jahreszeit treten u. a. noch die folgenden auffallenden Sternbilder am nördlichen Nachthimmel auf.

In den Sommermonaten beherrscht das **Sommerdreieck** mit den Sternbildern Schwan (Hauptstern Deneb), Leier (Hauptstern Wega) und Adler (Hauptstern Atair) den Himmel. Im Winter sieht man rund um das **Wintersechseck** mit Sirius, Rigel, Aldebaran, Capella, Castor/Pollux und Prokyon die schönsten und eindrucksvollsten Sternbilder: Großer Hund, Orion, Stier, Fuhrmann, Zwillinge und Kleiner Hund.

Sommerdreieck

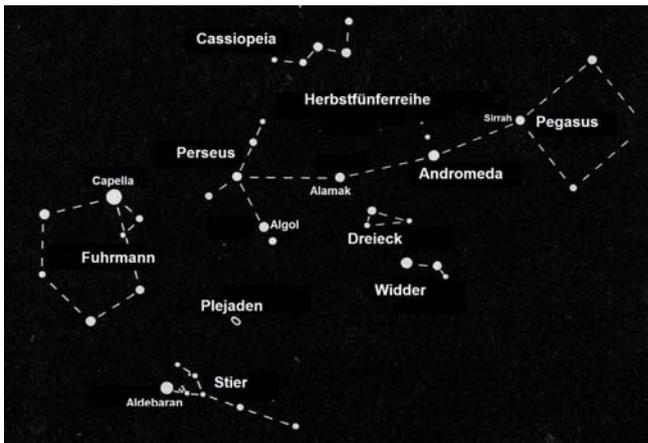


Wintersechseck



Im Herbst sind um die Cassiopeia herum die Sternbilder der **Herbstfünferreihe** zu sehen: Pegasus (auffallende Vierecksform), Andromeda und Perseus. Im zeitigen Frühjahr glänzen Löwe und später Bootes und Jungfrau mit ihrer Pracht:

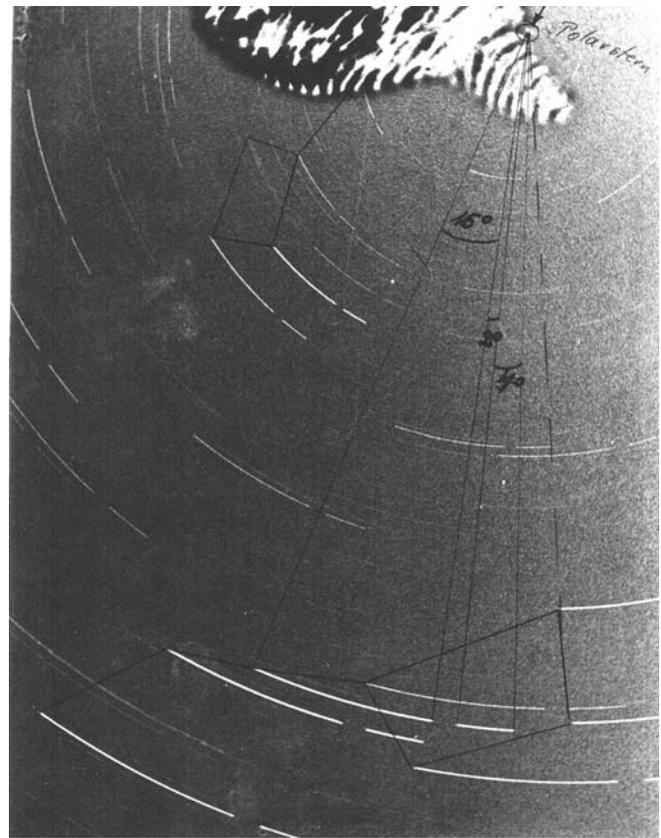
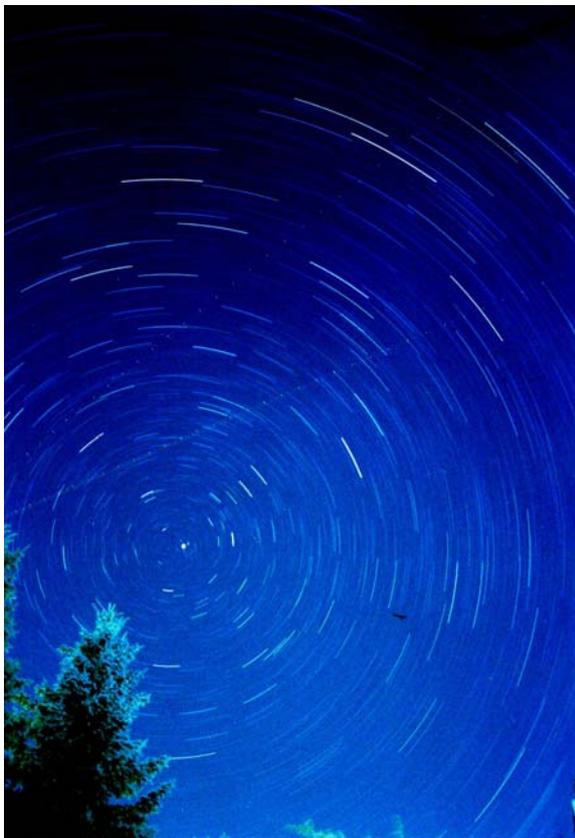
Herbstfünferreihe



Frühlingssternbilder



Beobachtet man den Nachthimmel nicht nur mit einem einzigen Blick sondern über einen längeren Zeitraum oder in Zeitabständen von Stunden nacheinander, so stellt man Veränderungen fest. Der Sternenhimmel insgesamt ist in Bewegung, ohne dass die Sterne ihre relative Stellung zueinander ändern, die Sternbilder bleiben erhalten. Aber wie die Sonne am Taghimmel so gehen viele Sternbilder im Osten auf, kulminieren im Süden und gehen dann irgendwann im Westen unter. Nur der Polarstern bleibt unbeweglich an seiner Stelle und der Große und Kleine Wagen sowie die Cassiopeia umkreisen ihn ohne Auf- und Untergang. Fotografische Langzeitaufnahmen in Richtung Polarstern zeigen diese Erscheinung sehr schön:



Beim rechten Foto (ein von Schülern aufgenommenes und entwickeltes Bild, daher der versehentliche Fingerabdruck oben rechts) wurde zuerst etwa 60 min lang belichtet,

dann etwa 8 min lang geschlossen und anschließend erneut etwa 15 min belichtet. Man erkennt dies an den Sternspuren: Das erste lange Bogenstück hat einen Mittelpunktswinkel von ca. 16° , die unbelichtete dunkle Lücke von ca. 2° und das letzte kurze Teilstück von ca. 4° . Das entspricht genau den Erwartungen der Tagesdrehung: Wenn sich der Sternhimmel an einem Tag um 360° dreht, dann in 1 Stunde um 15° . Verbindet man die Anfangspunkte der hellen Sternspuren, so erkennt man am unteren Rand deutlich das Sternbild des großen Wagens und entsprechend oben Teile des kleinen Wagens.

Eine gute Möglichkeit, diese Drehbewegung der Gestirne erlebnismäßig zu verankern ist die folgende:

Bei einer Sternführung lässt man eine Reihe von Sternen (unbedingt dabei der Polarstern und weitere Sterne in deutlichem Abstand von diesem) mit einem Papprohr an einem Stativ als Visier einstellen. Man überzeugt sich und alle Teilnehmer durch Kontrollblicke davon, dass alle fixierten Sterne korrekt eingestellt sind. Dann macht man eine kurze Beobachtungspause von mindestens 10 Minuten, in der man z. B. die Sternbilder erklärt und durch Erläuterungen ablenkt. Überprüft man danach die eingestellten Visiere, so wird in fast allen Fällen der Stern aus dem Gesichtsfeld des Visiers herausgewandert sein (meist westwärts) - mit Ausnahme des Polarsterns. Letzterer ist immer noch im Visier zu sehen. Haben die Beobachter nun falsch eingestellt oder wie ist die Sache zu erklären? Die Überzeugungskraft dieses einfachen Versuchs ist enorm und sichert die Vorstellung von der täglichen Drehung aller Gestirne.

Wir fassen unsere Beobachtungen am Tag- und Nachthimmel zusammen:

Alle Gestirne, also Sonne, Mond und alle Sterne (einschließlich der Planeten) bewegen sich scheinbar im Verlauf eines Tages einmal vollständig auf Parallelkreisen zum Himmelsäquator (also mit dem Himmelspol als Mittelpunkt) herum. Der Pol ist dabei Fixpunkt. Deshalb ist der Polarstern und in seiner Nähe befindliche (zirkumpolare) Sterne bei klarem Himmel immer zu sehen, während andere Sterne Auf- und Untergang zeigen.

c) Erklärung der beobachtbaren Erscheinungen

Ursprünglich hielten die Menschen die beobachteten Erscheinungen für Realität. So wurden z. B. Vorstellungen und Hilfskonstrukte dafür geschaffen, wie die Sonne nach dem Untergang im Westen durch einen feurigen Wagen im Okeanos über Nacht unterhalb der „Erdscheibe“ nach Osten transportiert wird, damit sie am nächsten Morgen wieder im Osten aufgehen kann. Bald jedoch schlichen sich Fragen und Zweifel ein: Wie kann dies sein, dass solch große Massen mit so unvorstellbaren Geschwindigkeiten bewegt werden? Dies umso mehr, als *alle* Gestirne *gleichzeitig* und *synchron* diese Bewegung durchführten.

Dieses Nachdenken führte zu der Vermutung, dass diese Tagesdrehung eher durch die Eigenrotation der Erde verursacht sein könnte, durch die sämtliche dieser Erscheinungen einfach und logisch zu erklären waren:

Die beobachteten Tagesbahnen aller Gestirne von Osten her über die Kulmination im Süden bis zum Untergang im Westen sind nur scheinbare Bewegungen. In Wirklichkeit handelt es sich um die Eigenrotation der Erde um ihre eigene Achse ostwärts. Die Himmelspole sind die Punkte an der Himmelskugel, in denen die verlängerte Erdachse diese trifft. Deshalb bleiben sie als Achspunkte bei der Rotation in Ruhe.

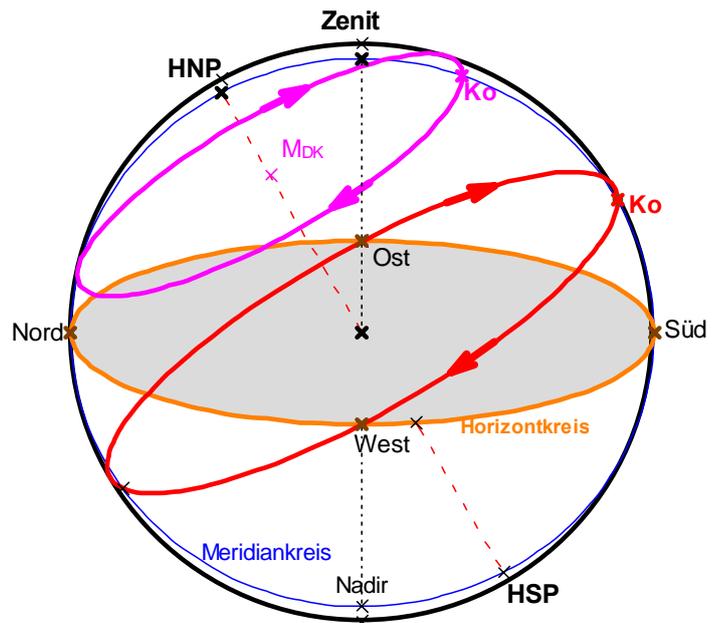
Man kann diese Erscheinung in verschiedenen Weisen anschaulich modellieren:

Das Regenschirmmodell:

Spannt man einen Regenschirm auf und betrachtet seine ausgebreitete Hülle von innen als Modell des Sternenhimmels, so kann man durch Drehen am Griff die Rotation der Sterne um den Pol modellieren.

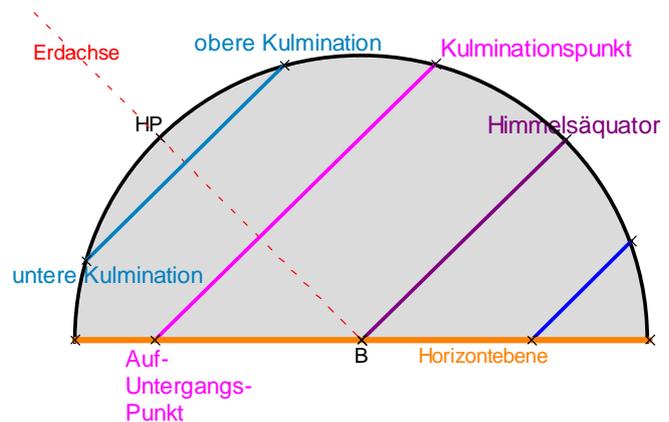
Ein Schrägbild:

Im nebenstehenden Schrägbild ist die Horizontebene des Beobachters grau markiert. Die Bewegungsspuren von zwei Gestirnen an der Himmelskugel sind als parallele Kreisbahnen dargestellt. Man erkennt eine zirkumpolare Bahn und eine Bahn mit Auf- und Untergangspunkt. Die Bahnen sind rotationssymmetrisch zur Erdachse.



Eine Seitenansicht (Aufriss):

Das nebenstehende Bild zeigt die Ansicht von der Seite (von Westen her) betrachtet (Drahtglockenmodell). Man erkennt die oberhalb der Horizontebene des Beobachters B liegende Himmelshalbkugel und die Erdachse, die die Himmelskugel im Himmelsnordpol (HP) trifft. Die Bahnebenen der Sterne erscheinen hier als parallele Linien senkrecht zur Achse, also parallel zum Äquator. Die erste Bahn in Nähe des Himmelspols ist zirkumpolar, hat also weder Auf- noch Untergang dafür jedoch eine untere und eine obere Kulmination. Die zweite, dritte (genau im Himmelsäquator) und vierte dagegen zeigen Auf- und Untergangspunkte (Aufgangspunkt hinten, Untergangspunkt vorne liegend) in der Horizontebene. Alle Bahnen sind zueinander parallele ebene Bahnen in Ebenen senkrecht zur Erdachse also parallel zur Äquatorebene.



Wasserglobus:

Ein einfaches Instrument zur Veranschaulichung der Tagesbahnen von Gestirnen ist der **Wasserglobus**. Ein bei Chemikern geläufiges Glasgefäß ist ein kugelförmiger Glaskolben (Durchmesser mindestens 20 cm) mit einem zylinderförmigen Ansatz als Einfüllstutzen. Diesen füllt man bis auf halbe Höhe mit dunkelblau gefärbtem Wasser, verschließt ihn mit einem Gummistopfen und führt durch den Gummistopfen einen Stab als Achse bis zum Boden des Glaskolbens. Die Wasseroberfläche stellt die Horizontebene des Beobachters dar, der sich im Mittelpunkt des Kolbens befindet. Die Glaskugel markiert die Himmelskugel. Die vom Wasser verdunkelte Seite ist der für den Beobachter unsichtbare Teil unterhalb seiner Horizontebene. Der Austrittspunkt der Achse (Stab) aus der Kugel ist der Himmelsnordpol, der Endpunkt des Stabes unten an der Glaskugel der Himmelssüdpol. Hält man nun den Kolben so, dass die Achse ungefähr den Winkel 50° mit der Horizontebene bildet, so kann man bei Rotation um die Achse die Bahn einzelner auf der Glaskugel angebrachter Gestirne (Sonne, Mond, Sterne)

beobachten und Aufgang, Kulmination, Untergang bzw. Zirkumpolarität erkennen. Für spätere Zwecke ist es nützlich, den Himmelsäquator sowie die Ekliptik auf der Glaskugel mit einem Klebestreifen zu markieren.



Die Situation zeigt den Frühlingspunkt (Widderpunkt ♈) kurz vor dem Untergang für einen Beobachter bei etwa 50° nördl. Breite. Je nach Poldistanz der Sterne erhält man zirkumpolare Sterne, solche mit Auf- und Untergang oder aber für den Standort niemals sichtbare Sterne (solche im Umkreis des südlichen Himmelspols).

2. Orientierung auf der Erde und am Himmel

a) Welche Belege hatte man in früheren Zeiten für die Kugelgestalt der Erde?

- Schon bei Beobachtungen von Mondfinsternissen in uralten Zeiten fiel auf, dass die Schattengrenze des Erdschattens auf dem Mond immer kreisförmig gebogen war. Das deutet auf eine Kugelgestalt der Erde hin.

- Erfahrungen der Seefahrer gaben Hinweise auf die Kugelgestalt der Erde:

Bei gegenseitiger Annäherung von Schiffen auf ruhiger See sah man stets zuerst die Mastspitzen. Das deutet auf eine Krümmung der Meeresoberfläche hin.

Führen die Seefahrer lange Strecken nordwärts, so nahm die Höhe des Polarsterns über dem Horizont zu, bei der Fahrt südwärts dagegen ab. Das deutet auf eine Krümmung der Meeresoberfläche hin.

- Eine wissenschaftliche Meisterleistung war das berühmte Experiment von Eratosthenes aus Kyrene etwa um 250 vor Christus (Eratosthenes 280 - 214 v. Chr.; Bibliothekar in Alexandria; ermittelt Erdumfang und Schiefe der Ekliptik; Sieb des Eratosthenes; Koordinatennetz für eine Weltkarte). Er hörte, dass es in Syene (heute Assuan) einen tiefen Brunnen gäbe, in dem sich die Sonne einmal im Jahr bei ihrem höchsten Stand spiegle. Diese Erscheinung war weiter nördlich in Alexandria nicht bekannt. Er maß daher den Winkel w , den die Sonne bei ihrem Höchststand im Jahr in Alexandria mit dem Lot bildet und ermittelte dafür den Wert $w = 7\frac{1}{7}$ Grad. Nun liegen Alexandria und Syene in etwa auf gleicher geografischer

Länge und das Niltal verläuft ganz grob entlang dieses Meridians. Eratosthenes ließ die Entfernung b von Alexandria nach Syene entlang des Nils durch Abschreiten messen und konnte damit den Erdumfang bestimmen.

Aus nebenstehender Zeichnung erkennt man die Gültigkeit folgender Gleichung:

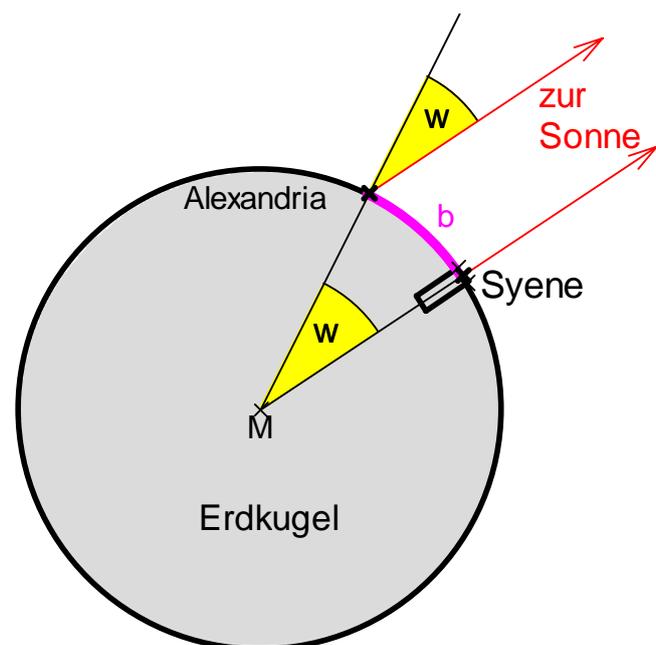
$$w : 360^\circ = b : U$$

Der Winkel w verhält sich zum Vollwinkel 360° wie der Bogen b zwischen Alexandria und Syene zum gesamten Erdumfang U .

Mit den "Messergebnissen" $w = 7\frac{1}{7}^\circ$ und $b = 5000$ Stadien (je ca. 160 m) von Eratosthenes erhält man:

$$U = 39\,700 \text{ km.}$$

Ein phantastisches Ergebnis!



Hinweise:

1. Syene (Assuan) muss bei etwa 23° nördlicher Breite, dem Wendekreis der Sonne, liegen. Begründen Sie warum.
2. Diese Messung kann im Prinzip von Schülern (z. B. bei Urlaubsreisen in den Sommerferien) mit dem Sonnenring von Hagge (siehe unten Seite 16) durchgeführt werden: Am selben vereinbarten Tag wird die Kulminationshöhe der Sonne z. B. auf Sizilien und in Kopenhagen (oder am Nordkap) gemessen. Aus dem Winkelunterschied zusammen mit der Entfernung der beiden Orte lässt sich die Berechnung von Eratosthenes nachvollziehen. Entscheidend ist, dass man zwei Orte etwa auf dem gleichen Längengrad wählt.

b) Das internationale Erdellipsoid (Hayford 1924)

Heute, im Zeitalter der Raumfahrt, ist der Nachweis und die Vermessung der Kugelgestalt der Erde kein grundsätzliches Problem mehr. Man hat sogar merkliche Abweichungen von der Kugelgestalt festgestellt und sich international auf folgende Daten geeinigt:

Die Form der Erde ist ein **Rotationsellipsoid**, die Ausdehnung ist in Nord-Süd-Richtung verkürzt. Die Halbachsen a und b des Ellipsoids sind wie folgt vermessen:

$$a = 6378,388 \text{ km}; \quad \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}. \quad \text{Daraus } b = 6356,912 \text{ km. (rel. Genauigkeit } 10^{-7}).$$

Als **einfache Richtwerte** für die Kugelgestalt kann man folgende Werte annehmen:

$$\text{Radius } R = 6\,370 \text{ km}; \quad \text{Äquatorumfang } u = 40\,000 \text{ km} = 40 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

$$\text{Oberfläche } O = 510 \cdot 10^6 \text{ km}^2; \quad \text{Masse } M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

1 Meter war ursprünglich definiert als der 40-Millionste Teil des Erdumfangs.

1 Bogengrad = 111,18 km = Abstand zweier Breitenkreise von Grad zu Grad.

$$1 \text{ Bogenminute} = 1,852 \text{ km} = \mathbf{1 \text{ Seemeile}} = \frac{1}{60} \text{ Bogengrad}$$

$$\mathbf{1 \text{ Knoten}} = 1 \frac{\text{Seemeile}}{\text{Stunde}} = 1,852 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

$$\frac{1}{15} \text{ Bogengrad} = 4 \text{ Bogenminuten} = 7,412 \text{ km} = \mathbf{1 \text{ geografische Meile}}.$$

Die Beschreibungsweise „*unten - oben*“ auf der Erdoberfläche ist wegen der Kugelgestalt nicht angemessen. Das so genannte *Antipodenproblem* wäre weitaus unproblematischer, wenn man nicht „*unten - oben*“ sondern „*innen - außen*“ als angemessene Beschreibungsweise auf der Erdoberfläche verwenden würde.

c) Welche Belege für die Erdrotation um ihre eigene Achse kennt man?

- Einen deutlichen Hinweis gibt die *scheinbare Tagesbahn aller Gestirne*. Auf einem Nachtfoto mit längerer Belichtungszeit in Richtung Polarstern erkennt man, dass alle Sterne Kreise um den Polarstern beschreiben.

- Es gibt die „Ostabweichung fallender Gegenstände“. Bei der Rotation haben die Gegenstände auf der längeren äußeren Bahn eine größere Geschwindigkeit. Diese behalten sie beim Fallen bei und eilen daher den weiter innen liegenden Gegenständen ostwärts voraus. Man hat dieses Phänomen messbar nachweisen können, beispielsweise am Turm von St. Michaelis in Hamburg im Jahr 1802:

Messergebnisse: $h = 76 \text{ m}$; $d \approx 9 \text{ mm}$. Die Theorie ergibt d zu 12 mm :

Radius des Breitenkreises von Hamburg ($\varphi = 53,5^\circ$ nördl.): $\rho = R \cdot \cos \varphi$;

Radius des Bahnkreises des Steines in der Höhe h : $\rho' = (R + h) \cdot \cos \varphi$;

$v = (2\pi\rho)/(24 \text{ Std})$. Unterschied der Geschwindigkeiten: $\Delta v = (2\pi h \cdot \cos \varphi)/(24 \text{ Std})$

Fallzeit $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,9 \text{ s}$.

Ostabweichung: $d = \Delta v \cdot \Delta t = 12,8 \text{ mm}$.

- Die Erscheinung der *Passatwinde* gibt einen deutlichen Hinweis auf die Erdrotation.
- Der endgültige Beweis wurde erst sehr spät gefunden nämlich durch den berühmten **Pendelversuch von Foucault** im Jahr 1851 in Paris. Bei einem kräftefrei aufgehängten Pendel bleibt die Schwingungsebene erhalten. Am Nordpol dreht sich die Horizontebene im Laufe eines Tages einmal vollständig um die Achse. Ein Beobachter hat den Eindruck als würde sich die stabile Pendelebene einmal vollständig drehen. Bei geringeren geografischen Breiten ist der Effekt kleiner. Bei der geografischen Breite $\varphi = 50^\circ$ ($\sin \varphi = 0,77$) beträgt die Drehung nur $11,5^\circ$ pro Stunde.

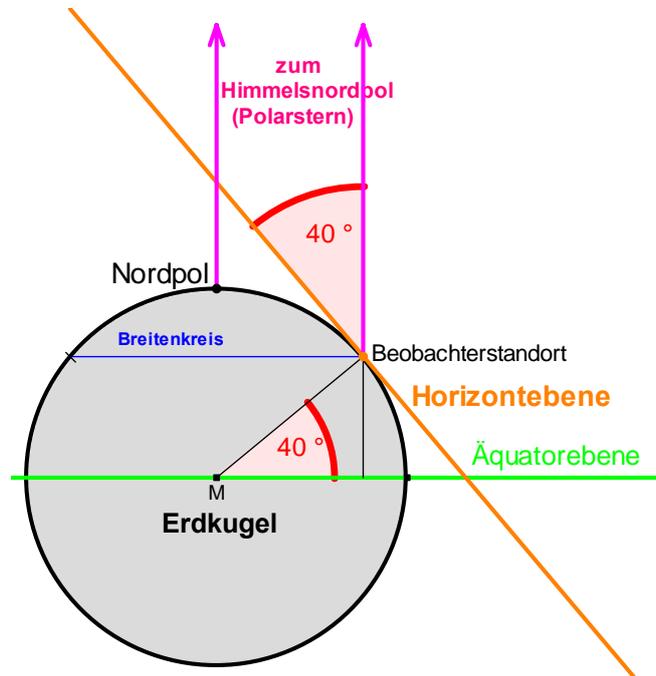
d) Eine Folgerung aus der Kugelgestalt der Erde:

Die Erdachse und damit die Pole sind astronomisch (nicht durch Magnetismus) definiert. Die Horizontebene eines Beobachters ist die Tangentialebene an die Erdkugel am Beobachterort B.

Man erkennt aus nebenstehender Zeichnung die wichtige Beziehung:

Polhöhe = geografische Breite

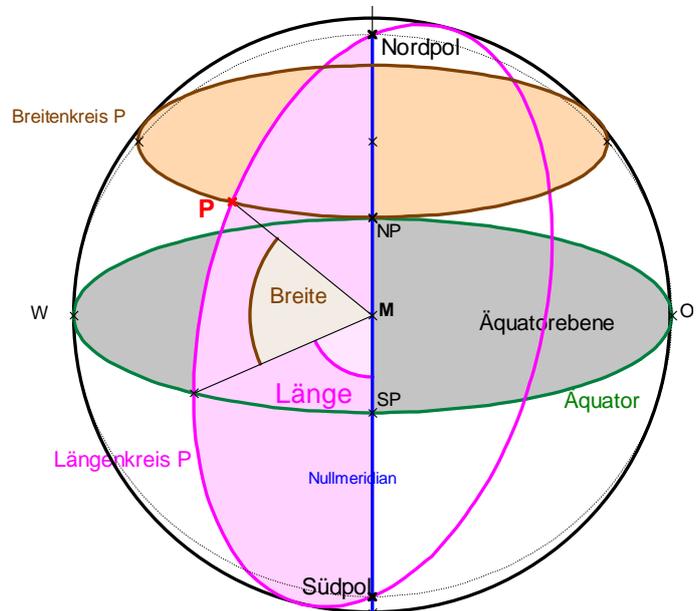
Zur eindeutigen Festlegung von Koordinaten auf der Erdoberfläche musste eine Festlegung für einen Nullmeridian getroffen werden. Diese war lange Zeit umkämpft und es gab verschiedene wie z. B. den Meridian durch Hierro, die westlichste Azoreninsel bzw. schließlich den durch Greenwich.



Die Koordinaten eines Ortes sind die **geografische Länge** (Abweichung vom Greenwich-Meridian auf dem Äquator) und die **geografische Breite** (Höhe über dem Äquator). Koordinatenlinien sind die **Breitenkreise** (Parallelkreise zum Äquator) und die **Meridiane** (Längenhälbkreise durch die beiden Pole).

e) Geografische Koordinaten: Länge und Breite

Ein Ort auf der Erde wird durch seine **geografischen Koordinaten** festgelegt. Dazu benötigt man zunächst die beiden Pole, **Nordpol** und **Südpol**. Dies sind die Punkte, in denen die Achse der Eigenrotation die Erdoberfläche trifft. Senkrecht zu dieser Achse durch den Erdmittelpunkt verläuft die **Äquatorebene**. Diese trifft die Erdoberfläche in einem Großkreis, dem **Erdäquator**. Die Halbkreise zwischen Nordpol und Südpol nennt man **Meridiane** oder Längenhalfkreise. Man hat als **Nullmeridian** den Meridian durch die Sternwarte von Greenwich bei London vereinbart. Nun kann man die Lage eines Ortes durch seine **geografische Länge** (ostwärts oder westwärts jeweils von 0° bis 180°) und seine **geografische Breite** (nordwärts positiv, südwärts negativ, jeweils von 0° bis 90°) angeben.



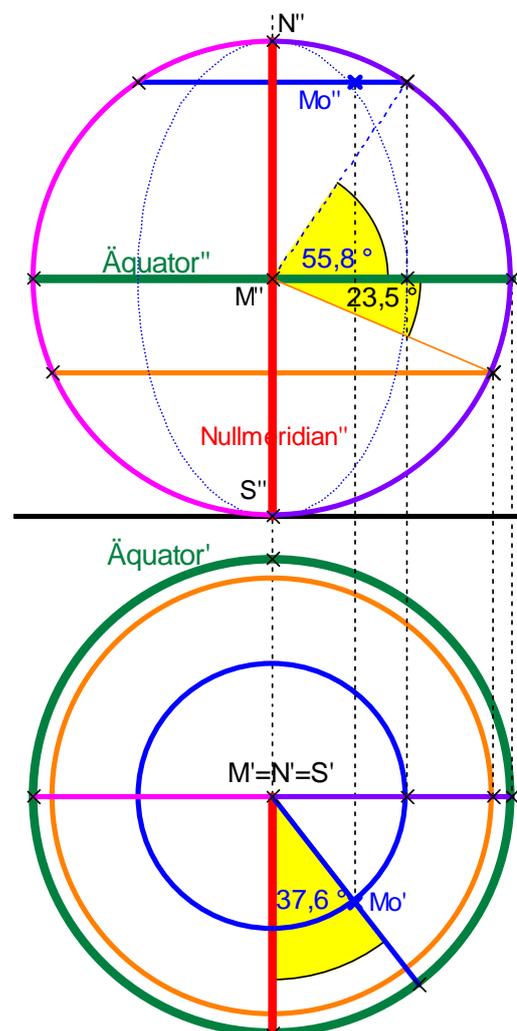
Wir stellen das Gradnetz der Erde auch in **Grund- und Aufrissdarstellung** vor:

Koordinatenlinien sind einmal die Längenhalfkreise oder **Meridiane**. Alle Meridiane sind halbe Großkreise zwischen Nord- und Südpol und alle sind gleich lang. Sie erscheinen im Aufriss als Halbellipsen und im Grundriss als Radien.

Zum anderen sind es die **Breitenkreise**. Die Breitenkreise sind Parallelkreise zum Äquator. Der einzige Großkreis unter ihnen ist der Äquator. Sie erscheinen im Aufriss als Strecken (parallel zum Äquator) und im Grundriss als konzentrische Kreise um den Mittelpunkt.

Jeder Punkt der Erdoberfläche (mit Ausnahme der beiden Pole) ist eindeutig als Schnittpunkt eines Meridians mit einem Breitenkreis definiert. Stuttgart hat z. B. die Koordinaten $48^\circ 46' 39''$ nördliche Breite und $9^\circ 10' 43''$ östliche Länge.

In dieser Zeichnung ist der Äquator grün, der Nullmeridian rot, der südliche Wendekreis auf $23,5^\circ$ Süd braun und Moskau (Mo) mit $37,6^\circ$ Ost und $55,8^\circ$ Nord samt zugehörigem Meridian und Breitenkreis blau eingezeichnet.



f) Das Horizontkoordinatensystem für die Himmelskugel: Azimut und Höhe

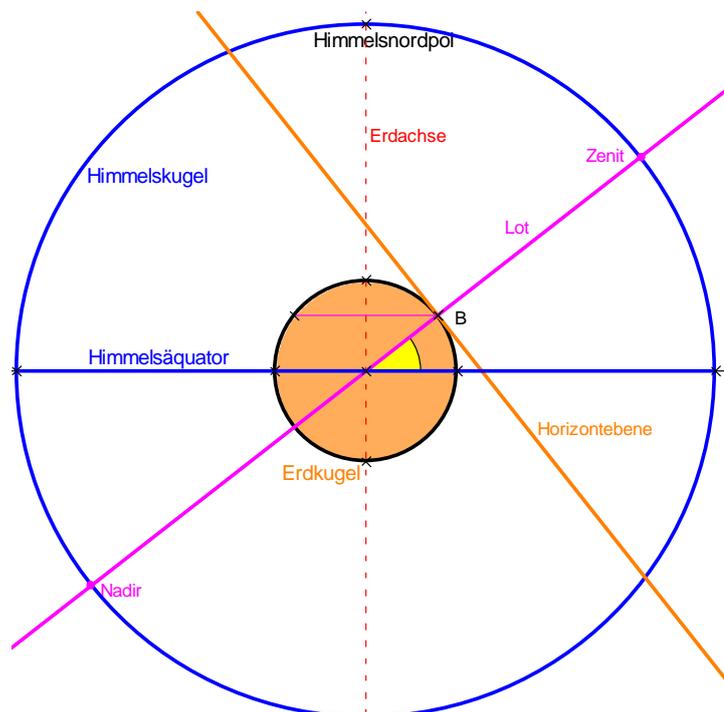
Ein Beobachter B an irgendeinem Ort der Erde benötigt zur Beschreibung der Richtungen, in denen er seine Beobachtungen macht, ein Bezugssystem.

Die erste und handgreiflichste, weil stets physikalisch realisierbare, Orientierungsrichtung auf der Erde ist das **physikalische Lot**. Dieses stimmt keineswegs überall und immer genau mit dem *geometrischen Lot* (also der Richtung zum Erdmittelpunkt) überein. Gründe sind z. B. die Erdabplattung, Gebirge, Erzlager etc. Allerdings sind die Abweichungen nicht sehr groß und in erster Näherung sind physikalisches und geometrisches Lot gleichzusetzen.

Die Tangentialebene an die Erdkugel im Punkt B ist die zur Lotrichtung senkrechte Ebene im Punkt B, wir nennen sie die **Horizontebene** des Beobachters B.

Die Himmelskugel können wir uns in Form einer unendlich großen Käseglocke über der Horizontebene vorstellen. Die Lotrichtung im Punkt B trifft die Himmelskugel einmal oberhalb der Horizontebene im **Zenit** und zum anderen unterhalb der Horizontebene im **Nadir**.

Nun kann man für einen Punkt am Himmel seine „**Höhe über dem Horizont**“ angeben und zwar positiv von 0° bis 90° auf der Zenitseite und negativ auf der Nadirseite.



Was noch fehlt ist eine Richtung innerhalb der Horizontebene. Dazu muss man innerhalb dieser Ebene eine ausgezeichnete Richtung bestimmen, die so genannte **Mittagslinie** (Nord-Süd-Linie), die astronomisch bestimmt wird. Diese bestimmt man am einfachsten mit Hilfe einer **Stabschattenkurve**. Für einen Lotrecht im Punkt B aufgestellten Stab zeichnet man die im Verlauf eines Sonnentages markierten Schattenwürfe seiner Spitze auf einer horizontalen Ebene auf. Diese Kurve ist ein Kegelschnitt (auf mittleren Breiten in der Regel ein Hyperbelast) und seine Symmetrielinie gibt die Mittagslinie an. Auf diese Weise kann man innerhalb der Horizontebene einen Südpunkt und einen Nordpunkt bestimmen. Nun kann man die Richtung für einen Punkt am Himmel durch zwei Angaben eindeutig festlegen:

Das Azimut:

Dies ist der Winkel, um den man innerhalb der Horizontebene vom Südpunkt ausgehend über Westen, Norden und Osten drehen muss.

Die Höhe:

Dies ist der Winkel um den man anschließend über die Horizontebene bis zur Beobachtungsrichtung zu einem Gestirn G anheben muss.

Hinweis:

Für das *Azimet* findet man unterschiedliche Definitionen: entweder die Winkelabweichung von Nord über Ost und Süd wie in der Nautik, oder von Süd über West nach Nord wie heute allgemein üblich. Das Wort *Azimet* ist arabischen Ursprungs und bedeutet Richtung.

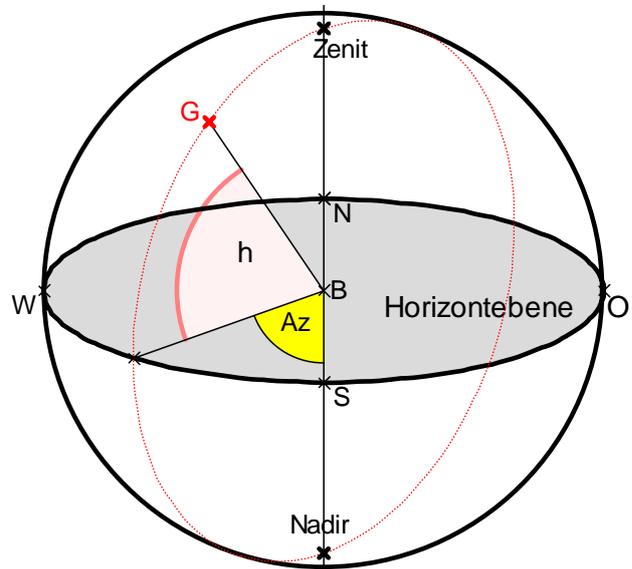
Wir geben einige Beispiele an:

Punkte in der Horizontebene haben alle die Höhe $h = 0^\circ$.

Der Südpunkt in der Horizontebene hat das Azimet $Az = 0^\circ$, der Westpunkt hat das Azimet $Az = 90^\circ$, der Nordpunkt 180° und der Ostpunkt im Horizont hat das Azimet 270° .

Für den Zenitpunkt mit der Höhe $h = 90^\circ$ bzw. den Nadirpunkt mit der Höhe $h = -90^\circ$ ist das Azimet jeweils unbestimmt.

Gelegentlich wird an Stelle der Höhe h über dem Horizont auch die **Zenitdistanz** ($z = 90^\circ - h$) angegeben.



g) Schüleraktivitäten im Zusammenhang mit dem Horizontkoordinatensystem

Aufgabe 1:

- Wo liegen alle Punkte mit gleichem Azimet?
- Wo liegen alle Punkte mit der gleichen Höhe?

Aufgabe 2: Bestimmung der Mittagslinie

Kompass; Polarstern; Uhrmethode (Mitte zwischen „kleiner Zeiger zur Sonne“ und „12-Uhr-Stellung“); Stabschattenkurve; Drahtglockenexperiment.

Aufgabe 3: Beobachtungsmöglichkeiten am Taghimmel mit der Drahtglocke

Drahtglockenmodell für den täglichen Sonnenlauf im Jahresrhythmus.

Auch der Vollmond (vor allem im Winter) ist möglich. Man kann hieraus allerhand herausholen: Jahreszeiten. Äquinoktien. Ekliptikschiefe. Abend- und Morgenweite der Unter- bzw. Aufgangspunkte, Kulminationshöhen, Tagbögen, Mittagslinie u. v. a. m.

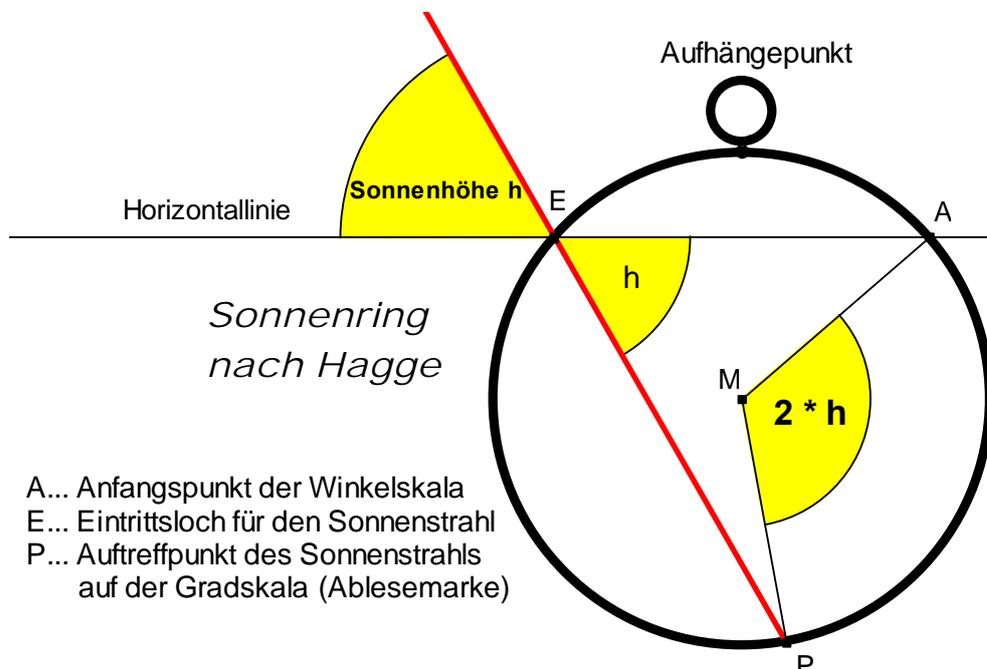
Aufgabe 4: Aufnahme von Stabschattenkurven

Bestimmung von Mittagslinie, Kulminationshöhe, Kulminationszeit der Sonne.

Theorie der Stabschattenkurven; Gestalt in Abhängigkeit von geografischer Breite und Jahreszeit; Äquinoktien. Messung von Azimet und Höhe der Sonne, sofern die Mittagslinie bestimmt ist. Bestimmung von wahren Ortszeiten (WOZ) und Zeitgleichung bei Vorhandensein einer genauen Uhr. Erfahrungen für den Bau einer Sonnenuhr.

Aufgabe 5: Bau eines Sonnenringes nach Hagge (siehe untenstehende Zeichnung)

- Der Sonnenring dient zur einfachen Messung der Höhe des Sonnenstandes (z. B. Kulminationshöhe) über dem Horizont des Beobachters.
- Geeignet ist ein Ring aus Metall, Kunststoff oder ähnlichen Materialien. Er sollte einigermaßen stabil sein. Günstige Breite ca. 1 bis 3 cm. Vorteilhaft ist es, wenn man sich einen Ring von einem Kunststoff- oder einem Metallrohr absägen kann.
- Der Durchmesser ist prinzipiell beliebig, jedoch muss die Gradskala danach geeicht werden. Wenn man als Gradskala eine Millimeterskala verwenden will, so ergibt sich der Innendurchmesser durch folgende Überlegung:
Einer Höhe $\alpha = 1^\circ$ entspricht für die Skala ein Mittelpunktswinkel von $\varphi = 2^\circ$.
Diesem soll ein Bogen der Länge $b = 2 \text{ mm}$ auf der Gradskala entsprechen.
Also gilt für den Innenradius r : $2^\circ : 360^\circ = 2 \text{ mm} : 2 * \pi * r$. Daraus erhält man $r = 57,3 \text{ mm}$, also den Innendurchmesser des Ringes zu $d = 11,46 \text{ cm}$.
- Nach Anbringung der Aufhängung (Durchbohrung mit Faden oder angeschraubte Aufhängeöse oder andere Lösung) sind die Marken für die Bohrung bei E und für den Beginn der Gradskala bei A anzubringen. Dies ist der heikelste Punkt. Diese beiden Marken müssen sich bei frei aufgehängtem Ring (wie bei der Messung) auf derselben Höhe befinden. Davon hängt die Genauigkeit entscheidend ab. Am besten markiert man dies auf einer ebenen Richtplatte: An dem frei hängenden Ring werden auf beiden Seiten der Aufhängung *auf gleicher Höhe* Markierungen angebracht. Die eine dient der Bohrungsöffnung E für das Sonnenlicht (lichte Weite ca. 1 mm; evtl. Nachbohren) die andere dem Anfang A der einzuklebenden Winkelskala.
- Gemessen wird stets mit frei hängendem Ring. Entscheidend ist die gleiche Höhe von Lichtöffnung E und Skalenanfang A.

**Nützliche Winkelmaße für Abschätzungen am Himmel:**Vollmondbreite \approx Sonnenbreite $\approx 0,5^\circ$.

Mit ausgestrecktem Arm:

Daumenbreite $\approx 2^\circ$ Daumensprung $\approx 7^\circ$ Faustbreite $\approx 8^\circ$ Handspanne $\approx 22^\circ$

3. Geometrie der Tagesbahnen der Gestirne

In diesem Kapitel wollen wir einige geometrische Untersuchungen zu den Tagesbahnen von Gestirnen vornehmen. Wir erinnern uns, dass die Tagesbahnen von Gestirnen Parallelkreise zum Himmelsäquator sind. Insbesondere interessieren uns Auf- und Untergangszeiten und Punkte, Kulminationshöhen und die Längen der Tagbögen.

a) Darstellung der Tagesbahnen am Wasserglobus

Ein einfaches Instrument zur Veranschaulichung der Tagbögen von Gestirnen ist der bereits erwähnte **Wasserglobus**.

Bei lotrechter Stellung der Achse (Polhöhe = 90° ; Foto unten links) stimmt der Himmelsnordpol mit dem Zenitpunkt überein und die Wasserlinie markiert den Himmelsäquator an der Glaskugel. Man markiert ihn mit einem Klebeband. Vorteilhaft ist es, auch die Ekliptik (Zodiakus, Tierkreis) zu markieren, die um $23,5^\circ$ gegen den Äquator geneigt ist. Die Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Äquator sind der Widder- oder Frühlingspunkt (γ) und der Waage- oder Herbstpunkt (ω).

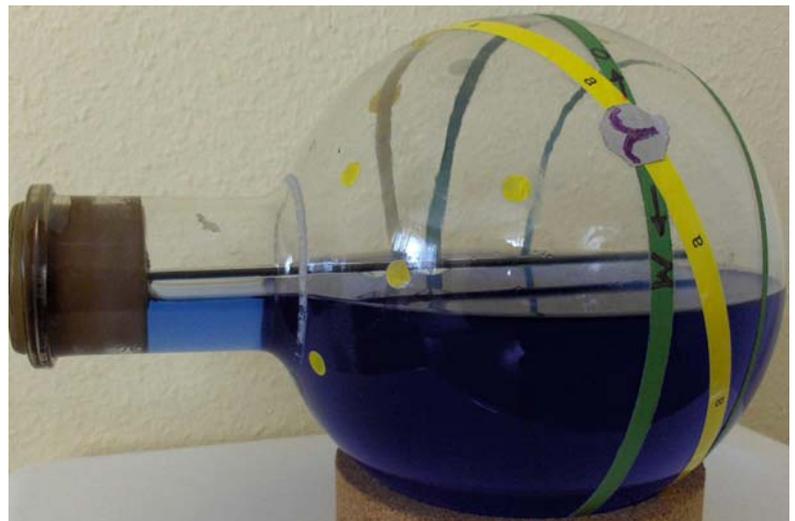
Bei horizontaler Stellung der Achse (Polhöhe = 0° ; Foto unten rechts) hat man die Verhältnisse, die man am Äquator antrifft. Der Pol liegt in der Horizontebene.

Je nach Neigung der Achse (**Polhöhe = geografische Breite**) kann man nun die Verhältnisse bei verschiedenen geografischen Breiten modellieren. Eine volle Drehung der Glaskugel um die Achse stellt den Verlauf der Gestirne bei der Tagesdrehung dar. Aufgeklebte Sternmarken zeigen z. B. sehr schön die Auf- und Untergangspunkte, die Kulmination sowie eventuelle Zirkumpolarität, falls sie nahe genug am Himmelspol sind.

Die Höhe eines Gestirns über der Äquatorebene bezeichnet man als seine **Deklination** δ . Der Ergänzungswinkel auf 90° ist die **Poldistanz** ($p = 90^\circ - \delta$).



Tagesdrehung am Nordpol



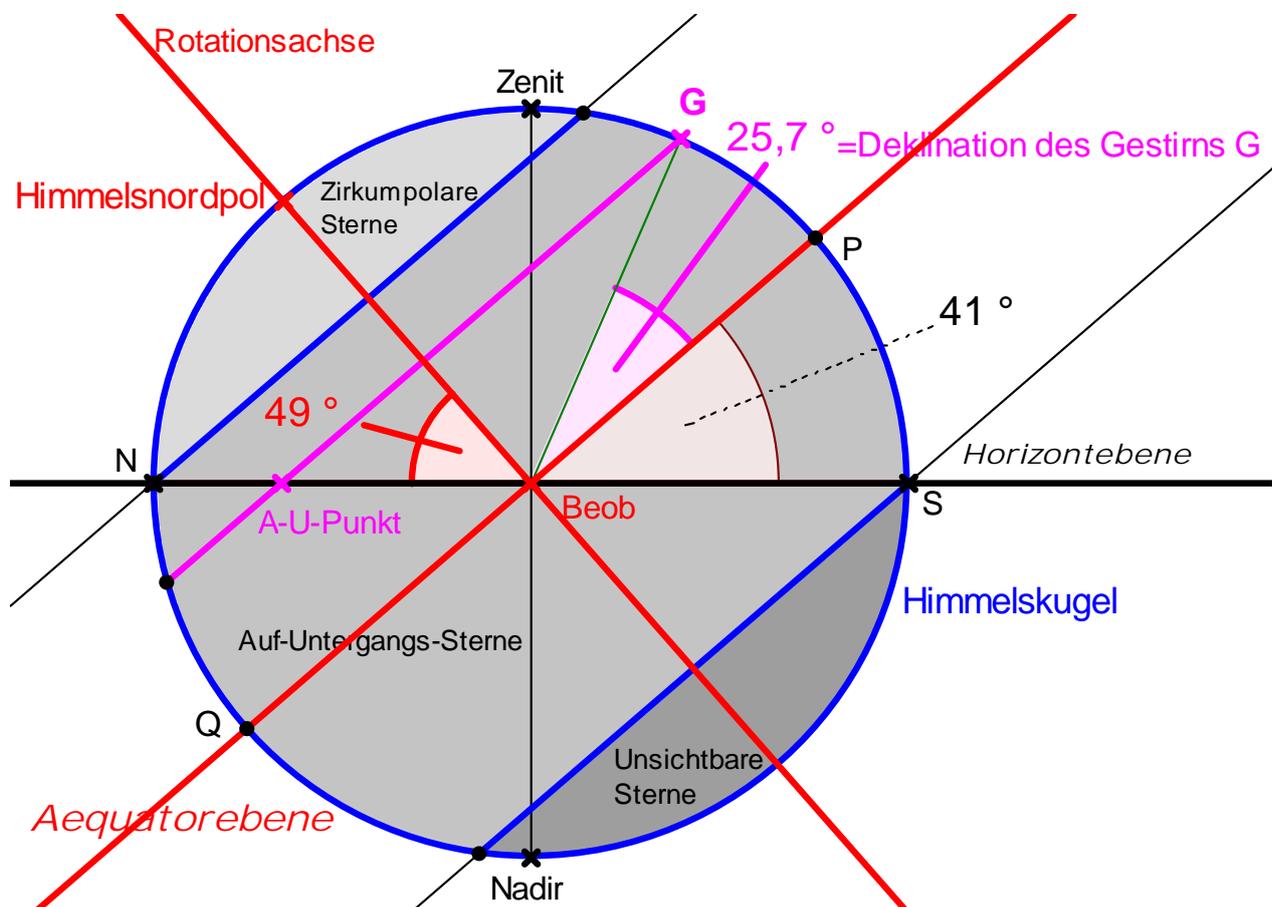
Tagesdrehung am Äquator

Demonstrationsmöglichkeiten mit dem Wasserglobus:

- Zirkumpolare Sterne, Auf-Untergangs-Sterne, unsichtbare Sterne.
- Verhältnisse am Nordpol: Der Polarstern steht im Zenit. Alle hier sichtbaren Sterne (das sind alle mit positiver Deklination also sämtliche Sterne des nördlichen Himmels) sind hier zirkumpolar.
- Verhältnisse am Äquator: Alle Sterne sind A- U- Sterne. Sie gehen senkrecht zur Horizontebene auf. Ihr Tagbogen ist jeweils 12 Stunden. Man sieht sämtliche Sterne sowohl des südlichen wie des nördlichen Sternenhimmels. Weil auch Sonnenaufgang und -untergang senkrecht zur Horizontebene verlaufen, hat man stets kurze Dämmerung.
- Verhältnisse in mittleren Breiten z. B. bei 49° Nord: Es gibt eine Reihe von zirkumpolaren Sternen (diejenigen, deren Poldistanz kleiner ist als 49°). Die meisten Sterne sind A- U- Sterne. Viele Sterne der Südhalbkugel sind unsichtbar. Die „Tagbögen“ (Teile oberhalb des Horizonts) sind sehr unterschiedliche lang.



b) Geometrische Darstellung der Tagesbahnen im Aufrissbild



Hinweise zur Anlage der Zeichnung:

1. Wir zeichnen die Horizontebene des Beobachters (Beob) in projizierender Ansicht als waagrechte Linie. Nun zeichnen wir die Himmelskugel um B als Mittelpunkt mit Zenit und Nadir sowie Nord- und Südpunkt (N, S) auf dem Horizont. Die Blickrichtung der Ansicht ist von West (vorne) nach Ost (hinten).
2. Als zweites tragen wir den Himmelsnordpol ein. Seine Höhe über dem Horizont ist genau gleich der geografischen Breite φ (**Polhöhe = geografische Breite**): $\angle PBN = \varphi$. Die Äquatorebene steht senkrecht zur Achse Beobachter – Pol.
3. Kennen wir von einem Gestirn G die **Deklination** $\delta = \angle PBG$ (= Höhe über dem Äquator), so können wir die Tagesbahn des Gestirns einzeichnen: Sie ist ein Parallelkreis zum Äquator mit der Höhe δ über dem Äquator (δ wird nordwärts positiv und südwärts negativ gezählt).
4. Es entstehen auf der geografischen Breite φ drei verschiedene Zonen:
 - Für $\delta > 90^\circ - \varphi$ (d.h. für eine Poldistanz $p < \varphi$) erhalten wir **zirkumpolare Sterne**, die eine nie untergehende Bahn um den Pol beschreiben. In unseren Breiten sind das z. B. die Sterne im großen und kleinen Bären, der Kassiopeia (Himmels-W) und im Fuhrmann (z. B. Capella).
 - Für $90^\circ - \varphi > \delta > \varphi - 90^\circ$ erhalten wir die **Auf- und Untergangsterne**, die einen Tagbogen (oberhalb des Horizonts) und einen Nachtbogen (unterhalb des Horizonts) haben. Beispiele sind etwa für unsere Breiten das Sommer-Dreieck, die Herbst-Fünfer-Reihe oder die Wintersternbilder Orion, Zwillinge etc.
 - Falls $\delta < \varphi - 90^\circ$ beträgt (d. h. die Poldistanz vom Südpol ist kleiner als φ), erhalten wir für diese geografische Breite **unsichtbare Sterne**, deren Bahn vollständig unterhalb der Horizontebene des Beobachters verläuft. Beispiele sind etwa die Sterne in Südpolnähe wie das legendäre „Kreuz des Südens“.
5. Man erhält aus der Zeichnung für die geografische Breite φ und einen Stern mit der Deklination δ die Kulminationshöhe der oberen Kulmination zu $h_o = 90^\circ - \varphi + \delta$. Entsprechend erhält man auch die untere Kulminationshöhe. Bestimmen Sie diese.

c) Geometrische Ermittlung von Daten aus der Tagesbahn

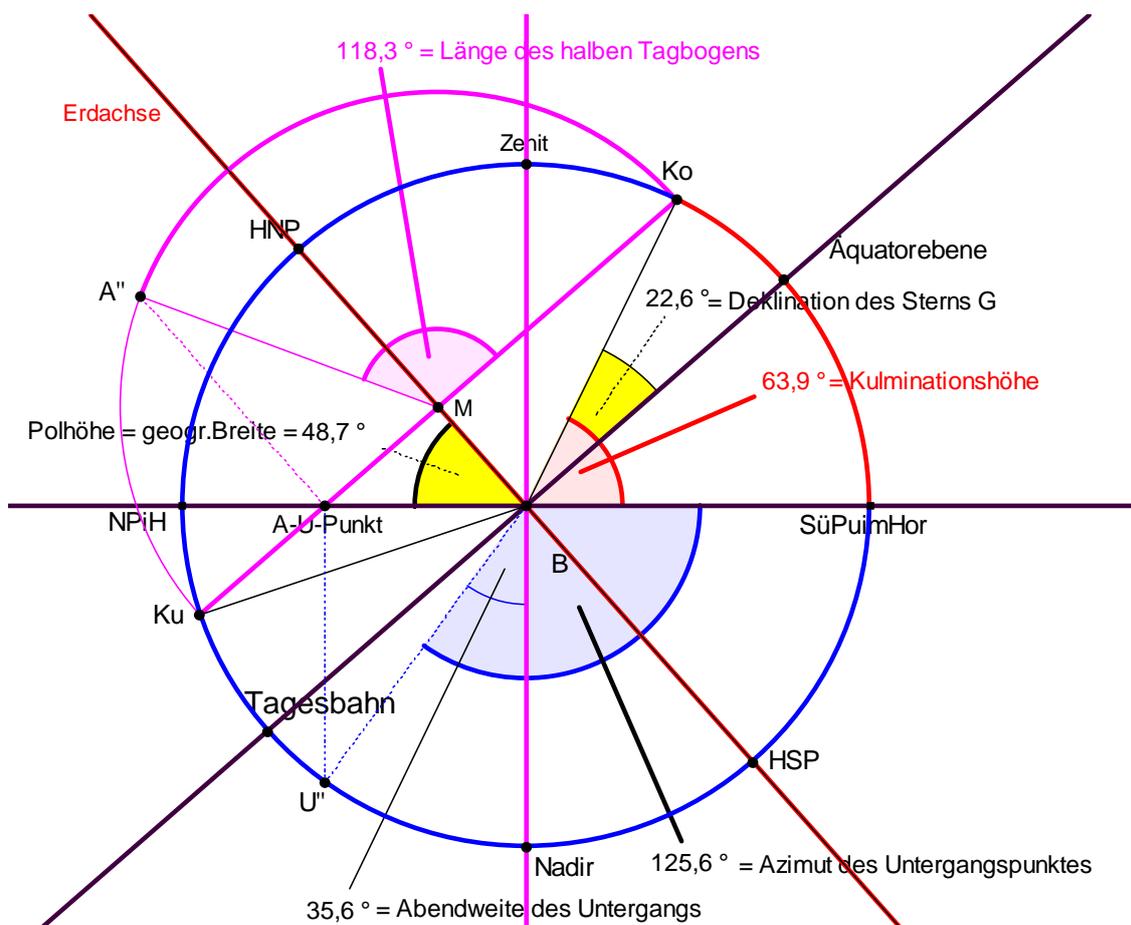
Legt man die Zeichnung zur Tagesbahn eines Gestirns mit variabler geografischer Breite φ des Beobachterstandpunkts (Himmelsnordpol als Zugpunkt) und variabler Deklination δ des Gestirns G (G als Zugpunkt) an, so kann man daraus eine Reihe von Daten gewinnen, die wir in der folgenden Zeichnung darstellen wollen:

Wir erläutern den Sachverhalt an Hand der nachstehenden Zeichnung, bei der als geografische Breite $\varphi = 48,7^\circ$ und als Deklination des Gestirns G der Wert $\delta = 22,6^\circ$ eingestellt wurde.

- Wie bereits dargestellt zeichnet man zunächst die Horizontebene, den Beobachter B, die Himmelskugel mit Zenit, Nadir, Süd- und Nordpunkt im Horizont.
- Im nächsten Schritt folgt die Einzeichnung des Himmelsnordpols (mit der geografischen Breite φ als Polhöhe über dem Horizont), der Rotationsachse (Erdachse), der Äquatorebene und dem Himmelssüdpol.

- Nun kann man mit Hilfe der bekannten Deklination die Tagesbahn des Gestirns G eintragen und erhält die Kulminationspunkt Ko und Ku sowie die Auf- und Untergangspunkt (A-U-Punkt, der eine vorne der andere hinten) im Horizont. Bis hierher haben wir nichts Neues gegenüber bisher. Nun beginnt das Neue.
- Wir wollen die **Länge des halben Tagbogens**, also den Mittelpunktswinkel des Bogens vom Aufgangspunkt A bis zur Kulmination Ko. Dazu klappen wir den Tagbogen um die Achse Ku-Ko um in die Zeichenebene und erhalten als Halbkreisbogen über Ku-Ko den wahren Tagbogen des Gestirns mit Mittelpunkt M. Den umgeklappten Aufgangspunkt A'' erhalten wir durch das Lot im A-U-Punkt auf der Klappachse Ku-Ko. Der Bogen A'' - Ko ist dann der halbe Tagbogen mit dem Mittelpunktswinkel $w = \angle A''MKo$. In unserem Fall ergibt sich $w = 118,3^\circ$, das entspricht einer Zeit von $t = w/360^\circ * 24 \text{ h} = 7,885 \text{ h}$ oder dem gesamten Tagbogen von $2 * 7,885 = 15,77 \text{ h}$.
- Zusätzlich kann man die **Lage des A-U-Punktes im Horizont** ermitteln: Dazu klappen wir die Horizontebene um die Achse Nordpunkt - Südpunkt im Horizont um (hier nach unten gezeichnet) und erhalten den Halbkreis über NPiH - SPiH mit Mittelpunkt B. Den umgeklappten A-U-Punkt U'' erhalten wir durch das Lot im A-U-Punkt auf der Klappachse NPiH - SPiH. Der Bogen U''-SPiH gibt uns das Azimut des Untergangspunktes und der Bogen U''-Nadir die so genannte „Abendweite“, also die Abweichung des Untergangspunktes von der Westrichtung an.

Mit dieser einfachen Konstruktion kann man also schon sehr viele Daten über Sterne mit bekannter Deklination ermitteln.



4. Koordinatensysteme

Wir haben bisher das **Gradnetz der Erde** mit der geografischen Breite φ (Höhe über dem Äquator) und der geografischen Länge λ (Abweichung vom Nullmeridian) sowie das **Horizontkoordinatensystem** mit der **Höhe** h über der Horizontebene und dem **Azimut** Az als Winkelabweichung von der Südrichtung im Horizont kennen gelernt. Das erste war im Wesentlichen bestimmt durch die *Achse der Erdrotation* und die *dazu senkrechte Äquatorebene*, das zweite durch das *physikalische Lot* und die *astronomische Mittagslinie* (Nord-Süd-Richtung) am Beobachterort.

Zur Beschreibung des Tageslaufs der Gestirnsbahnen hat man nun weitere geeignete Koordinatensysteme eingeführt:

a) Das ortsabhängige Äquatorkoordinatensystem

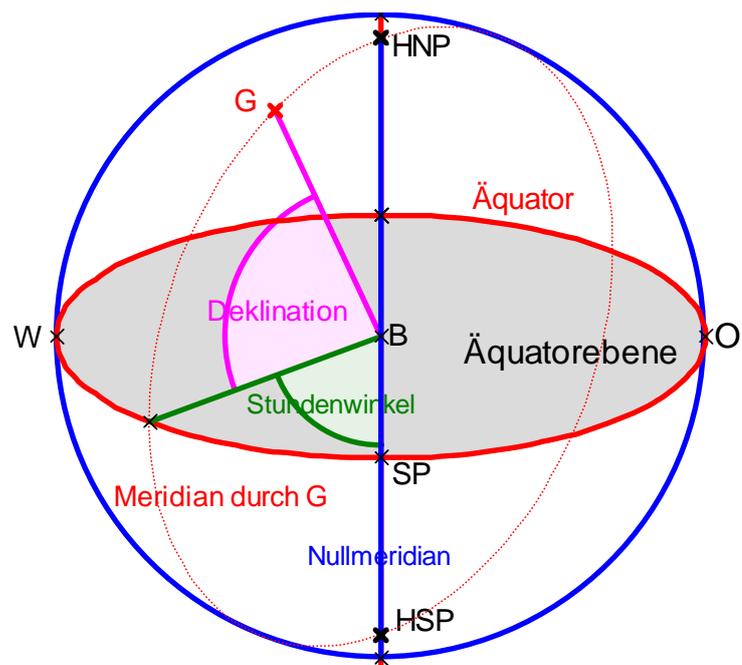
Das ortsabhängige Äquatorkoordinatensystem geht ebenfalls aus von der Achse der Erdrotation und der darauf senkrechten Äquatorebene.

Als eine Koordinate wird die Höhe über der Äquatorebene benutzt, die man als **Deklination** bezeichnet. Sie wird nordwärts positiv und südwärts negativ jeweils von 0° bis 90° gezählt. Die Deklinationskreise sind daher Parallelkreise zum Himmelsäquator und demnach genau die Tagesbahnen von Gestirnen.

Als weitere Koordinatenlinien dienen die Meridiane (Halbkreise) zwischen dem Himmelsnordpol (HNP) und dem Himmelsüdpol (HSP), wobei als Nullmeridian derjenige durch den Südpunkt des Beobachters genommen wird (Ortsmeridian).

Den Winkel zwischen Null- und Gestirnsmeridian nennt man den **Stundenwinkel**. Er wird in der Regel in Stunden angegeben, wobei 24 h der vollen Umdrehung mit 360° entsprechen, also $1 \text{ h} = 15^\circ$ gilt. Der Stundenwinkel wird vom Südpunkt aus westwärts positiv gezählt.

Als Beispiel geben wir die ortsabhängigen Äquatorkoordinaten des Zenitpunkts für einen Ort der geografischen Breite φ an: Der Stundenwinkel ist $t = 0$, weil der Zenitpunkt auf dem Nullmeridian durch den Südpunkt und den Himmelspol liegt. Die Deklination hat den Wert φ , weil die Äquatorebene mit der Horizontebene den Winkel $90^\circ - \varphi$ bildet, wie man leicht an der Zeichnung zur Tagesbahn erkennt.



Deklination δ = Höhe über dem Äquator (nordwärts positiv, südwärts negativ).

Stundenwinkel t = Winkel zwischen dem Ortsmeridian (durch den Südpunkt und die Pole) und dem Meridian durch das Gestirn und die Pole. Er wird vom Ortsmeridian aus auf dem Äquator westwärts positiv gezählt. Er wird gewöhnlich in Stunden angegeben: $1 \text{ h} = 15^\circ$.

Mit dem Stundenwinkel t kann man den jeweiligen Drehzustand der Erde beschreiben, indem man den Stundenwinkel eines bestimmten Gestirns angibt.

Beispiel: Bei der oberen Kulmination hat ein Gestirn den Stundenwinkel $t = 0 \text{ h}$, bei der unteren den Stundenwinkel $t = 12 \text{ h} = 180^\circ$. Ist T der halbe Tagbogen eines Gestirns, so hat dieses im Auf- bzw. im Untergangspunkt den Stundenwinkel $t = -T$ bzw. $t = +T$.

Man kann nun für jeden Beobachterort der Erde durch Wahl eines Fixpunktes den augenblicklichen Drehzustand der Erde im Verhältnis zum Fixsternhimmel beschreiben. Als Fixpunkt wählt man den **Frühlingspunkt** Υ , das ist der Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Himmelsäquator. Er befindet sich derzeit im Sternbild Fische (und nicht mehr wie vor 2000 Jahren im Sternbild Widder!) und er definiert die so genannte **Sternzeit**:

Sternzeit Θ am Beobachterort = Stundenwinkel des Frühlingspunktes.

Beim Besuch einer Sternwarte fällt dem unkundigen Laien stets auf, dass mindestens zwei Uhren aufgestellt sind, die sonderbare Zeiten anzeigen. Das sind Uhren die einmal die Ortssternzeit und einmal die Ortssternzeit von Greenwich anzeigen.

Man kann die Sternzeit am Sternhimmel leicht abschätzen, wenn man die Südrichtung und den Frühlingspunkt kennt: Wie weit ist der Winkelabstand des Frühlingspunktes von der Mittagslinie (= Meridian des Südpunktes). Dieser Winkel – ausgedrückt in Stunden – gibt die Sternzeit an. An den üblichen Sternkarten ist diese Sternzeit ebenfalls ablesbar. Als Beginn eines Sterntages legt man die Kulminationszeit des Frühlingspunktes, also dessen Durchgang durch den Ortsmeridian fest. Ein Sterntag ist ca. 4 min kürzer als ein Sonnentag, den Grund dafür werden wir noch kennen lernen.

Weil der Frühlingspunkt von großer Bedeutung in der Astronomie ist, wollen wir einen Hinweis zum Auffinden dieses Punktes am Sternenhimmel geben:

Ausgehend vom Polarstern mit $\delta = 90^\circ$ über den Stern β -Cassiopeiae mit $\delta = 60^\circ$ (das ist der rechte westliche Endstern des Himmels-W) und über den Stern Sirrah mit $\delta = 30^\circ$ (das ist der vordere nordöstliche Eckstern im Pegasus-Viereck) kommt man in noch einmal gleicher Schrittweite zum Frühlingspunkt mit $\delta = 0^\circ$. Es ist nützlich, sich diese Findelinie auf einer Sternkarte anzusehen und einzuprägen.

b) Das ortsunabhängige Äquatorsystem

Durch die **Deklination** (= Höhe über dem Himmelsäquator) und den **Stundenwinkel** (= Drehwinkel des Gestirns aus dem Ortsmeridian) ist die Lage eines Sterns für einen bestimmten Ort eindeutig beschrieben. Allerdings ist der Stundenwinkel ortsabhängig, also keine allgemeingültige Angabe. Für einen anderen Ort gilt ein anderer Stundenwinkel.

Um die Lage eines Sternes unabhängig vom Ort angeben zu können, benötigt man ein ortsunabhängiges Koordinatensystem. Dazu wählt man – entsprechend wie auf der Erde den Greenwich-Meridian – willkürlich einen bestimmten Himmelsmeridian als Nullmeridian. Man hat sich für den Meridian durch den Frühlingspunkt Υ entschieden und misst die Abweichung davon:

Wie bereits gesagt definiert man als Sternzeit Θ den Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Es gilt also allgemein

$$\begin{aligned} \text{Sternzeit} &= \text{Stundenwinkel des Frühlingspunktes} \\ &= \text{Stundenwinkel (G)} + \text{Rektaszension (G)} \quad \text{für beliebiges Gestirn G.} \\ \Theta &= t_F = t_G + \alpha_G. \end{aligned}$$

Wir diskutieren nun eine Reihe von Sonderfällen für diesen allgemeinen Sachverhalt:

▪ **Sterne in oberer Kulmination d. h. $t_G = 0$:**

Für Sterne G in oberer Kulmination gilt $\Theta = t_F = \alpha_G$

Augenblickliche Sternzeit = Rektaszension der Sterne in oberer Kulmination.

Die augenblickliche Sternzeit ist gleich der Rektaszension der Sterne, die sich in oberer Kulmination befinden. Man kann also leicht die Sternzeit ermitteln, wenn man für die augenblicklich (im Ortsmeridian) kulminierenden Sterne ihre Rektaszension kennt.

▪ **Sterne mit Rektaszension 0 d. h. $\alpha = 0$:**

Für Sterne mit der Rektaszension $\alpha = 0$ gilt: $\Theta = t_F = t_G$

Augenblickliche Sternzeit = Stundenwinkel des Frühlingspunktes.

Wiederum kann man daher die Sternzeit bestimmen, wenn man den Stundenwinkel des Frühlingspunktes ermitteln kann. Weitere solche Sterne mit $\alpha = 0$ sind β -Cassiopeiae und Sirrah im Pegasus (siehe oben bei Findelinie für den Frühlingspunkt).

▪ **Beginn des Sterntags d. h. $\Theta = 0$:**

Am Beginn des Sterntages gilt für alle Sterne $t_G = -\alpha_G$.

Am Beginn des Sterntages gilt: Der Stundenwinkel eines beliebigen Gestirns ist gleich seiner negativen Rektaszension.

▪ **Längengrad und Zeitmessung:**

Hat man z. B. auf einem Schiff eine Uhr, die exakt die Sternzeit von Greenwich zeigt, so kann man leicht die geografische Länge bestimmen. Es gilt nämlich:

$$\Theta_{\text{Greenwich}} - \Theta_{\text{Beobachter}} = \lambda_{\text{Beobachter}}$$

Man erhält die geografische Länge des Beobachters aus der Differenz der Greenwich-Sternzeit und der Sternzeit des Beobachterortes.

Beispiel:

Wenn der Frühlingspunkt in Stuttgart kulminiert, fehlen genau noch die 9° an der Eigenrotation der Erde, bis er in Greenwich kulminiert. Die Greenwicher Sternzeit ist $t = -36 \text{ min} = -9^\circ$, d. h. gleich dem Stundenwinkel des Frühlingspunkts in Greenwich zu diesem Zeitpunkt. Also ist $\lambda = -36 \text{ min} = -9^\circ =$ Länge von Stuttgart (östlich negativ).

Umgekehrt:

Wenn der Frühlingspunkt in Greenwich kulminiert ist die dortige Sternzeit $t = 0 \text{ h} = 0^\circ$. Die Sternzeit in Stuttgart ist jedoch $9^\circ = 36 \text{ min}$. Also ist $\lambda = 0 - 9^\circ = -9^\circ$ die geografische Länge für Stuttgart.

In früheren Zeiten war die Ortsbestimmung auf See ein großes Problem. Die geografische Breite zu bestimmen war leicht, denn es gilt ja „**Polhöhe = geografische Breite**“. Das wesentliche Problem war das der Längenbestimmung. Wie wir oben gesehen haben, hängt es entscheidend vom Vorhandensein von genau gehenden Uhren ab, die auf lange Zeit sehr exakt gehen. Das war das Hauptproblem der Längengradbestimmung, für die die Royal Academy seinerzeit einen Preis ausgesetzt hatte, den der englische Uhrmacher John Harrison (1693 – 1776) und der Göttinger Astronom Tobias Mayer (geb. 1723 in Marbach a. N., gest. 1762 in Göttingen) sich teilen konnten, letzterer leider erst posthum. Tobias Mayers Lösung des Längenproblems beruhte auf der Messung von Mondstrecken zu bekannten Fixsternen. Harrison erhielt 1765 den Betrag von 10 000 Pfund, Mayers Witwe 3 000 Pfund und Leonhard Euler 300 Pfund. 5 000 weitere Pfund sollte derjenige erhalten, der Mayers Tabellen verbessern konnte. Dadurch fanden Mayers Tabellen bis ins 20. Jahrhundert hinein Verwendung.

Wir empfehlen zu diesem Thema das Buch „Längengrad“ von Dava Sobel, in dem die Geschichte der Längengradbestimmung in der Seefahrt, insbesondere die bedeutende Leistung des englischen Uhrmachers John Harrison, dargestellt wird - leider vermisst man die Würdigung der Leistung des Tobias Mayer.

5. Die scheinbare Jahresbahn der Sonne und die Erdbahnbewegung

a) Beobachtungen

Im Laufe eines Jahres kann man beobachten, dass die *Sonne* einen *Umlauf ostwärts durch die Sternbilder der Ekliptik (des Tierkreises)* macht. Dies erkennt man z. B. daran, dass immer wieder andere, weiter ostwärts gelegene Sternbilder sich kurz nach Sonnenuntergang in Nähe des Sonnenuntergangspunktes befinden: Im August z. B. geht die Sonne in der Nähe von Regulus im Löwen unter, im Oktober in der Nähe von Spica in der Jungfrau, im November in der Nähe von Antares im Skorpion usw.

Eine zweite Beobachtung ist die, dass *Auf- und Untergangspunkte und –zeiten der Sonne wechseln und ebenso die Kulminationshöhen*. Also muss die Sonne im Lauf eines Jahres ihre Deklination verändern, was man bei den Fixsternen nicht beobachtet.

Die Sonne bewegt sich (scheinbar) im Lauf eines Jahres auf der Ekliptik durch die Sternbilder des Tierkreises (Zodiakus) bzw. der Ekliptik:

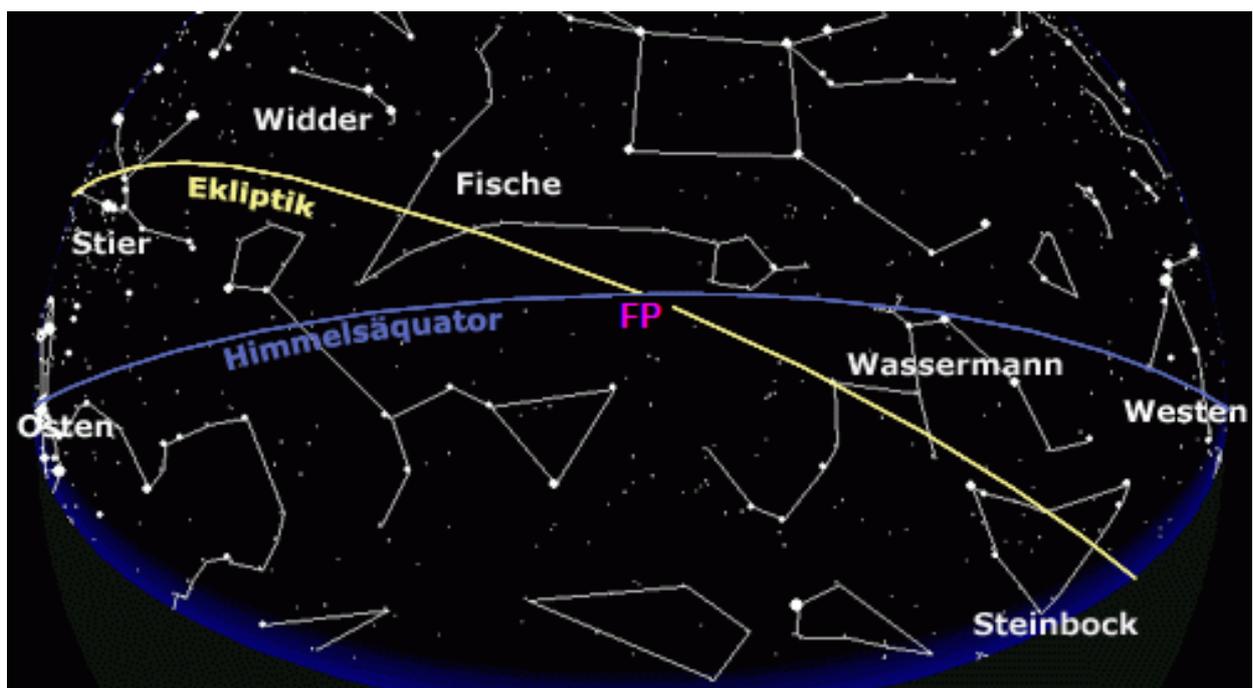
Widder – Stier – Zwillinge – Krebs – Löwe – Jungfrau – Waage –

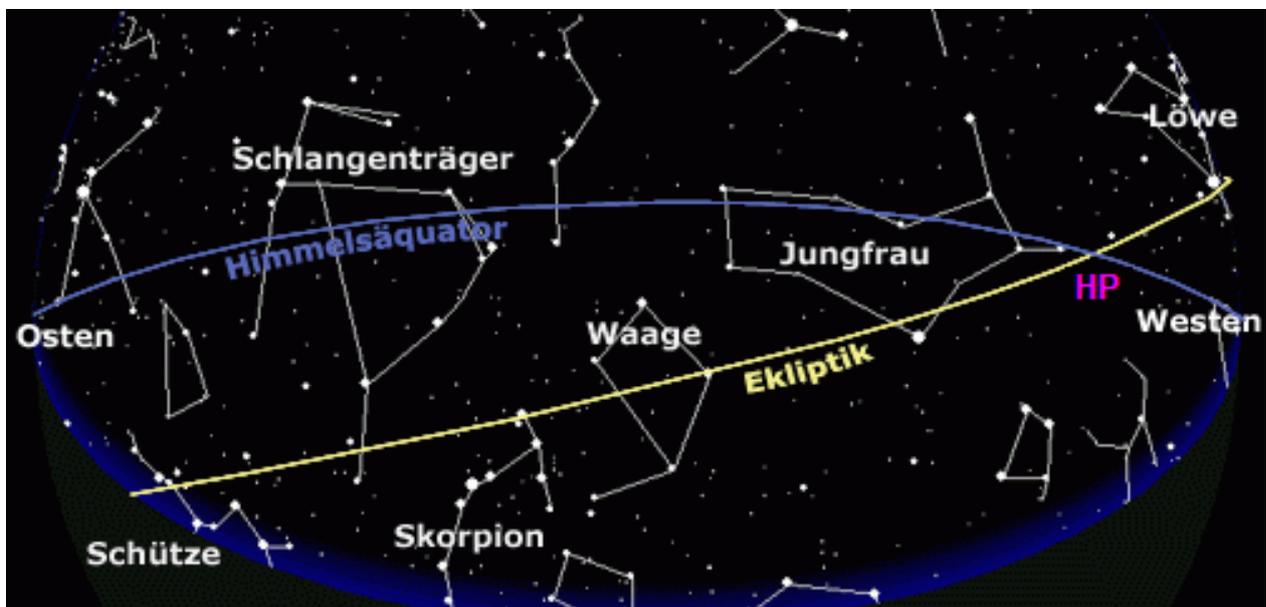
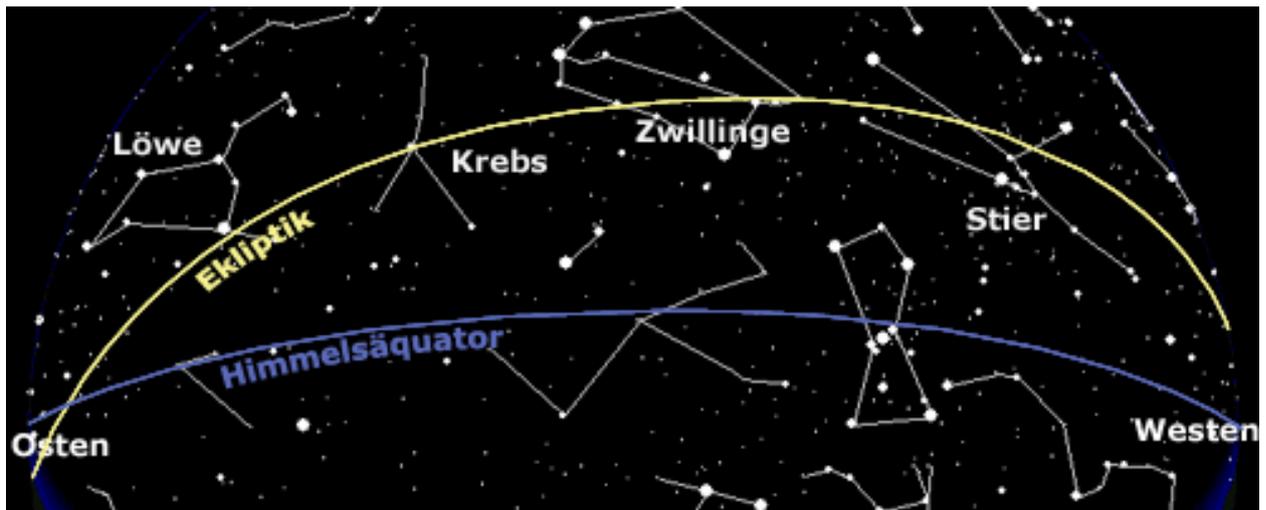
Skorpion – Schütze – Steinbock – Wassermann – Fische – Widder.

Die Ebene der Ekliptik ist gegenüber dem Himmelsäquator um etwa $23,5^\circ$ geneigt.

Der Umlauf dauert 1 Jahr, also bewegt sich die Sonne pro Monat um 1 Sternbild (30° oder 2 h) ostwärts und pro Tag um ca. 1° (das ist der zweifache Sonnendurchmesser).

In den nachfolgenden Bildern zeigen wir die Sternbilder des Tierkreises entlang der Ekliptik. Die Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Himmelsäquator sind einmal der Frühlingspunkt FP (γ) im Sternbild Fische (d. h. im „Tierkreiszeichen“ Widder) und zum anderen der Herbstpunkt HP (ω) im Sternbild Jungfrau (d. h. im „Tierkreiszeichen“ Waage).





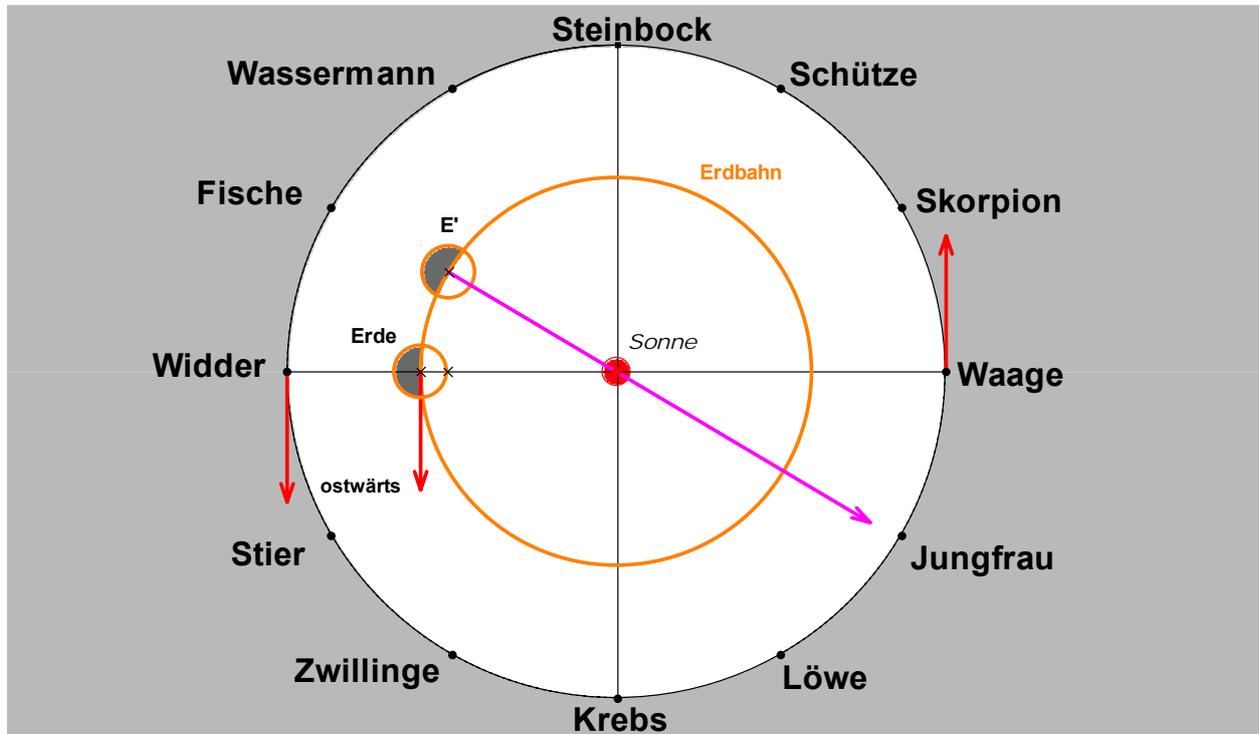
b) Erklärung

Die Erde führt im Laufe eines Jahres einen Bahnlauf auf einer Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt aus (1. Keplersches Planetengesetz). Daher befindet sich die Sonne von der Erde aus gesehen immer wieder vor dem Hintergrund anderer Sternbilder. Man sagt, die Sonne stehe z. B. im Sternbild Löwe, wenn die Richtung von der Erde zur Sonne in Richtung des Sternbilds Löwe weist. Dies lässt sich leider nicht direkt beobachten, denn die Sonne ist nur am Taghimmel sichtbar, an dem die Sterne unsichtbar sind.

Die Einteilung der Sonnenbahn in 12 Sektoren zu je 30° stammt von den Babyloniern (ca. 3000 bis etwa 500 vor Christus; der Höhepunkt der babylonischen Astronomie ist um ca. 600 vor Christus anzusetzen) und hat sich bis heute gehalten. Die *Tierkreiszeichen* des Zodiakus (Tierkreis) entsprechen heute nicht mehr den *Sternbildern*, in denen die Sonne zur betreffenden Zeit steht. Seit der Zeit der Babylonier hat sich die Sache um etwa 30° , also etwa um ein Sternbild westwärts verschoben. D. h. wenn wir z. B. im August das *Tierkreiszeichen* Löwe haben, dann steht die Sonne nicht im *Sternbild* des Löwen, sondern im *Sternbild* des Krebses. Der Grund für diese Verschiebung ist die Veränderung des Frühlingspunktes infolge der Präzessionsbewegung der Erdachse.

Diese umkreist in 26 000 Jahren einmal den Pol der Ekliptik, der sich im Sternbild Drache befindet. Grund für diese Präzessionsbewegung ist, dass die Gravitationskräfte von Sonne und Mond ein Drehmoment auf den Erdkreisel ausüben, auf das dieser mit der Präzessionsbewegung seitlich ausweichend reagiert.

Wir zeigen den scheinbaren Jahreslauf der Sonne durch den Tierkreis infolge der Erdbewegung um die Sonne an folgender Darstellung:



Eine Folge der *scheinbaren* Wanderung der Sonne ostwärts um täglich etwa 1° auf der Ekliptik ist die Tatsache, dass der *Sonnentag* (das ist die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen der Sonne) um ca. 4 Minuten länger ist als der *Sterntag* (das ist die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen eines Fixsterns oder des Frühlingspunktes). Hat sich nämlich die Erde einmal gedreht bis wieder der gleiche Fixstern kulminiert, so ist inzwischen die Sonne um 1° ostwärts gewandert und die Erde muss sich noch etwas weiter drehen bis die Sonne wieder zur Kulmination kommt. Die 365,25 Sonnentage des Jahres entsprechen daher 366,25 Sterntagen, weil die Sonne durch ihren eigenen Umlauf ostwärts einen Tag pro Jahr weniger hergibt.

c) Welche Beweise kennen wir für die Bahnbewegung der Erde?

Der seit alters her wichtigste Beleg für die Erdbahnbewegung ist das erwartete Auftreten einer jährlichen „*Parallaxe*“ der *Fixsterne*. Wir beschreiben diese Erscheinung an Hand der nachstehenden Zeichnung.

Ein weit entfernter Fixstern S wird im Verlaufe eines Jahres von den Punkten A, B, C und D der Erdbahn aus anvisiert. Dabei muss man das Fernrohr je nach Stellung in verschiedenen Richtungen etwas neigen. Bei A in Richtung AC, bei B in Richtung BD, bei C in Richtung CA und bei D in Richtung DB. Vom Beobachter aus heißt das, dass man im Verlauf eines Jahres beim Anvisieren des Sterns S das Fernrohr in einer kleinen Ellipse bewegen muss. Diesen Sachverhalt haben wir beim Punkt A dargestellt.

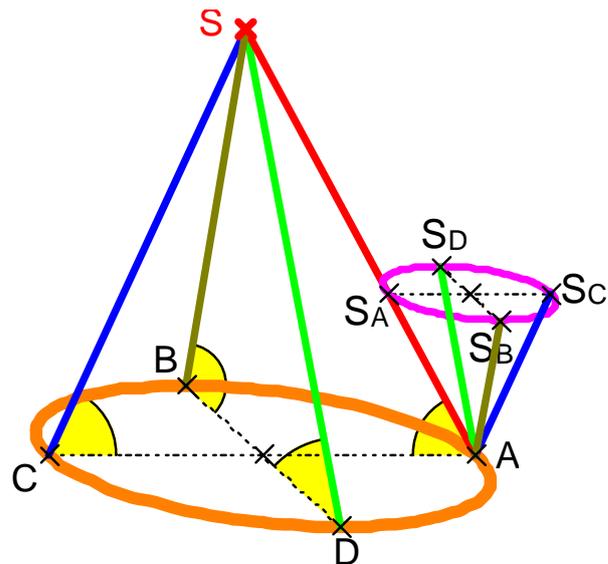
Das Fernrohr muss also im Lauf des Jahres eine kleine Parallaxenellipse beschreiben mit Neigungen quer zur Bewegungsrichtung der Erde. Diese Parallaxe sollte sich umso stärker auswirken, je näher die Fixsterne sind, also unterschiedlich ausfallen je nach Entfernung der Fixsterne.

Solange keine Fixsternparallaxe nachweisbar war, hatten alle Gegner gegen die Theorie der Bahnbewegung ein starkes Argument auf ihrer Seite. Bis zum Jahr 1838 konnte niemals eine derartige Fixsternparallaxe nachgewiesen werden, und deshalb stand die Behauptung von der Bahnbewegung der Erde auf schwachem

Beweisgrund. Der große Astronom Tycho Brahe hat (etwa um 1600) ein Weltsystem postuliert, bei dem die Sonne um die *ruhende* Erde kreist und die anderen Planeten die Sonne umkreisen. Er hat die *ruhende* Erde postuliert, weil es ihm trotz genauester Messungen bis auf $0,5^\circ$ Genauigkeit nicht gelungen ist, eine Parallaxe nachzuweisen.

Auf der Suche nach dem Nachweis der Sternparallaxe ergaben sich wissenschaftsgeschichtlich außerordentlich interessante Ergebnisse:

- Der dänische Astronom **Ole Römer** hat im Jahre **1675** Beobachtungen der Jupitermonde vorgenommen. Von Zeit zu Zeit verfinstern sich die Jupitermonde infolge einer Bedeckung durch den Planeten Jupiter. Diese **Verfinsterungen der Jupitermonde** hat Ole Römer beobachtet und sorgfältig vermessen. Die dabei auftretenden Pausen zwischen zwei Verfinsterungen desselben Mondes konnten durch jahrelange Beobachtungsreihen sehr genau ermittelt werden. Römer stellte nun kleine jahreszeitliche Schwankungen bei den Eintrittszeiten der Verfinsterungen fest: Ein halbes Jahr lang *verzögerte* sich das Eintreten der Verfinsterungen und im halben Jahr darauf *verfrühte* sich das Eintreten der Verfinsterungen der Jupitermonde. Er erklärte das dadurch, dass bei Bewegung der Erde *weg von Jupiter* das Licht länger zur Erde benötigt und daher Verzögerung eintritt, während bei Bewegung *auf Jupiter zu* eine Verkürzung des Lichtwegs und damit ein verfrühter Eintritt der Verfinsterung stattfindet. Insgesamt summierte sich der Fehler im Lauf eines halben Jahres auf ca. 1300 Sekunden auf. Mit der Kenntnis des Erdbahndurchmessers (das ist das Doppelte der „Astronomische Einheit“ $1 \text{ AE} = 150 \text{ Mio km}$) kann man damit die Lichtgeschwindigkeit bestimmen. Für 300 000 000 km, also den Durchmesser der Jahresbahn der Erde, benötigt das Licht etwa 1300 Sekunden, das ergibt eine Lichtgeschwindigkeit von etwa 250 000 km/s. So schlecht sind also die beobachteten Werte von Ole Römer nicht. Dies ist der erste Nachweis für eine endliche Geschwindigkeit bei der Ausbreitung des Lichts (Lichtgeschwindigkeit).
- Im Jahr **1728** fand der englische Naturforscher **James Bradley** auch auf der Suche nach einer Parallaxe die so genannte „**Aberration**“ des Lichts. Statt einer Abweichung *quer zur Bahnrichtung*, wie sie für die Parallaxe zu erwarten wäre, fand er eine *für alle Fixsterne gleiche Abweichung (Aberration) in der Richtung der Erdbahnbewegung*, also *quer zur erwarteten Abweichung* infolge einer Parallaxe. Er konnte eine für alle Fixsterne gleiche Aberrationskonstante von $20,47''$ messen. In Wirklichkeit hat Bradley damit erneut den Nachweis der Existenz einer endlichen Lichtgeschwindigkeit geführt. Wir erläutern den Sachverhalt an Hand nachstehender Zeichnung: Ein Beobachter im Punkt A auf der Erde bewegt sich mit der Bahngeschwin-



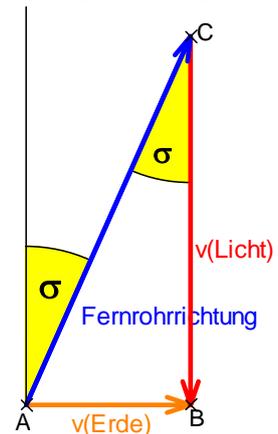
digkeit $v(\text{Erde})$ vorwärts. In der Zeit, in der er sich von A nach B bewegt, bewegt sich ein Lichtteilchen vom Punkt C aus ebenfalls nach B, allerdings mit Lichtgeschwindigkeit $v(\text{Licht})$. Wenn also der Beobachter dieses Lichtteilchen mit seinem Fernrohr auffangen will, muss er das Fernrohr auf die Quelle C zu nach vorne in Bahnrichtung geneigt halten. Wir berechnen den Vorhalteeinkel σ mit Hilfe der beiden Geschwindigkeiten:

Bahngeschwindigkeit der Erde $v = 30 \text{ km/s}$

Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000 \text{ km/s}$

Damit erhält man $\tan \sigma = \frac{v}{c} = \frac{30}{300000} = 10^{-4}$.

Damit $\sigma = 20,6''$ und zwar gleich für alle Fixsterne unabhängig von ihrer Entfernung.



- Im Verlauf der Jahre **1837/38** gelang dem Königsberger Mathematiker und Astronom **Friedrich Wilhelm Bessel** erstmals die Messung einer Sternparallaxe. Am Stern 61-Cygni (also im Sternbild Schwan) hat er eine jährliche **Parallaxe** der Größe $0,3''$ (also $0,3$ Winkelsekunden!) mit einem maximalen Fehler von $\pm 0,02''$ nachweisen können. Die größte bis heute bekannte Fixsternparallaxe beträgt $0,76''$, das entspricht einer Entfernung des Sterns von $4,3$ Lichtjahren oder $1,32$ parsec. Sie wurde gemessen am Stern α -Centauri. Damit war der letzte und entscheidende Einwand gegen die Bahnbewegung der Erde ausgeräumt. F.W. Bessel hat diesen Erfolg erst nach jahrzehntelangem Bemühen und Messen feiern können.
- Seit Entdeckung des **Doppler-Effekts** (nach dem österreichischen Physiker Christian Doppler 1803 – 1853) und der Spektralanalyse hat man die **Spektrallinien von Fixsternen** systematisch untersucht. Dabei hat man für Sterne in der Ebene der Ekliptik jahreszeitlich unterschiedliche Frequenzverschiebungen (einmal nach blau, einmal nach rot) festgestellt, je nachdem sich die Erde auf die Sterne zu bzw. von ihnen weg bewegt.

d) Die Keplerschen Planetengesetze

Die Bewegung der Erde um die Sonne folgt allgemeinen physikalischen Gesetzen, die zuerst der deutsche Astronom **Johannes Kepler** (geb. 1571 in Weil der Stadt; gest. 1630 in Regensburg) gefunden hat und die später mit Hilfe der mechanischen Grundgesetze von Isaac Newton aus dem Gravitationsgesetz hergeleitet werden konnten. Unter Ausnutzung der Beobachtungen von **Tycho de Brahe** zu Anfang des 17. Jahrhunderts hat Kepler seine berühmten drei Planetengesetze entdeckt und in seiner „Astronomia nova“ im Jahr 1609 veröffentlicht:

1. Keplergesetz (Ellipsengesetz)

Die Planeten (wozu auch die Erde gehört) bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplergesetz (Flächensatz)

Die Geschwindigkeit der Planeten ist nicht gleichmäßig, sondern es gilt der Flächensatz: Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächenstücke.

3. Keplergesetz (Umlaufzeiten und Sonnenentfernung)

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne.

Damit hatte Kepler gleich mit drei Tabus der überkommenen Naturphilosophen gebrochen:

- Erstens mit dem *geozentrischen System*. Kepler setzte – in Übernahme von Kopernikus' Theorie – die Sonne ins Zentrum des Systems.
- Zweitens mit dem Postulat der „vollkommensten aller möglichen Bahnen“, nämlich der *Kreisbahn* für die Himmelskörper. Auf Grund der Untersuchungen an den sehr sorgfältigen Beobachtungen der Marsbahn durch Tycho Brahe kam Kepler zu dem Schluss, dass es sich nur um eine Ellipsenbahn handeln kann und keinesfalls um eine Kreisbahn.
- Drittens verwarf er die Forderung der *Gleichmäßigkeit der Bewegung*, indem er die Konstanz der Geschwindigkeit durch den Flächensatz ersetzte. Eine Konsequenz des Flächensatzes ist es, dass die Bewegung der Erde in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne verläuft.

e) Newtons Gravitationsgesetz:

Keplers Gesetze konnten nach Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch **Isaac Newton** (1643 – 1727) – veröffentlicht in seiner „Philosophia naturalis principia mathematica“ im Jahre 1687 – glänzend bestätigt werden. Sie ergaben sich als Konsequenz aus der Newtonschen Mechanik. Beispielhaft und vereinfacht für eine Kreisbahn soll dies am Flächensatz gezeigt werden:

Die Kraft, die die Planeten auf ihre Bahn zwingt, ist die Massenanziehung (Gravitationskraft) durch die Sonne. Es gilt Newtons Gravitationsgesetz: $F = f * \frac{m * M}{r^2}$.

Dabei ist f die Gravitationskonstante, m die Planetenmasse, M die Sonnenmasse und r der Abstand der Sonne vom Planeten. Unter dem Einfluss einer solchen „Zentralkraft“ entsteht eine *ebene* Bahn und zwar stets ein Kegelschnitt, in der Regel eine Ellipsenbahn. Diese Behauptung lässt sich mit ein wenig Vektorrechnung leicht mathematisch beweisen. Man findet in der Physik noch viele solcher Beispiele von Zentralkräften und entsprechenden Bahnen (z. B. Hyperbeln bei der Rutherfordstreuung, bei der Atomkerne mit α -Strahlen, das sind Heliumatomkerne, beschossen werden).

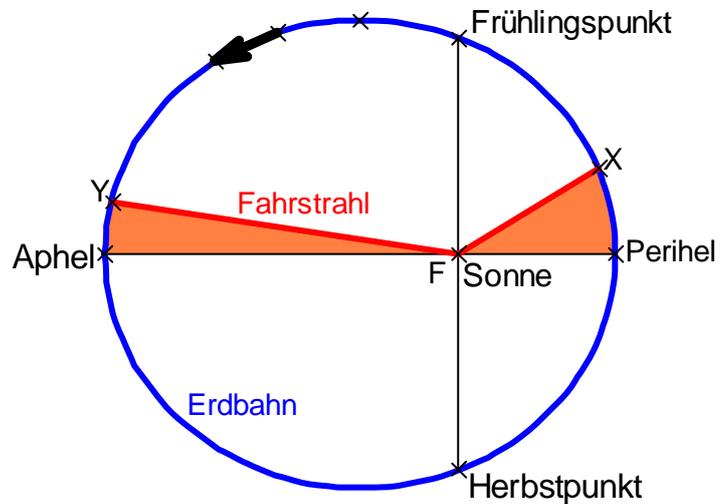
Um einen Körper der Masse m auf eine Kreisbahn mit Radius r und mit konstanter Geschwindigkeit v zu zwingen ist eine Zentripetalkraft in Richtung zum Mittelpunkt hin von der Größe $F = m * v^2 / r$ erforderlich. Im Falle der Planetenbewegung ist dies genau die Anziehungskraft der Sonne, also gilt $\frac{m * v^2}{r} = f * \frac{m * M}{r^2}$.

Nun ist jedoch die Geschwindigkeit $v = 2 * \pi * r / T$, wenn T die Umlaufzeit ist.

Damit erhält man $\frac{r^3}{T^2} = \frac{f * M}{4 * \pi^2}$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Konstante, also unabhängig von der Planetenmasse m und dessen Sonnenentfernung r . Daher

ist das Verhältnis r^3/T^2 für alle Planeten um die Sonne konstant dasselbe und das ist die Behauptung des dritten Keplergesetzes. Mit Kepler und Newton wurde ein neues Kapitel in der Astronomie – und allgemein in der Physik – eingeläutet.

Mit der nebenstehenden Skizze wollen wir die Aussage des zweiten Keplergesetzes, den Flächensatz, erläutern: Die Erde umläuft auf ihrer Bahn vom Perihel (sonnennächster Punkt) über den Frühlingspunkt sowie über das Aphel (sonnenfernster Punkt) und den Herbstpunkt die Sonne, die im Brennpunkt F der Ellipsenbahn steht. Der Fahrstrahl ist die Verbindungsstrecke von der Sonne zur Erde, also z. B. F-Perihel bzw. F-X bzw. F-Y bzw. F-Aphel. Der



Flächensatz besagt, dass dieser Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Wenn also die farbigen Flächenstücke F-X-Perihel und F-Y-Aphel gleich groß sind, dann durchläuft die Erde die beiden Bahnteile Perihel - X und Y - Aphel in der gleichen Zeit. Das hat zur Folge, dass die Bahngeschwindigkeit der Erde in Sonnennähe größer ist als in Sonnenferne. Das heißt der längere Bogen Frühlingspunkt - Aphel - Herbstpunkt wird langsamer durchlaufen als der kürzere Bogen Herbstpunkt - Perihel - Frühlingspunkt. Es ist nun die Frage, welcher von beiden Bögen das Sommer- und welcher das Winterhalbjahr beschreibt. Die Frage ist rasch geklärt, wenn man die Länge der entsprechenden Jahreszeiten bestimmt. Das Sommerhalbjahr vom 21. März bis 23. September hat 186 Tage und das Winterhalbjahr vom 23. September bis zum 21. März nur 179 Tage. Dass es im Sommer (auf der Nordhalbkugel) wärmer ist als im Winter liegt also nicht etwa daran, dass zu dieser Jahreszeit die Erde näher bei der Sonne steht, genau das Gegenteil ist der Fall. Die Jahreszeiten haben eine ganz andere Ursache nämlich die Neigung der Ekliptik gegenüber der Erdachse. Die Erdachse steht nicht senkrecht auf der Bahnebene der Erde, sondern sie bildet mit dieser einen Winkel von $66,5^\circ (= 90^\circ - 23,5^\circ)$.

f) Daten zur Erdbahn

- Schiefe der Ekliptik (Neigungswinkel der Ekliptik gegen Äquatorebene) $i = 23^\circ 27'$.
- Perihelabstand der Erde von der Sonne: 147,1 Mio km.
- Aphelabstand der Erde von der Sonne: 152,1 Mio km.
- Astronomische Einheit = große Halbachse der Bahnellipse $a = 149,6$ Mio km.
- Bahngeschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{1 \text{ Jahr}} = 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.
- Umlaufdauern:

Das **siderische Jahr** ist der Zeitraum zwischen zwei gleichen Positionen der Sonne bezüglich der Fixsterne, also z. B. von Spica zu Spica.

Siderisches Jahr $T_{\text{sid}} = 365,25636 \text{ d} = 365 \text{ d } 6 \text{ h } 9 \text{ m } 10 \text{ s}$.

Das **tropische Jahr** ist der Zeitraum zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt. Da dieser langsam westwärts wandert (Präzessionsbewegung), ist das tropische Jahr (tropos = Wende) etwas kürzer als das siderische Jahr:

Tropisches Jahr $T_{\text{trop}} = 365,2422 \text{ d} = 365 \text{ d } 5 \text{ h } 48 \text{ m } 46 \text{ s}$.

Die Nachkommastellen dieser Jahreslänge sind Anlass für unsere Schaltjahresregelung: Durch Einschub eines Schalttages alle 4 Jahre verlängert sich das Kalenderjahr um $\frac{1}{4}$ Tag, beträgt also 365,25 Tage. Lässt man in jedem vollen Hunderterjahr den Schalttag wieder ausfallen, so verkürzt sich das Jahr um $\frac{1}{100}$ Tag, beträgt also 365,24 Tage. In jedem vollen durch 400 teilbaren Jahr behält man den Schalttag jedoch wieder bei. Damit verlängert sich das Jahr um $\frac{1}{400}$ Tag, beträgt also genau 365,2425 Tage. Das kommt dem Wert des tropischen Jahres schon sehr nahe und bedeutet nur noch eine Abweichung von 1 Tag alle 3000 Jahre.

Die **Präzession des Widderpunktes** infolge der Präzession der Erdachse um den Ekliptikpol (im Sternbild Drache) hat bereits Hipparch (190 – 125 vor Christus) entdeckt. In 26 000 Jahren macht der Himmelsnordpol eine volle Umdrehung um den Ekliptikpol. Dadurch verschiebt sich der Frühlingspunkt rückläufig, also westwärts, auf dem Äquator und zwar in 26 000 Jahren einmal herum. Die Verschiebung beträgt 360° in rund 26000 Jahren, d. h. ca. 30° in 2000 Jahren, also seit Hipparchs Zeiten ziemlich genau um ein Tierkreiszeichen bis heute oder um $1,5^\circ$ in 100 Jahren oder um ca. $50''$ pro Jahr. Der Himmelsnordpol HNP kreist also in 26 000 Jahren einmal voll um den Ekliptikpol. In ca. 13 000 Jahren wird daher nicht mehr α -Ursae minoris sondern α -Lyrae (d. i. der Stern Wega) den Himmelsnordpol markieren d. h. Polarstern sein, denn Wega liegt dem heutigen Polarstern bezüglich des Ekliptikpols ziemlich genau gegenüber. Zur Zeit Hipparchs lag der Frühlingspunkt im Sternbild Widder (daher das Zeichen Υ für den Frühlingspunkt), während er heute um ca. 30° weiter westwärts im Sternbild Fische liegt. Hamal, der Hauptstern im Widder, hat heute die Sternkoordinaten $\alpha = 2\text{h } 5\text{m}$ (und $\delta = 23^\circ 19'$), liegt also weit entfernt vom Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Äquator.

g) Woher kommen die Jahreszeiten?

Die Achse der Erdrotation (Erdachse) steht senkrecht auf der Äquatorebene. Die Bahnebene der Erdbewegung um die Sonne, also die Ebene der Ekliptik, ist jedoch gegen die Äquatorebene um $23,5^\circ$ geneigt. Diese „**Schiefe der Ekliptik**“ hat Auswirkungen auf die Erde, sie bewirkt die Erscheinung unterschiedlicher Jahreszeiten an verschiedenen Teilen der Erde. Machen wir uns das Folgende klar: Ein Stern mit fester Deklination hat jahraus jahrein dieselbe Tagesbahn, dieselbe Länge seines Tagbogens, dieselben Auf- und Untergangspunkte und dieselbe Kulminationshöhe. Nur die Auf- und Untergangszeiten verschieben sich, weil wir im täglichen Leben die Sonnenzeit und nicht die Sternzeit zu Grunde legen. Ganz anders verhält sich die Sonne, die bei ihrem Durchlauf des Tierkreises im Lauf eines Jahres ihre Deklination zwischen $+23,5^\circ$ und $-23,5^\circ$ wechselt. Wir machen uns dies zunächst für den Fall unserer Breite ($\varphi = +50^\circ$) klar.

- Die Kulminationshöhe eines Gestirns mit der Deklination δ beträgt $h = 90^\circ - \varphi + \delta$. Die maximale Kulminationshöhe bei Sommersonnwende ($\delta = 23,5^\circ$) beträgt $63,5^\circ$, die minimale bei Wintersonnwende ($\delta = -23,5^\circ$) jedoch nur $16,5^\circ$, das ist ein gewaltiger Unterschied für die Bestrahlung.

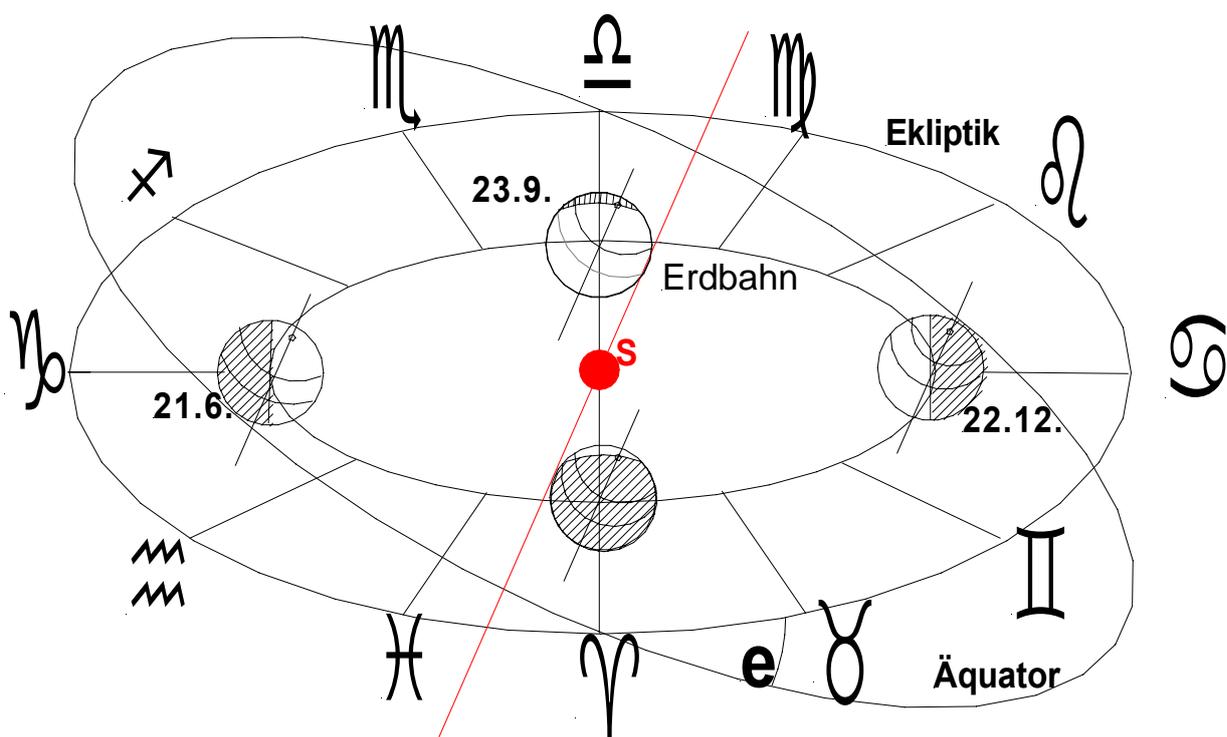
- Die Länge des halben Tagbogens T ergibt sich aus $\cos T = -\tan \delta \cdot \tan \varphi$.
Im Falle der Sommersonnwende erhält man die Taglänge, also die Dauer der Sonneneinstrahlung in unserer Breite, zu 16 Stunden, im Fall der Wintersonnwende nur zu 8 Stunden, ein gewaltiger Unterschied.

Die Jahreszeiten auf verschiedenen Breiten der Erde sind also nicht eine Folge der verschiedenen Entfernungen von der Sonne auf Grund der Ellipsenbahn, sondern Resultat der Schiefe der Ekliptik gegenüber der Äquatorebene. Sowohl die Einstrahlung (Sonnenhöhe) als auch die Bestrahlungsdauer (Tagbogen) variieren im Verlauf eines Jahres gravierend und erklären die Jahreszeiten Frühling, Sommer, Herbst und Winter.

Auch die Erscheinung der „**Wendekreise**“ auf $+23,5^\circ$ bzw. $-23,5^\circ$ Breite hat ihre Erklärung in der Schiefe der Ekliptik: Für alle Orte zwischen den beiden Wendekreisen – also auch am Äquator selbst – gibt es zwei Tage im Jahr, an denen die Sonne ihren Höchststand im Zenit einnimmt, also im Zenit kulminiert. An den Wendekreisen selbst ist dies an genau einem Tag im Jahr der Fall. Man kann dies sehr schön mit Hilfe des Wasserglobus demonstrieren.

Auch die **Polarkreise** und die Erscheinungen von **Polartag** und **Polarnacht** haben ihre Erklärung in der Schiefe der Ekliptik (Demonstration am Wasserglobus und am Globus-Modell „Planet Erde“): An den Polen gehört die Sonne ein halbes Jahr lang zu den „zirkumpolaren“ Sternen, geht also niemals unter (Polartag) und ein halbes Jahr lang zu den „unsichtbaren“ Sternen, geht also ein halbes Jahr lang gar nicht auf (Polarnacht). An den Polarkreisen tritt diese Erscheinung nur an einem Tag des Jahres auf und an allen Orten innerhalb der Polarzone (also nördlich des nördlichen und südlich des südlichen Polarkreises) hat man eine gewisse Zeit des Jahres Polartag bzw. Polarnacht. Bekannt ist dieses Phänomen unter dem Begriff „Mitternachtssonne“, also der Möglichkeit auch die „untere Kulmination“ der Sonne auf ihrer Tagesbahn oberhalb des Horizonts beobachten zu können.

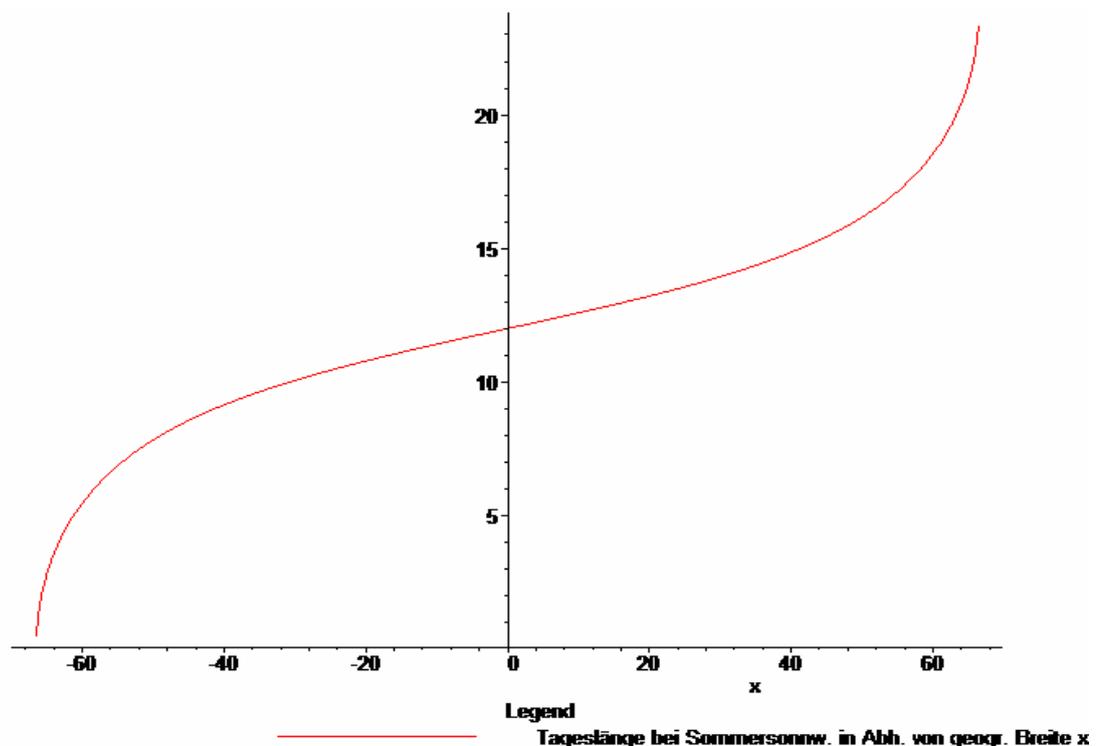
Das Zustandekommen der Jahreszeiten



h) Demonstrationsversuche zu den Jahreszeiten

- Am Wasserglobus kann man die verschiedenen Stellungen der Sonne auf der Ekliptik im Verlauf eines Jahres und die Folgen für die Tag- bzw. Nachtlänge bei verschiedenen geografischen Breiten sehr anschaulich zeigen: Winterhalbjahr, Sommerhalbjahr, Äquinoktien, Tagesdrehung, Polartag, Polarnacht, Mitternachtssonne, Dämmerungsdauern etc.
- Es gibt im Handel einen Globus („Planet Erde“), der die Beleuchtungsverhältnisse einschließlich des Sonnenstands im Zenit für beliebige Daten des Jahres markiert. Mit diesem Globus können die oben beschriebenen Erscheinungen ebenfalls sehr eindrücklich veranschaulicht werden.
- Ein einfaches Modell besteht aus einer Lampe (für die Sonne), einem Tischtennisball (als Erde) mit durchgestecktem Schaschlikstab (für die Achse) und einer horizontalen Ekliptikebene. Daran kann man die Erscheinung der Jahreszeiten sehr gut demonstrieren. Auf unseren Breiten ergibt sich als größte Tageslänge 16 h und als kürzeste 8 h.

Die nachfolgende Grafik zeigt, wie sich die Länge des Tagbogens der Sonne (in Stunden) bei der Sommersonnwende ($\delta = 23,5^\circ$) in Abhängigkeit von der geografischen Breite b ändert. Im Sommer nimmt die Taglänge mit zunehmender Nordbreite zu (im Winter ab). Hat die Sonne die Deklination $\delta = 0^\circ$, also an den Äquinoktien, dann ist die Länge des Tagbogens unabhängig von der geografischen Breite überall gleich groß, nämlich 12 Stunden.

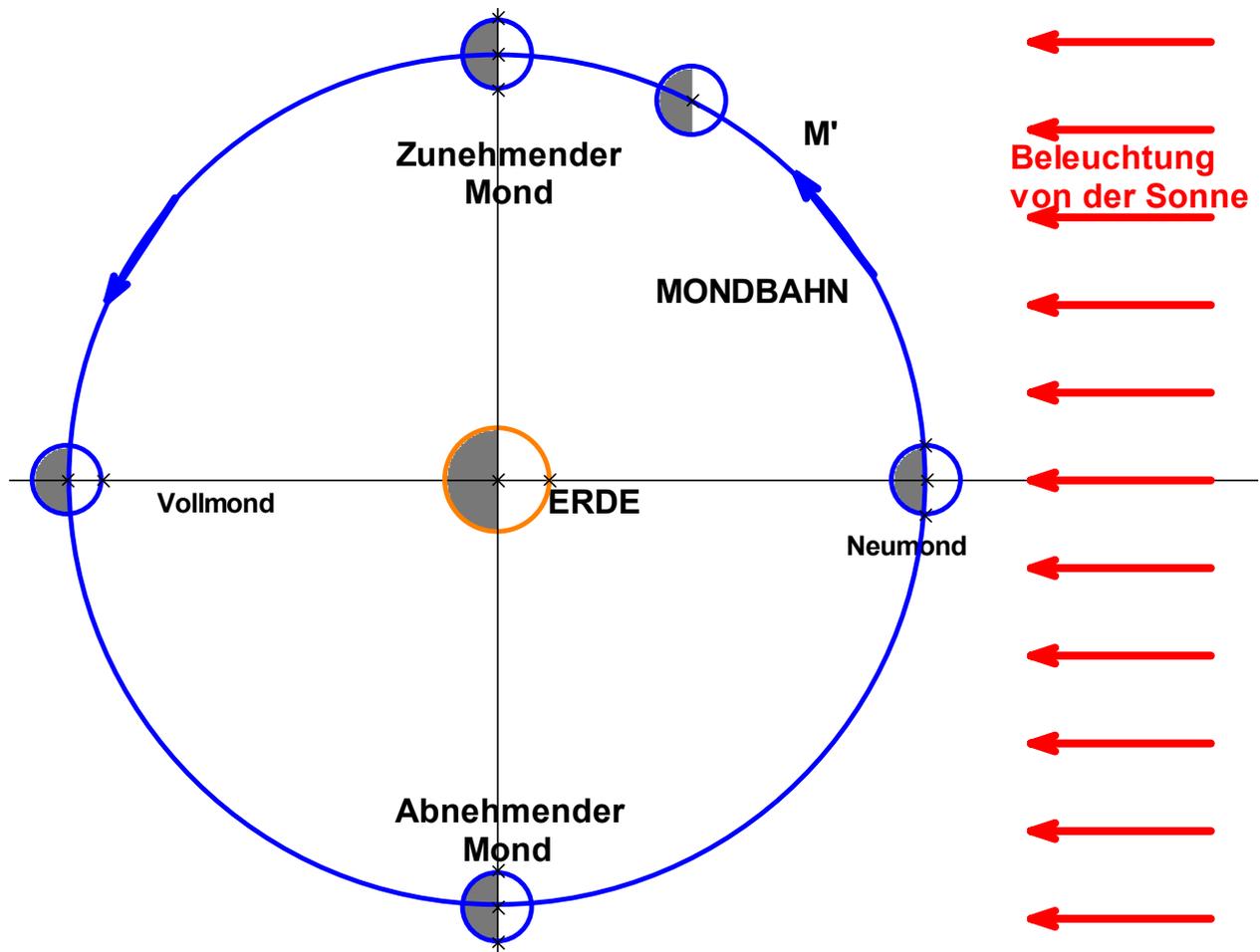


Länge des Tagbogens der Sonne in Abhängigkeit von der geografischen Breite b

6. Der Mond als Erdtrabant

a) Die Mondphasen

Neben der *scheinbaren Tagesdrehung* der Gestirne von Ost nach West (als Folge der Erdrotation um ihre eigene Achse von West nach Ost) nimmt der Mond selbstverständlich auch an der scheinbaren *Jahresbahn* durch die Ekliptik (als Folge der Erdbahnbe-
 wegung um die Sonne) teil. Dieser Effekt wird jedoch überdeckt durch einen in seiner
 Auswirkung wesentlich stärkeren, die **Bahnbewegung des Mondes um die Erde**. Der
 Mond umläuft die Erde in etwa einem Monat ostwärts, d. h. er bewegt sich von Tag zu
 Tag um ca. 13° (etwa 25 Vollmondbreiten) auf der Ekliptik ostwärts. Infolgedessen ver-
 schieben sich Auf- und Untergangszeiten sowie die Kulmination täglich um ca. 50 Minu-
 ten verspätet. Da seine Bahn nur wenig (nur um etwa 5°) gegen die Ekliptik geneigt ist,
 verläuft die Mondbahn ziemlich genau entlang der Ekliptik. Die Sternbilder, in denen der
 Mond zu sehen ist, sind also ziemlich genau die 12 Sternbilder des Tierkreises. Auffäl-
 ligste Symptome dieser Bewegung sind die so genannten **Mondphasen**: Vollmond, ab-
 nehmender Mond, Neumond und zunehmender Mond. Ihre Entstehung wird durch die
 nachfolgende Skizze erklärt. Beim Umlauf des Mondes um die Sonne sind je nach Stel-
 lung verschiedene von der Sonne beleuchtete bzw. nicht beleuchtete Teile des Mondes
 der Erde zugewandt und daher sichtbar bzw. unsichtbar. Der Mond selbst leuchtet nicht,
 sondern zeigt nur seine von der Sonne beleuchteten Teile.



b) Siderischer und Synodischer Monat

Die **siderische Umlaufdauer** des Mondes um die Erde beträgt 27 d 7 h 43 min 11,6 s das sind etwa 27,32 Tage. Das bedeutet, wenn der Vollmond z. B. genau im Stundenkreis des Frühlingspunkts (oder irgend einem anderen Sternort) steht, dauert es exakt 27,32 Tage bis der Mond das nächste Mal wieder diesen Stundenkreis quert. Allerdings hat sich bis dahin die Sonne um fast 30° auf der Ekliptik weitergedreht und deshalb zeigt sich der Mond noch nicht wieder ganz als Vollmond. Es dauert weitere zwei Tage, bis der Mond wieder in Oppositionsstellung zur Sonne gelangt, also seine Vollphase zeigt. Diese Zeitdauer von genau 29 d 12 h 44 min 2,9 s oder etwa 29,53 Tagen von Vollmond bis zum nächsten Vollmond nennt man im Unterschied zum siderischen Monat, den **synodischen Monat**. Der **siderische Monat** bezieht sich also auf die Stellungen des Mondes zum Fixsternhimmel, der **synodische Monat** dagegen auf die Erscheinungen (Phasen).

Zwischen der Dauer T eines Erdjahres, der synodischen Umlaufzeit T_{syn} und der siderischen Umlaufzeit T_{sid} besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{1}{T_{\text{sid}}} = \frac{1}{T_{\text{syn}}} + \frac{1}{T}$$

Wir leiten diese Beziehung aus der nebenstehenden Skizze ab:

In der Stellung E_0 und M_0 haben wir genau Vollmond. Nach einem *siderischen* Umlauf des Mondes hat er die Stellung M_1' erreicht. Inzwischen ist jedoch die Erde auf ihrer Bahn weitergewandert bis zur Stellung E_1 .

Der Mond muss also noch den Bogen $M_1'M_1$ durchlaufen, bis wieder exakt Vollmond ist, also ein *synodischer* Monat vergangen ist.

Nun gelten folgende Beziehungen:

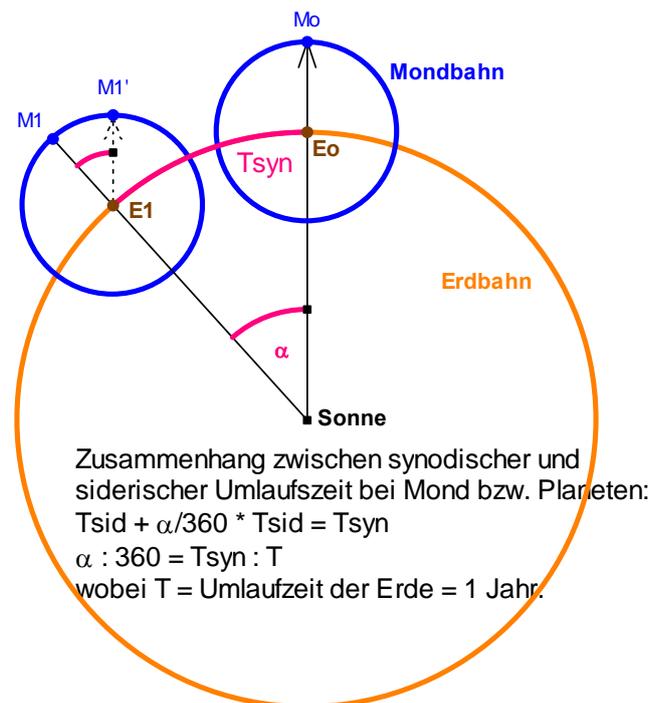
$$(1) \quad T_{\text{sid}} + \frac{\alpha}{360} * T_{\text{sid}} = T_{\text{syn}}$$

$$(2) \quad \frac{\alpha}{360} = \frac{T_{\text{syn}}}{T}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division der Gleichung (1) durch $T_{\text{sid}} * T_{\text{syn}}$ und unter Benutzung von (2) die obige Beziehung. (Diese Beziehung gilt sinngemäß auch für die Planeten).

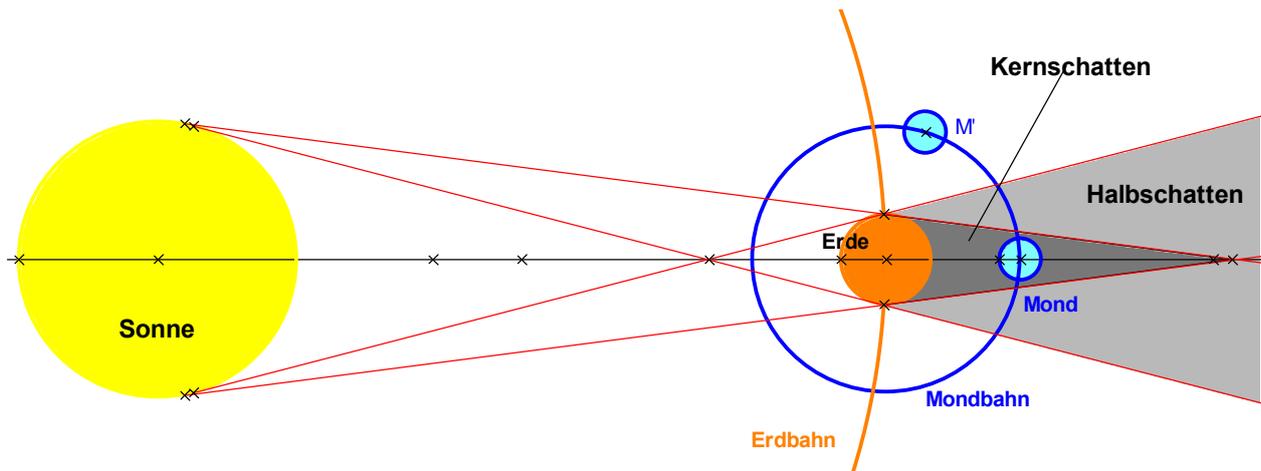
c) Finsternisse

Finsternisse kommen zustande, wenn **Erde, Sonne und Mond genau in einer geraden Linie stehen**, d. h. nur in den Zeiten von Voll- bzw. Neumond. Warum gibt es aber nicht jeden Monat zwei Finsternisse, eine Sonnenfinsternis bei Neumond und eine

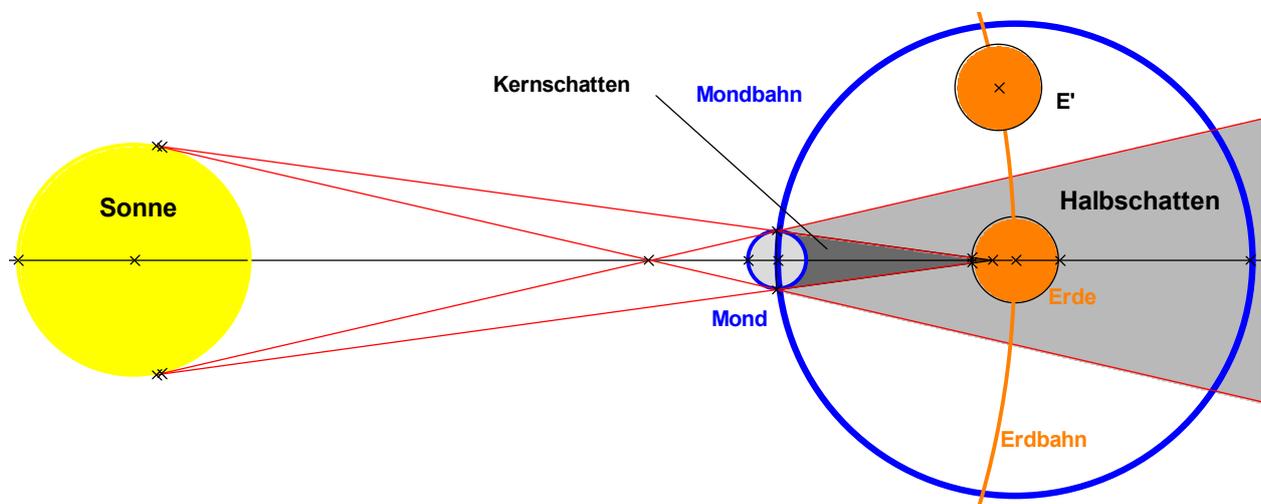


Mondfinsternis bei Vollmond? Dies liegt im Wesentlichen daran, dass die Mondbahn um 5° gegen die Erdbahn (Ekliptik) geneigt ist und deshalb der Mond in Konjunktions- bzw. in Oppositionsstellung zur Sonne meist nicht *in* der Ekliptikebene liegt, sondern daneben. Nur wenn *Vollmond* bzw. *Neumond* auf einem *Knotenpunkt* der Mondbahn (= Schnittpunkt mit der Ekliptik) eintritt, kann es eine Finsternis geben. Daher rührt auch der Name „Ekliptik“, denn das griechische Wort ***Ekliipsis*** bedeutet *Verfinsternung*.

Wie die nachfolgende Skizze zeigt, ist eine ***Mondfinsternis*** (partiell oder total) von jedem Punkt der Erde aus (natürlich nur von der Nachtseite aus, von der man den Vollmond sieht) beobachtbar. Sie kann nur dann stattfinden, wenn sich der Mond bei Vollmond in einem Knoten der Mondbahn befindet.



Ganz anders dagegen die ***Sonnenfinsternis***. Sie kann nur stattfinden, wenn Mond bei Neumond in einem Knoten der Mondbahn steht. Diese Finsternis ist nur von einem sehr begrenzten schmalen Streifen auf der Erde aus beobachtbar, den der Schatten des Neumondes auf die Erdoberfläche wirft. Je nach Entfernung des Mondes von der Erde kann die Sonnenfinsternis total oder nur ringförmig werden. Reicht der Kernschatten bis zur Erde (falls der Mond beim Perigäum ist), so ist die Sonnenfinsternis total, ist dies nicht der Fall (bei Mondstellung beim Apogäum), so ist sie nur ringförmig. Für die Zone des Halbschattens ist eine Sonnenfinsternis (auch im Falle einer totalen) nur als partielle Bedeckung beobachtbar.



Für die Finsternisse gibt es ebenfalls eine bestimmte Periodizität. Es gilt folgende Beziehung: $223 * T_{syn} = 6\,585,32 \text{ d} = 242 * T_{drak} \approx 18 \text{ Jahre (Saroszyklus)}$.

Nach 18 Jahren hat man also bezüglich der Mondphasen und der Knotendurchgänge die gleiche Situation, also eine Periodizität der Finsternisse.

Eine der ersten Finsternisse, die auf Grund von Beobachtungen vorausgesagt werden konnte, wird vom griechischen Geschichtsschreiber *Herodot* berichtet. Nach seinem Bericht habe *Thales von Milet* im Jahr 585 vor Christus eine Sonnenfinsternis vorausgesagt.

d) Daten zum Mond und zur Mondbahn

Durchmesser des Mondes	3 476 km	
Mittlerer Erdbstand	384 400 km (max. 406 740 km; min. 356 410 km)	
Bahngeschwindigkeit	1,023 km/s	
Neigung zur Ekliptik	5°9′	
Siderischer Monat	27d 7h 43m 11,6s	= 27, 3217 d
Synodischer Monat	29d 12h 44m 2,9s	= 29, 5306 d
Drakonitischer Monat	27d 5h 5m 35,9s	= 27, 2122 d

Der **drakonitische Monat** ist die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch den gleichen Knoten. Dieser ist etwas kürzer als der siderische Monat, weil die Knotenlinie pro Jahr ca. 20° westwärts zurückwandert, also entgegen der Umlaufrichtung des Mondes. Für einen Umlauf benötigt die Knotenlinie 18,6 Jahre. Dies nennt man den Metonzyklus.

Anomalistischer Monat	27d 13h 18m 33,1s	= 27, 5545 d
-----------------------	-------------------	--------------

Der **anomalistische Monat** ist die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch das Perigäum (erdnächster Punkt). Dieser ist etwas länger als der siderische Monat, weil die Apsidenlinie (= Verbindungslinie zwischen Perigäum und Apogäum) vorwärts schreitet (ostwärts) und zwar rund 40° pro Jahr.

Tropischer Monat	27d 7h 43m 4,7s	= 27, 3216 d
------------------	-----------------	--------------

Der **tropische Monat** ist die Zeit zwischen zwei Durchgängen des Mondes durch den Stundenkreis des Frühlingspunktes. Dieser ist – wegen der Rückläufigkeit des Frühlingspunktes westwärts auf der Ekliptik – etwas kürzer als der siderische Monat.

e) Gezeiten

Eine Folge der Mondbewegung um die Erde ist die Erscheinung der Gezeiten der Meere. Ein durch die Massenanziehung des Mondes gebildeter Flutberg wandert synchron mit dem Mond um die Erde. Gleichzeitig bildet sich auf der dieser Flutwelle gegenüber liegenden Erdseite ebenfalls ein – etwas kleinerer – Flutberg aus, der ebenfalls mitwandert.

f) Zur Krümmung der Mondbahn

Wir vergleichen die Gravitationskräfte, die die Erde bzw. die Sonne auf den Mond ausüben. Der Faktor ($f \cdot m$) aus dem Gravitationsgesetz ist in beiden Fällen derselbe, also ist M/r^2 für Erde und Sonne bezüglich des Mondes zu untersuchen. Die Sonne hat etwa die 332 000 -fache Erdmasse. Der Sonnenabstand ist etwa das 400 -fache der Erdentfernung des Mondes. Also folgt, dass der Faktor M/r^2 für die Sonne immer noch etwa doppelt so groß ist, wie für die Erde:

$$F_s : F_e = M_s/M_e \cdot (D_e/D_s)^2 = 0,33 \cdot 10^6 \cdot (1/400)^2 \approx 2.$$

Daher ist die Gravitationswirkung der Sonne für die Bahn des Mondes dominant gegenüber der der Erde. Die Bahn ist daher ständig konkav zur Sonne gekrümmt. Der Mond „eiert“ also nur durch leichte Krümmungsveränderungen seiner Bahn um die Sonne auch um die Erde.

g) Mondentfernung

Woher kennt man die Entfernung des Mondes von der Erde?

Eine erste Methode zum Vergleich der Sonnen- und Mondentfernung stammt von **Aristarch von Samos** (ca. 320 - 250 v. Chr.). Er schloss aus der Stellung von Erde, Sonne und Mond bei exaktem Halbmond auf ein Entfernungsverhältnis von 1: 20 zwischen Mond- und Sonnenentfernung. Aristarch hat übrigens ebenfalls versucht, den scheinbaren Sonnendurchmesser zu bestimmen und dafür den Wert 3° ermittelt. In Wirklichkeit beträgt er jedoch nur etwa $0,5^\circ$.

Einen zweiten Anhaltspunkt gibt das Auftreten totaler Sonnenfinsternisse bzw. die Tatsache, dass uns die Scheibe des Vollmonds genau so groß erscheint wie die der Sonne. Es muss deshalb die folgende Proportion gelten:

$$D : d = E : e = 150\,000\,000 : 360\,000 = 400 : 1.$$

Also ist der von Aristarch ermittelte Wert von 20 : 1 um Größenordnungen falsch.

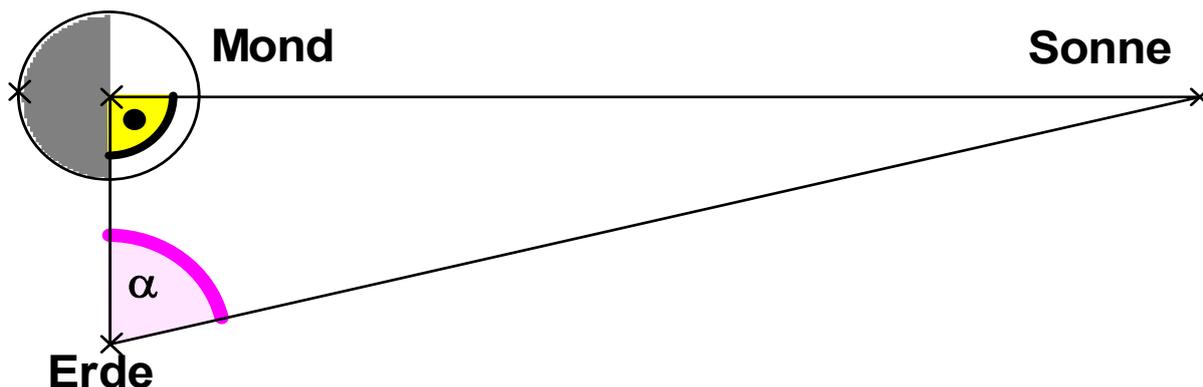
Eine vermessungstechnische Glanztat vollbrachten die Mathematiker **Lacaille** und **Lalande**, als sie im Jahr 1752 die Zenitabstände des Mondes gleichzeitig in Berlin (geogr. Breite $52,52^\circ$) und in Kapstadt (geogr. Breite $-33,93^\circ$) gemessen haben und zwar zu $32,08^\circ$ und zu $55,72^\circ$ (siehe Anhang). Daraus konnten sie den Wert der Mondentfernung durch trigonometrische Rechnung bestimmen.

Heute benutzt man entweder ein Radarecho (z. B. mit Wellenlängen von ca. 3 m) oder ein Laserecho, für das man die Zeit bis zur Rückkehr des reflektierten Signals misst. Man erhält $t = 2,56$ Sekunden, also ist der Mond circa 1,28 Lichtsekunden oder rund 380 000 km entfernt.

7. Das Planetensystem der Sonne

a) Historische Bemerkungen

Über lange Zeit war das Weltbild der Menschen bestimmt durch die Dominanz der Phänomene. Die Welt ist so, wie sie sich zeigt: Über einer flachen Scheibe wölbt sich wie eine Käseglocke die Himmelskugel, die sich täglich einmal dreht. Das ist ein vollkommen *geozentrisches* System. Dieses Ptolemäische Weltsystem war die allgemein anerkannte Lehre bis fast zur Renaissance, festgeschrieben vor allem in dem mehr als 1500 Jahre gültigen Kanon des **Claudius Ptolemäus** (ca. 90 - 160 n. Chr. in Alexandria) dem **Almagest** (arabisch: große Zusammenstellung). Der Almagest enthielt u. a. ein Verzeichnis von mehr als 1000 Sternen. Dennoch gab es schon Vorläufer eines *heliocentrischen* Systems. Der wichtigste Vertreter des heliocentrischen Systems war wohl **Aristarch von Samos** (ca. 320 – 250 v. Chr.), der u. a. eine Abschätzung des Verhältnisses der Erdentfernungen von Sonne und Mond versuchte. Dazu betrachtete er die Situation genau bei Halbmond, wenn also Erde-Mond und Mond-Sonne zueinander senkrecht stehen. Misst man in dieser Situation den Winkel Sonne-Erde-Mond, so kann man das Entfernungsverhältnis bestimmen.



Eine in der Praxis äußerst schwierige - und daher bei Aristarch notwendigerweise ungenaue - „Messung“ ergab $\alpha = 87^\circ$. Damit erhält man mit $\cos \alpha \approx 0,05$ das Verhältnis

Mondentfernung : Sonnenentfernung $\approx 1 : 20$

Lange Zeit waren es die arabischen Gelehrten, die das astronomische Wissen überlieferten und bereicherten. Erst ab dem 16. Jhdt. n. Chr. entstand revolutionär Neues.

Die entscheidende Wende kam mit **Nikolaus Kopernikus** (1473 – 1543), dem ostpreussischen bzw. polnischen Domherren in Frauenburg. Ab dem Jahr 1502 begann er an der Ausarbeitung seines heliocentrischen Systems, das erst posthum in dem Werk „De revolutionibus orbium coelestium“ veröffentlicht wurde. Schon zuvor vertrat er in einem bereits im Jahr 1510 veröffentlichten „Commetariolo“ 7 entscheidende Thesen:

1. Die Kreisbahnen der Himmelskörper haben verschiedene Mittelpunkte.
2. Der Erdmittelpunkt ist zwar der Mittelpunkt der Mondbahn, nicht jedoch der Welt.
3. Die Himmelskörper bewegen sich um die Sonne.
4. Der Fixsternhimmel ist im Vergleich zum Planetensystem unendlich weit entfernt.

5. Die Tagesdrehung des Fixsternhimmels ist nur scheinbar, in Wirklichkeit sind die Erscheinungen nur eine Folge der Erdrotation um ihre eigene Achse.
6. Die Jahresbewegung der Sonne ist nur scheinbar, in Wirklichkeit sind die Erscheinungen nur eine Folge des Erdumlaufs um die Sonne.
7. Die scheinbaren Planetenbahnen entstehen aus deren wirklicher Bewegung und den Bewegungen der Erde.

Kopernikus Werk, obwohl von den meisten Zeitgenossen abgelehnt und von der Kirche bekämpft, leitete eine Wende („Kopernikanische Wende“) nicht nur in der Astronomie, sondern in der gesamten Naturwissenschaft und Philosophie ein, den Beginn des so fruchtbaren Zeitalters der Renaissance. Dennoch war seinen Ideen aus verschiedenen Gründen keine große Resonanz beschied: Einmal fehlten die Beweise (z. B. der Nachweis einer Sternparallaxe) für die Bahnbewegung der Erde und zum anderen lieferten die Berechnungen, die auf seinem System fußten, keine besseren Voraussagewerte als die bisherigen nach der Ptolemäischen Theorie.

Giordano Bruno (1548 – 1600) wurde wegen seines Eintretens für die Kopernikanische Lehre 1600 in Rom öffentlich verbrannt. **Galileo Galilei** (1564 – 1642), ebenfalls ein eifriger Vertreter der Kopernikanischen Lehre, wurde noch 1633 von der Inquisition zum Widerruf seiner Lehren verurteilt. Es hat dann immerhin 360 Jahre gedauert, bis er im Jahre 1992 unter Papst Johannes Paul II. rehabilitiert wurde.

Galileo Galileis Leistungen in der Astronomie bestehen u. a. in den Entdeckungen, die er auf Grund der Benutzung des selbstgebauten Fernrohres (ab 1610) machte: Venusphasen, Jupitermonde, Mondberge, Saturn, Sonnenflecken. Trotzdem stand er Keplers Theorie (und wohl auch dessen Person) leider ablehnend gegenüber.

Christian Huyghens (1629 – 1695) entdeckte den Saturnring, den Saturnmond Titan, er baute leistungsfähige Pendeluhren, vermutete die Erdabplattung und entwickelte vor allem die Wellennatur des Lichts. Insofern war er ein wichtiger Opponent von Newton.

Ein glühender Verfechter der Kopernikanischen Lehre, ein ungemein produktiver und kreativer Wissenschaftler und Weiterentwickler der Astronomie, Physik und Mathematik war der in Weil der Stadt geborene **Johannes Kepler** (1571 – 1630). Seine auf Grund der Beobachtungen von **Tycho Brahe** (1546 – 1601) gefundenen drei Keplerschen Planetengesetze waren bahnbrechend (Ellipsensatz, Flächensatz, Entfernung-Umlaufzeit-Gesetz). Kepler kam auf seine Ergebnisse, weil er einen Fehler von 8' (nur acht winzige Winkelminuten) in den Beobachtungen von Tycho mit der alten Theorie nicht erklären konnte. Er war es, der erstmalig nach der gemeinsamen *physikalischen Ursache* der Bewegungen der Himmelskörper fragte. Diese Frage konnte schließlich **Isaac Newton** (1642 – 1727) mit seinem Gravitationsgesetz und den mechanischen Grundgesetzen beantworten, die er aus den Keplergesetzen abgeleitet hat. Mit der Veröffentlichung von Newtons Hauptwerk „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ im Jahre 1687 war der Durchbruch erreicht und die „Neue Lehre“ setzte sich schnell allgemein durch. Damit war einem der interessantesten Kapitel der Wissenschaftsgeschichte und vielleicht der gesamten Kulturgeschichte der Menschheit ein erster würdiger Abschluss gegeben. Nun konnte man Bahnen der Planeten genau berechnen und die Ursachen ihrer Bewegungen beschreiben. Auf Grund von Berechnungen gemäß der Newtonschen Mechanik fand man schließlich auch die weiteren, im Altertum noch nicht bekannten, Planeten Uranus, Neptun und Pluto sowie die so genannten Planetoiden wie Juno, Pallas, Vesta und Ceres.

b) Die Planeten und ihre Bahnen

Für die Planetenbewegung gelten die drei Keplergesetze (siehe S. 30 f), die sich aus den Newtonschen Gesetzen der Mechanik deduktiv ableiten lassen. Damit konnten Entfernungen genau bestimmt und Bahndaten berechnet werden. Nach ihrer Entfernung von der Sonne folgen die Planeten in der Reihenfolge:

Merkur – Venus – Erde – Mars – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptun – Pluto.

Merkvers (mnemotechnische Hilfe):

„**Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unsere neun Planeten**“

Die meisten Planetenbahnen weichen in ihren Ebenen nur wenig von der Erdbahnebene, ab, so dass die Planeten in der Regel immer nahe der Ekliptik beobachtbar sind. Die Exzentrizität (Abweichung von der Kreisform) ihrer Bahn ist meist gering, nur Merkur und Pluto haben eine beachtliche Exzentrizität von 0,2 bzw. 0,25. Mars hat von den erdnahen Planeten die größte Exzentrizität mit fast 0,1 (welch ein Glück für Tycho Brahe und Kepler). In der folgenden Tabelle sind einige Daten der Planeten zusammengestellt:

Planet	Bahnrad. (Erde=1)	Tsid (Erde=1)	Tsyn (d)	Exzent.	Schiefe zur Ekl.	Masse (Erde=1)	Durchm. in km
Merkur	0,387	0,241	115,9	0,206	7°	0,055	4 878
Venus	0,723	0,615	583,9	0,007	3,5°	0,815	12 104
Erde	1,000	1,000	-	0,017	-	1,000	12 756
Mars	1,524	1,881	779,9	0,093	2°	0,107	6 794
Jupiter	5,203	11,862	398,9	0,048	1°	317,89	142 984
Saturn	9,539	29,458	378,1	0,055	2,5°	95,18	120 536
Uranus	19,191	84,014	369,7	0,047	0,75°	14,54	51 118
Neptun	30,061	164,793	367,5	0,010	1,75°	17,13	49 528
Pluto	39,529	247,7	366,7	0,248	17°	0,026	2 246

c) Erscheinungen der Planeten und ihrer Bahnen

Innere Planeten

Die wesentlichen Erscheinungen der inneren Planeten zeigt die untenstehende Skizze. Da deren Bahnen ganz innerhalb der Erdbahn verlaufen, treten sie von der Erde aus gesehen nie in Oppositionsstellung (gegenüber) zur Sonne auf, sondern immer in Sonnennähe. Statt einer Oppositionsstellung ergibt sich zu der unteren Konjunktion noch eine obere Konjunktion zwischen Sonne und Erde. Der größte Winkelabstand von der Sonne (größte westliche oder östliche Elongation) wird bestimmt durch die Bahnver-

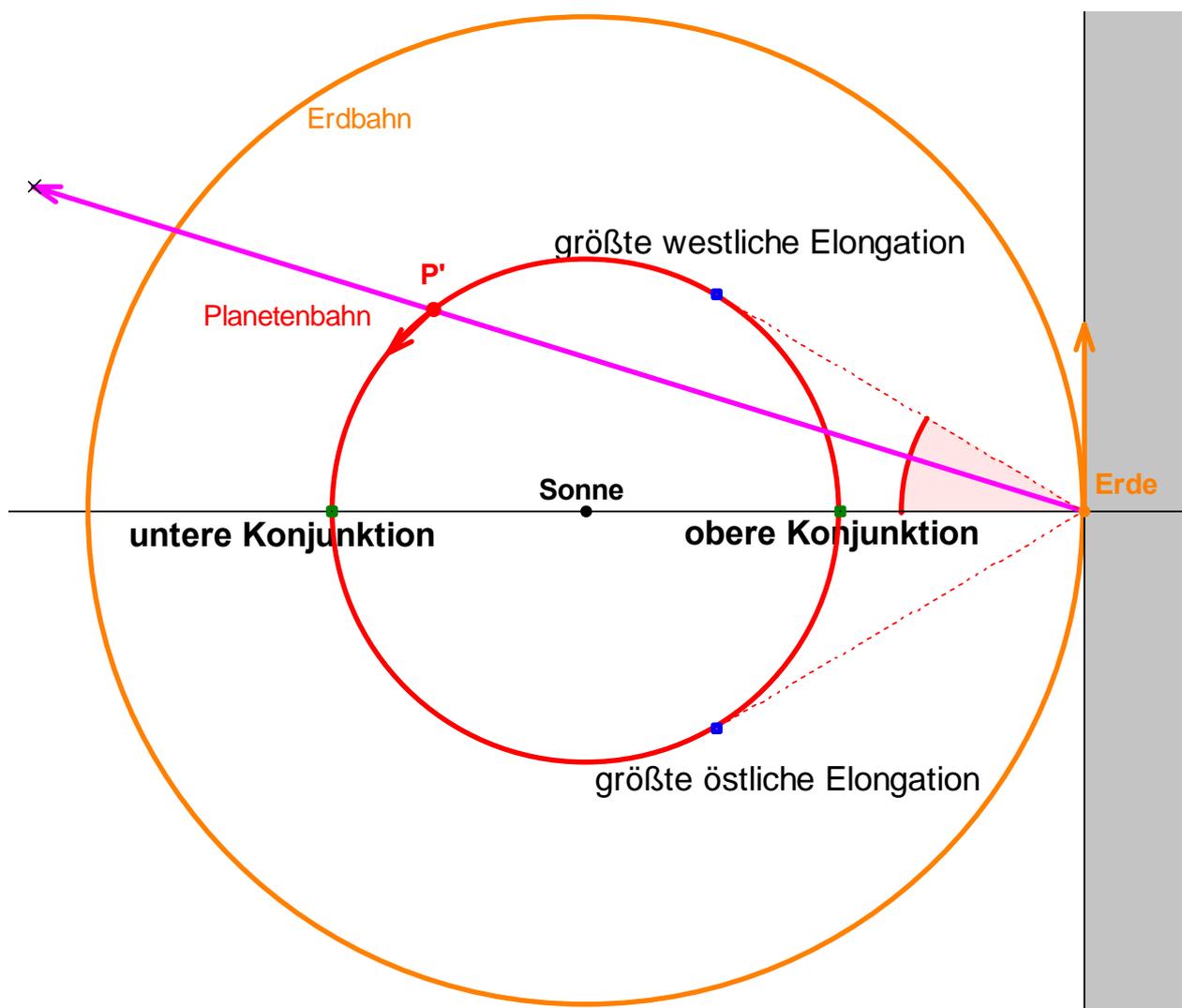
hältnisse. Für die größte Elongation α gilt $\sin \alpha = \frac{\text{Planetenbahnradius}}{\text{Erdbahnradius}}$. Für Merkur er-

hält man die größten Elongationen zwischen 18° und 28° (wegen der starken Exzentrizität) und für Venus ziemlich konstant etwa 46° .

Aus diesem Grund ist Merkur, da immer in Sonnennähe, nur sehr schwer in der Abend- oder Morgendämmerung sehr horizontnah zu beobachten. Viele bedeutende Astronomen vor Erfindung des Fernrohrs haben Merkur nie beobachten können.

Wie der Mond zeigen die inneren Planeten deutliche Phasen (Sichelformen). Die Phasen der Venus hat Galilei mit Hilfe seines Fernrohres etwa um das Jahr 1600 erstmals entdeckt.

Ein spektakuläres und für astronomische Vermessungen äußerst interessantes Phänomen ist der Durchgang eines der inneren Planeten vor der Sonnenscheibe. Man sieht den runden Fleck über die Sonnenscheibe wandern. Aus Zeit- und Ortsmessungen kann man daraus wichtige Rückschlüsse ziehen und genaue Messungen vornehmen.



Wie beim Mond unterscheidet man bei den Planeten verschiedene Umlaufzeiten. Die **siderische Umlaufzeit** bezieht sich auf die Stellung zum Fixsternhimmel, also z. B. von einer Stellung in Richtung Frühlingspunkt bis zur nächsten Stellung in dieser Richtung. Die **synodische Umlaufzeit** bezieht sich auf die *Erscheinungsform* des Planeten, also z. B. von der oberen Kulmination bis zur nächsten oberen Kulmination. Für die inneren

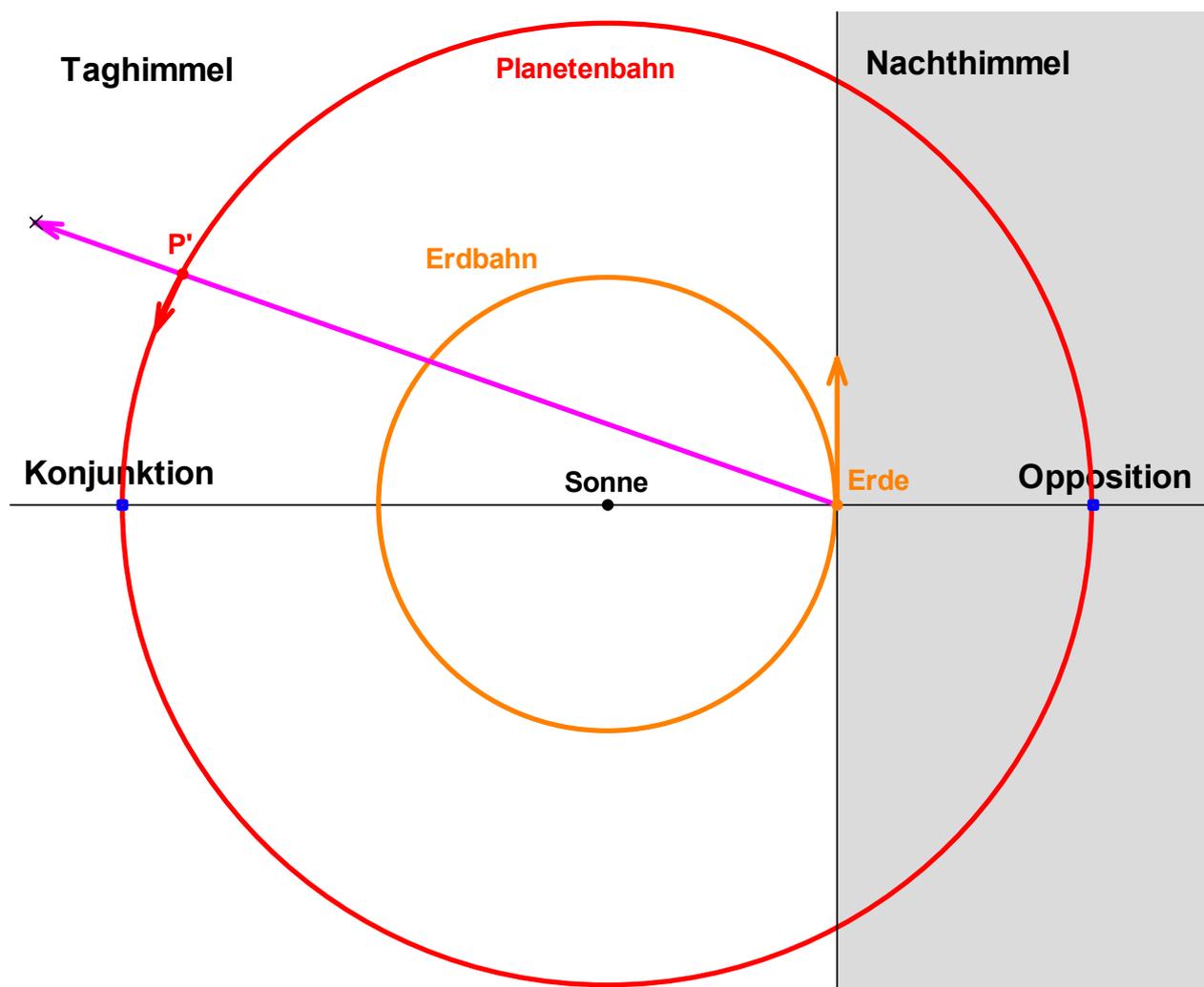
Planeten gilt folgende Beziehung $\frac{1}{T_{\text{sid}}} - \frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T}$, wobei T das Erdjahr bedeutet.

Man kann die Gültigkeit dieser Gleichung leicht mit Hilfe der Werte aus obiger Tabelle nachprüfen.

Äußere Planeten

Die Bahn eines äußeren Planeten (im Vergleich zur Erde) um die Sonne veranschaulicht die folgende Skizze. Es gibt wiederum vier besondere Stellungen: Die (untere) Konjunktion mit der Sonne, die westliche und die östliche Quadratur und die Oppositionsstellung zur Sonne.

In der Oppositionsstellung sind die äußeren Planeten der Erde am nächsten und voll am Nachthimmel beobachtbar.



Auf Grund ihres Umlaufs um die Sonne laufen die Planeten normalerweise - je nach Entfernung langsamer oder schneller - ostwärts auf der Ekliptik, man sagt sie seien „**rechtläufig**“. Auf Grund des schnelleren Umlaufs der Erde um die Sonne, bei dem diese den Planeten gewissermaßen überholt, scheinen die Planeten zeitweise auf der Ekliptik westwärts zu wandern, man sagt sie seien „**gegenläufig**“ oder „**rückläufig**“. Auf diese Weise entstehen die bekannten **Planetenschleifen**, die man bei den „oberen“ oder „äußeren“ Planeten beobachten kann. Im Grunde ist dies dieselbe Erscheinung wie die Parallaxe bei den Fixsternen, eine scheinbare Veränderung des Standorts

auf Grund der Bahnbewegung der Erde. Für die Umlaufzeiten der äußeren Planeten und die Jahreslänge T des Erdjahres gilt die Beziehung $\frac{1}{T_{\text{sid}}} + \frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T}$.

Die Namen der Wochentage sind eng mit Sonne, Mond und Planeten verbunden:

Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn
Sonntag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
Dimanche	Lunedì	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi

Im Jahr 1772 veröffentlichte Bode die Regel von Titius-Bode (1766) für die Planetenabstände von der Sonne: $a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$. Man erhält damit folgende Werte:

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Planetoiden	Jupiter	Saturn
n	$-\infty$	0	1	2	3	4	5
a_n	0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10,0
Messwert	0,387	0,723	1	1,524		5,203	9,539

Dies ergibt eine unglaublich gute Übereinstimmung mit den tatsächlichen Werten wie in der Tabelle zu Anfang des Kapitels. Lange blieb die Lücke zwischen Mars und Jupiter unerklärlich. Genau in diesem Bereich fand man später den Gürtel der Planetoiden (Kleinplaneten wie Juno, Vesta, Ceres, Pallas u. a.).

Ein Triumph der Newtonschen Mechanik war folgende Begebenheit: Im Jahr 1801 hat Piazzi den Kleinplaneten Ceres entdeckt. Man hat ihn jedoch wieder „aus den Augen verloren“, also bei keiner Beobachtung mehr feststellen können. Aus wenigen Bahndaten hat der 24-jährige Carl Friedrich Gauß jedoch in einem Geniestreich die Bahn berechnet und auf Grund dieser Berechnungen wurde Ceres im selben Jahr wieder entdeckt.

Im Jahr 1781 entdeckte Friedrich Wilhelm Herschel den Planeten Uranus.

Im Jahr 1802 haben Olbers u. a. die Kleinplaneten Pallas, Juno und Vesta entdeckt.

Aus beobachteten Störungen der Uranus-Bahn hat Leverrier auf die Existenz eines weiteren Planeten geschlossen und dessen vermutlichen Ort berechnet. Daraufhin entdeckte Galle 1846 den Planeten Neptun.

Der Planet Pluto wurde erst im Jahr 1930 entdeckt.

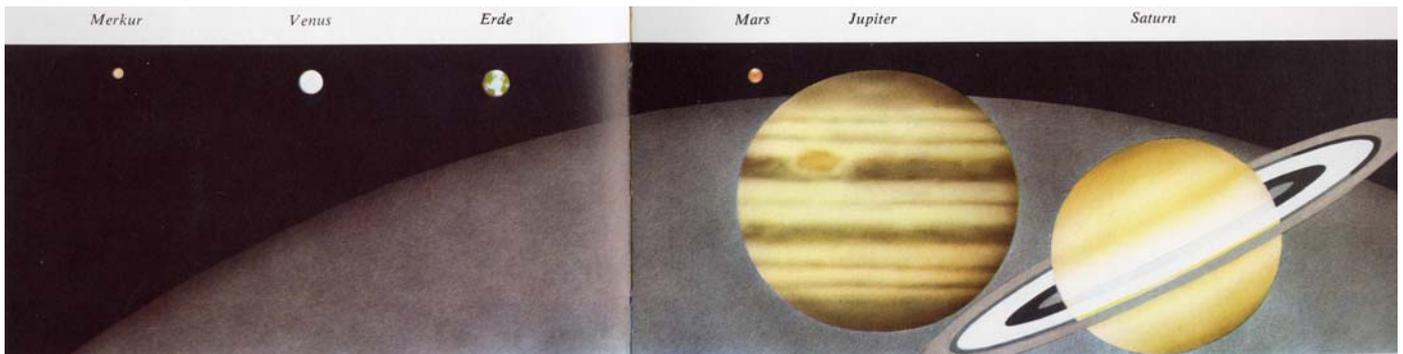
Bedeutende Beiträge zur Astronomie haben die Mathematiker F. Laplace, C. F. Gauß, Leverrier, Newcomb und Jacobi geleistet.

Selbstverständlich sind die Planeten in keiner Sternkarte verzeichnet, weil sie nicht wie die Fixsterne immer am selben Ort des Himmels erscheinen. Daher rührt auch ihr Name

„**Wandelsterne**“. Man erkennt die Planeten am Nachthimmel leicht daran, dass sie mit ruhigem gleichmäßigem Licht leuchten, während die Fixsterne in der Regel funkeln.

Die Venus als hellster der Planeten ist im Volksmund sowohl als „*Abendstern*“ (bei östlicher Elongation) als auch als „*Morgenstern*“ (bei westlicher Elongation) bekannt. Sie ist nach Sonne und Mond mit Abstand das hellste Objekt am Himmel. Der hellste Fixstern dagegen ist Sirius im großen Hund, einer der Sterne des „Wintersechsecks“.

In der folgenden Abbildung sind die Größenverhältnisse von Sonne und Planeten wiedergegeben. Die flache gebogene Linie stellt die Begrenzung des Sonnenkörpers in diesem Maßstab dar.



Vermutlich seit Anbeginn der Menschheit treiben Neugier und Wissensdurst die Menschen an, die Welt zu erkunden. So haben Abenteurer, Forscher, Seefahrer oder auch Krieger dazu beigetragen, die „weißen Flecken“ auf dem Globus zu beseitigen und die Erde zu erforschen. Mit der Besteigung der höchsten Berge, dem Tauchen in die tiefsten Ozeangraben und dem Erkunden aller Erdteile kann die Erdoberfläche zumindest seit dem 20. Jahrhundert als vollständig erkundet betrachtet werden. Das Planetensystem unserer Sonne ist inzwischen ebenfalls weitgehend erforscht, wenngleich noch kein Mensch seinen Fuß auf einen anderen Planeten gesetzt hat. Wir haben aber ein klares und abgesichertes Bild über das Planetensystem: Die Sonne steht im Mittelpunkt und wird von den Planeten in verschiedenen Abständen auf Ellipsenbahnen umkreist. Die für diese Bahnbewegung notwendige Zentralkraft ist die Gravitationskraft zwischen den Massen der Sonne und des jeweiligen Planeten. Die Daten dieser Bewegungen sind durch jahrhundertelange Beobachtung und Berechnungen sehr genau bekannt und die moderne Physik erklärt so gut wie alle beobachtbaren Erscheinungen in diesem System. Eine ungefähre Vorstellung von den Größenverhältnissen im Planetensystem kann man sich entweder auf vielerorts installierten „Planetenwegen“ bzw. mit Hilfe einer animierten Darstellung im Internet verschaffen, wie z. B. bei:

<http://www.panoptikum.net/sonnensystem/>

Mit Hilfe der modernen Raumfahrttechnik konnten mittlerweile Menschen immerhin schon zum Erdmond und zurück befördert werden und mit Forschungssatelliten, die auf den Planeten landen konnten, haben wir schon viele wichtige Informationen über die Beschaffenheit unserer Nachbarplaneten Mars und Venus in Erfahrung gebracht. Für die weiter entfernten Planeten wurden schon erfolgreiche Missionen mit Raumsonden zur Beobachtung und Erforschung im Vorbeiflug durchgeführt. Über das Planetensystem hinaus jedoch ist bisher noch keine von der Erde ausgehende Mission gelungen. Wir sind also bei der Erforschung des außerplanetarischen Weltalls allein auf Strahlungssignale (Licht und andere Strahlung) angewiesen. Auf eine Darstellung der Astronomie des Sternhimmels wird in diesem Rahmen verzichtet.

8. Kugelgeometrie. Sphärische Trigonometrie

In diesem Kapitel wollen wir einige einfache geometrische Tatsachen zur Kugelgeometrie bereitstellen, die für die Positionsastronomie bedeutsam sind und die wir z. T. schon verwendet haben. Auf durchgehende Beweise wird verzichtet, wir begnügen uns manchmal auch nur mit Plausibilitätsbetrachtungen.

a) Grundlagen

Eine **Kugelfläche oder Sphäre** ist der geometrische Ort all der Punkte, die von einem festen Punkt, dem **Mittelpunkt M** der Kugel, dieselbe Entfernung r haben. Die Größe r heißt **Radius** oder Halbmesser, die Größe $d = 2 \cdot r$ heißt **Durchmesser** der Kugel. Auf Grund der hohen Symmetrie der Kugel (Drehsymmetrie, Ebenensymmetrie, Punktsymmetrie) erhält man leicht folgende Einsichten:

- Alle Ebenen durch M sind Symmetrieebenen (Spiegelebenen) der Kugel.
- Alle Achsen durch M sind Symmetrieachsen für Drehungen um beliebige Winkel.
- Der Mittelpunkt M der Kugel ist Symmetriezentrum der Punktsymmetrie.
- Ebene Schnitte mit der Kugel ergeben stets kreisförmige Schnitte.
- Der maximale Radius hierbei ist der Kugelradius. In diesem Fall enthält die Schnittebene den Kugelmittelpunkt M . Man nennt diese Kreise **Großkreise** der Kugel.

Satz 1:

Durch zwei Punkte A und B einer Kugelfläche, die nicht Gegenpunkte sind, existiert genau ein Großkreis. (Beweis: Die Ebene durch A , B und M ist eindeutig bestimmt).

Satz 2:

Die kürzeste Verbindung zweier Kugelpunkte A und B auf der Kugeloberfläche ist der kleinere der beiden Großkreisbögen durch A und B .

Plausibilitätsbegründung: Erstens ist die minimale Lösung offenbar eine *in einer Ebene* liegende Kurve, denn jede andere aus der Ebene herausführende Linie könnte man leicht verkürzen. Folglich muss es sich bei der Kurve um einen Kreisbogen handeln. Nun ist aber unter allen möglichen Kreisbögen derjenige mit der geringsten Krümmung der kürzeste, d. h. der mit dem größten Radius, also ein Großkreisbogen.

Satz 3:

Großkreise sind die geodätischen (kürzesten) Linien und gleichzeitig die Linien konstanter Richtung (Visieren) auf der Kugeloberfläche.

Hinweis: Linien *konstanten Kurses* sind i. d. R. keine Großkreise sondern Loxodromen. Das sind entweder Breitenkreise oder Längenkreise oder Linien, die sich zu den Polen hinschlängeln. Es ist interessant, einmal eine solche Loxodrome z. B. für den Winkel 45° auf einem Globus zu verfolgen und zu markieren.

Man definiert den **sphärischen Abstand** zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche als den Mittelpunktswinkel des kürzeren Großkreisbogens zwischen diesen Punkten.

Dreiecke auf der Kugeloberfläche, deren Seiten Großkreisbögen sind, nennt man **Eulersche Dreiecke**. Ihre Seiten werden im Winkelmaß (Mittelpunktswinkel des zugehörigen Großkreisbogens) als sphärischer Abstand gemessen.

Zur zeichnerischen Darstellung der Verhältnisse auf einer Kugeloberfläche eignen sich entweder entsprechende Lehrmittel (Globen mit entsprechenden Oberflächen) oder aber Sportbälle ($d \approx 20$ cm) mit geeigneten Oberflächen zum Zeichnen. Als Großkreislinieal verwendet man zwei mit Scharnier verbundene Scheiben mit je einem kreisrunden Loch der Größe d . Hilfreich ist weiter ein entsprechender Zirkel (mit Knick) für die Kugel.

b) Zweitafelprojektion

Eine einfache Darstellungsform für die Verhältnisse auf Kugeloberflächen ist die Darstellung der Kugel in Zweitafelprojektion mit Grundriss und zugeordnetem Aufriss. Wir geben ein Beispiel an, indem wir den sphärischen Abstand für zwei Erdorte ermitteln:

Moskau = A; Buenos Aires = B

A: Breite = 56° ; Länge = $-37,5^\circ$

B: Breite = $-34,5^\circ$; Länge = $58,5^\circ$

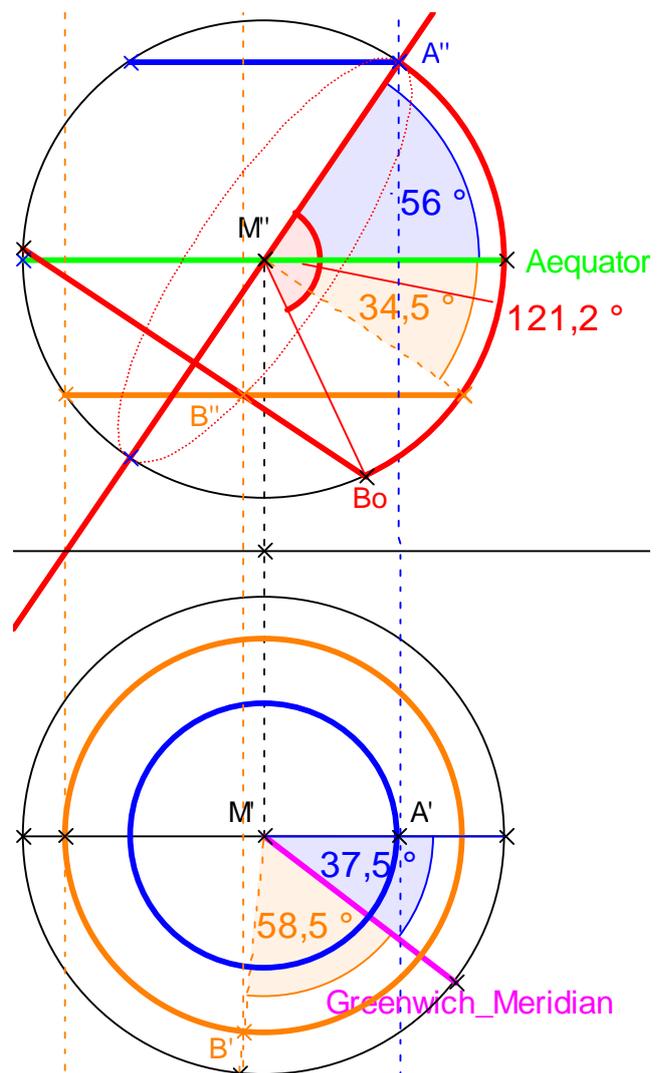
Als erstes konstruieren wir im Aufriss den Breitenkreis von Moskau und legen den Ort A'' genau auf die Kontur. Dadurch liegt der Meridian von A im Grundriss genau auf dem horizontalen Durchmesser (Radius von M' aus durch A').

Dann übertragen wir den Breitenkreis von A aus dem Aufriss in den Grundriss und bestimmen A', das Bild von A im Grundriss.

Als nächstes folgt der Nullmeridian von Greenwich im Grundriss. Das ist ein Radius, der mit M'A' den Winkel $37,5^\circ$ bildet.

Damit können wir auch den Meridian (ein Radius auf M'B') von B im Grundriss eintragen, der mit dem Greenwich-Meridian den Winkel $58,5^\circ$ einschließt.

Mit Hilfe des Breitenkreises von B im Aufriss und dessen Übertragung in den Grundriss finden wir nun die Punkte B' und B''. B' ergibt sich als Schnittpunkt des Breitenkreises und des Meridians im Grundriss.



Der Großkreis durch A und B stellt sich nun im Aufriss als Ellipse dar (rot gestrichelt). Wir drehen diese Ellipse im Aufriss um ihre Hauptachse $M''A''$ so weit, bis der Bogen $B''A''$ in seiner wahren Größe auf der Kontur erscheint. Dabei bewegt sich B'' auf dem Lot von B'' auf die Achse $B''A''$ bis nach Bo . Der Winkel $BoM''A''$ bzw. der zugehörige Bogen gibt die wahre Entfernung von A nach B auf der Kugelfläche an. Man erhält $121,2^\circ$. Das entspricht einer Entfernung von 13 473 km.

Zur Kontrolle der Genauigkeit unserer Konstruktion berechnen wir diese Entfernung noch mit Hilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie für das Eulersche Dreieck mit den Ecken N (Nordpol), A (Moskau) und B (Buenos Aires):

$$\cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos \gamma$$

Dabei ist:

$$\gamma = \Delta\lambda = \text{Längenunterschied der beiden Orte} = 96^\circ.$$

$$a = \text{Bogenlänge Nordpol - Moskau} = 34^\circ$$

$$b = \text{Bogenlänge Nordpol - Buenos Aires} = 124,5^\circ.$$

$$c = \text{Bogenlänge A - B}$$

Man erhält durch Rechnung $c = 121,181\dots^\circ$, also ist das zeichnerische Ergebnis sehr exakt.

Aufgabe:

- Zeichnen Sie die Erdkugel in Grund- und Aufriss in zugeordneter Lage. Tragen Sie die Pole, den Äquator, einige Breitenkreise und einige Längengrade ein.
- Zeichnen Sie in die Zeichnung aus a) einige durch geografische Breite und Länge gegebene Erdorte ein (Breite nordwärts positiv; Länge westwärts positiv).

Beispiele:

Stuttgart ($48^\circ 47'$; $-9^\circ 12'$); Peking ($39^\circ 54'$; $-116^\circ 28'$); Buenos Aires ($-34^\circ 36'$; $58^\circ 26'$); Kapstadt ($-33^\circ 56'$; $-18^\circ 29'$); Sydney ($-33^\circ 52'$; $-151^\circ 12'$); Greenwich ($51^\circ 29'$; 0°) u. a.

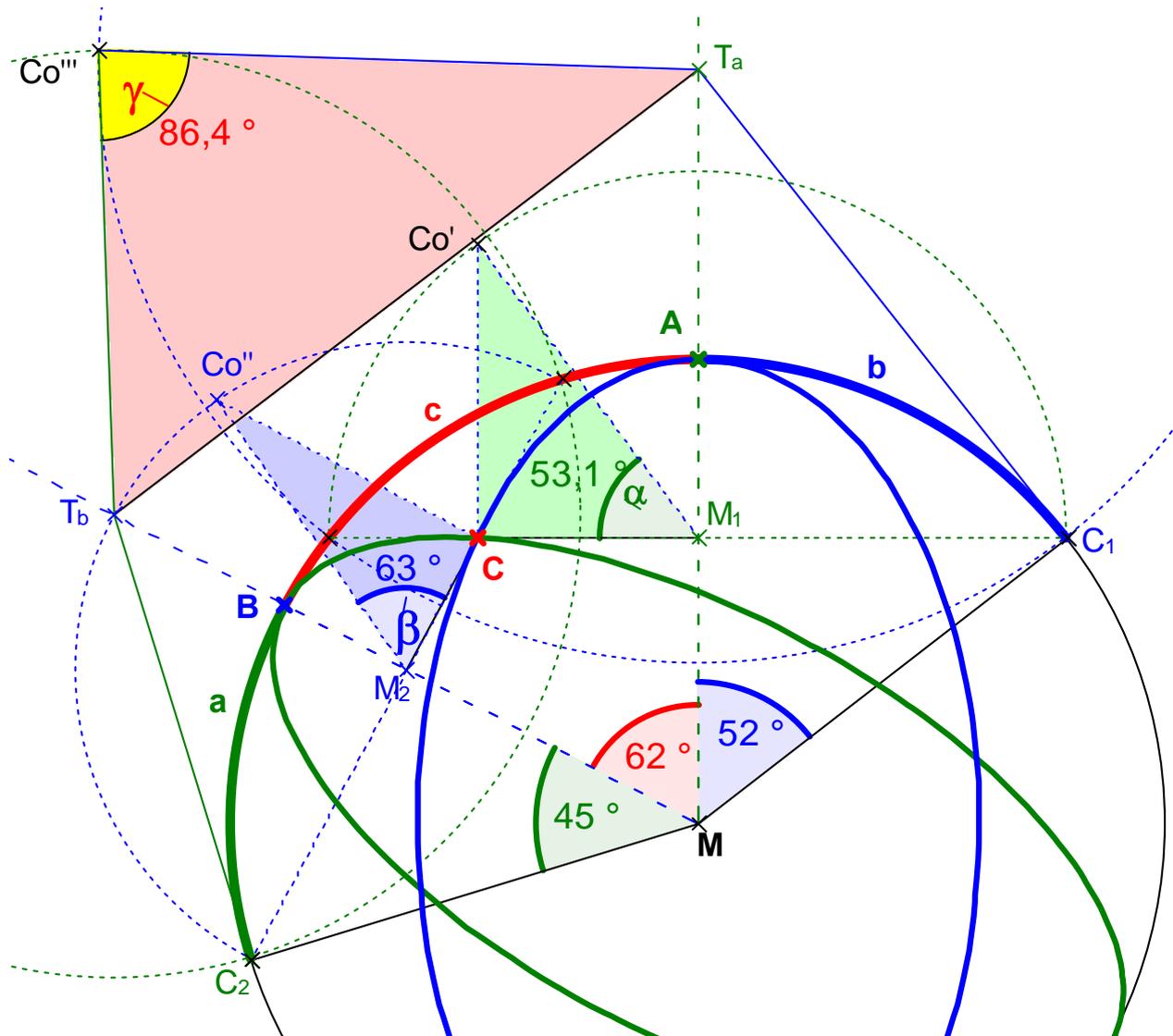
- Bestimmen Sie durch Zeichnung den sphärischen Abstand zweier Orte auf der Erdoberfläche (z. B. Stuttgart - Peking).

c) Grundkonstruktionen an Eulerdreiecken:

Als Beispiel einer grafischen Konstruktion eines Eulerschen Kugeldreiecks wollen wir die Konstruktion eines Eulerdreiecks aus drei gegebenen Seiten darstellen. Dabei verwenden wir diesmal nur die Eintafelprojektion im Aufriss:

Es soll ein Eulersches Kugeldreieck mit den Seitenlängen $a = 45^\circ$, $b = 52^\circ$, $c = 62^\circ$ in Eintafelprojektion konstruiert und die Winkelgrößen α , β und γ durch Zeichnung ermittelt werden.

Konstruktion eines Eulerdreiecks aus den drei Seiten $a = 45^\circ$, $b = 52^\circ$ und $c = 62^\circ$.



Wir beschreiben die Konstruktion schrittweise:

1. Man legt die Seite $c = AB$ auf den Umriss des Kreises (z. B. A als Nordpol).
2. Den dritten Punkt C erhält man durch "Eindreuen" der beiden anderen Seiten $a = BC_2$ und $b = AC_1$ von der Peripherie aus um die Achsen AM bzw. BM. (Vgl. die Bestimmung der Länge eines Großkreisbogens: dort wurde der entsprechende Bogen „ausgedreht“ auf die Kontur in wahrer Länge.).
3. Die wahre Größe der Winkel α und β erhält man wie folgt:
 Man legt durch C eine Schnitt Ebene (grün) senkrecht zu MA. Diese klappt man um 90° um die Achse CM_1 in die Zeichenebene nach oben. Dann erscheint der Winkel α in dieser umgeklappten Ebene in wahrer Größe als Winkel $\alpha = \angle Co'M_1C$.
 Analog erhält man β , indem man durch C eine Schnitt Ebene (blau) senkrecht zur

Achse MB legt. Diese klappt man um CM_2 in die Zeichenebene um und erhält den Winkel β in wahrer Größe als $\beta = \angle C_0''M_2C$.

Berechnung ergibt die Werte $53,068\dots^\circ$ für α und $62,974\dots^\circ$ für β .

4. Bestimmung von γ :

Wir denken uns die Tangenten an das Kugeldreieck in der Ecke C gezeichnet. Diese treffen die Achsen MA und MB in den Punkten T_a bzw. T_b . Diese Punkte können wir konstruieren, indem wir die Tangenten in den ausgedrehten Punkten C_1 und C_2 anlegen und mit MA bzw. MB zum Schnitt bringen. Dann wird das Dreieck T_aT_bC konstruiert, indem die Kreise um T_a durch C_1 und T_b durch C_2 zum Schnitt gebracht werden. $\angle T_bC_0''T_a = \gamma$. Berechnung ergibt den Wert $86,488\dots^\circ$ für γ .

[Mit Hilfe eines Dynamischen Geometrie-Systems wie z. B. EUKLID-DYNAGEO kann man diese Konstruktion einmal durchgeführt für beliebig vorgegebene Seitenlängen verwenden. Man muss dazu nur die Punkte A, B, C_1 und C_2 variabel einführen und dann so „ziehen“, bis die gewünschten Seitenlängen stimmen. Die Winkel des Dreiecks ergeben sich sofort.]

d) Dreiecksberechnungen für sphärische Dreiecke (Eulerdreiecke)

Um auch Berechnungen zu ermöglichen, stellen wir kurz die wichtigsten Sätze über Eulersche Kugeldreiecke mit den Seiten a, b und c und den Winkeln α , β und γ zusammen. Auf entsprechende Beweise oder Herleitungen verzichten wir hier.

Die wichtigsten Sätze der sphärischen Trigonometrie für beliebige Eulerdreiecke:

Sinussatz:
$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Seitenkosinussatz:
$$\cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos \gamma$$

Winkelkosinussatz:
$$\cos \alpha = -\cos \beta * \cos \gamma + \sin \beta * \sin \gamma * \cos a.$$

e) Das rechtwinklige Kugeldreieck

Für rechtwinklige Eulersche Kugeldreiecke mit $\gamma = 90^\circ$ gilt die **Nepersche Regel**:

Gemäß nebenstehendem Diagramm gilt:

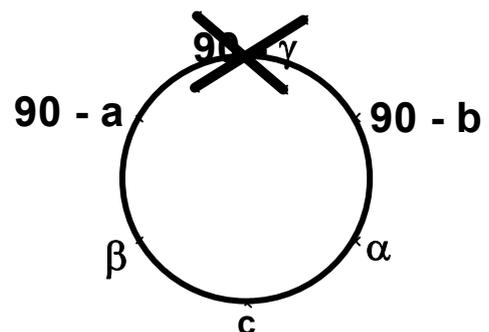
Der Kosinus eines Stückes

ist gleich dem Produkt der

- Sinuswerte der nicht benachbarten Stücke

bzw. der

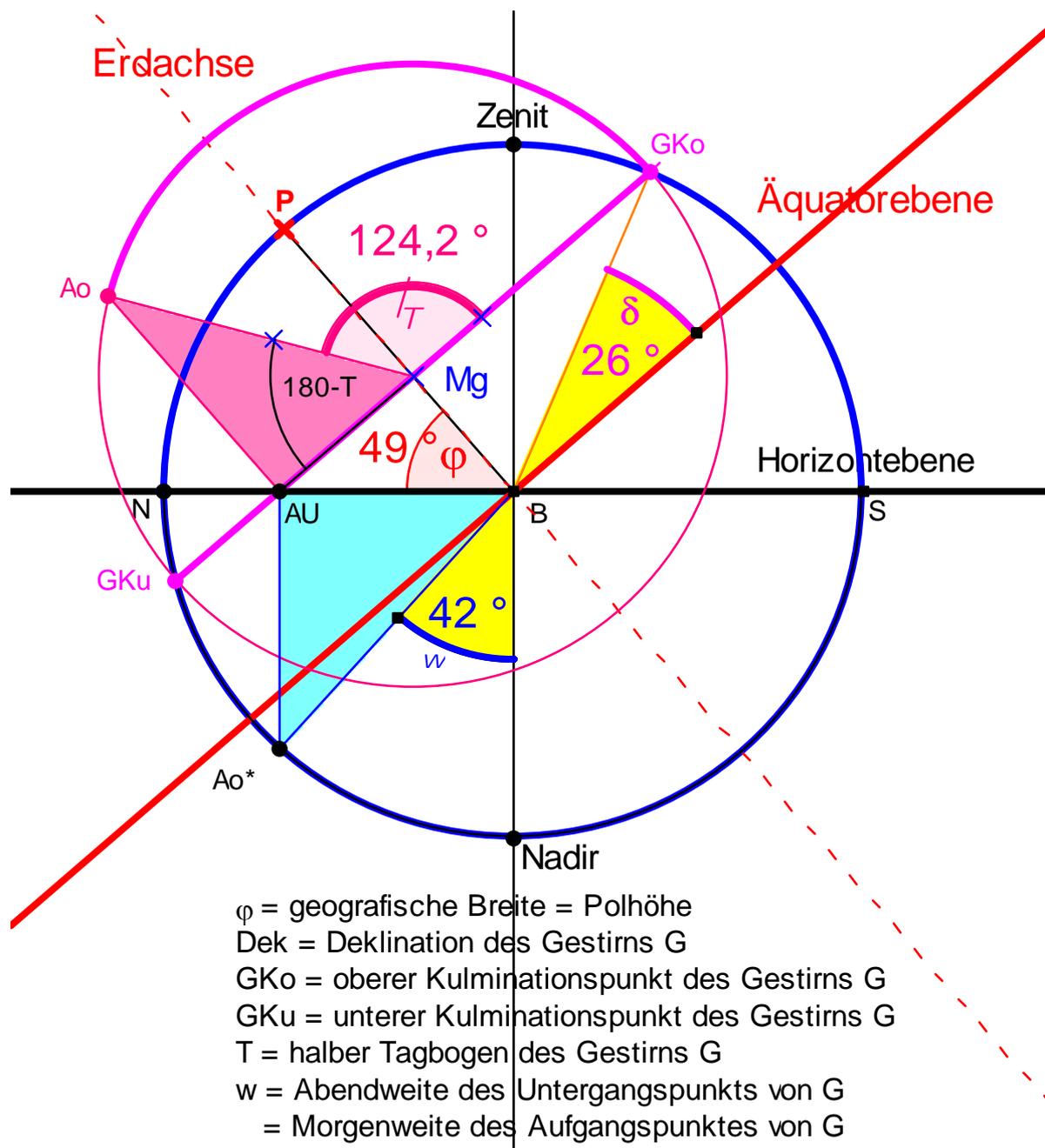
- Kotangenten der benachbarten Stücke.



f) Halbe Tagbogenlänge T , Auf- und Untergangspunkte sowie Abend- und Morgenweite eines Gestirns mit der Deklination δ für einen Beobachter auf der geografischen Breite φ .

Für ein Gestirn G (Sonne, Mond, Planet, Stern) mit bekannter Deklination δ (Höhe über dem Himmelsäquator) und einen Erdort B mit der geografischen Breite φ wollen wir zeichnerisch die Länge seines halben Tagbogens T über dem Horizont sowie die Lage der Auf- und Untergangspunkte A bzw. U in der Horizontebene bestimmen.

Als erstes zeichnen wir die Himmelskugel und die Horizontebene durch B mit Zenit und Nadir. Dann tragen wir die Lage des Himmelspols P ein mit Hilfe der Beziehung „Polhöhe über dem Horizont ist gleich der geografischen Breite φ “, also $\angle NBP = \varphi$. Damit können wir die Äquatorebene und parallel dazu in der Höhe δ über dieser die Tagesbahn des Gestirns G mit den beiden Kulminationspunkten GKo und GKu einzeichnen.



Auf- und Untergangspunkte A bzw. U ergeben sich als Schnitt der Tagesbahn mit dem Horizont. Durch Umklappen der Tagesbahn um die Achse GK_u-M_g-GK_o in die Zeichenebene erhält man die wahren Größen der Winkel für den halben Tagbogen $T = \angle GK_o - M_g - A_o$. Durch Umklappen der Horizontebene um die Achse N-B-S erhält man den Winkel für die Abweichung des Untergangspunkts vom Westpunkt (dieser fällt bei der Umklappung mit dem Nadirpunkte zusammen) $w = \angle A_o^* - B - AU$.

g) Zur Berechnung der in der obigen Zeichnung konstruierten Daten

Halber Tagbogen T:

Wir wählen als Radius der Himmelskugel $r = 1$. Damit erhalten wir für den Radius des Bahnkreises des Gestirns G mit der Deklination δ den Wert $M_g-GK_o = M_g-A_o = \cos \delta$ und für die Strecke B-M_g den Wert $BM_g = \sin \delta$.

Nun betrachten wir das rechtwinklige Dreieck B-AU-M_g: $AU-M_g = \sin \delta * \tan \varphi$.

Für den Ergänzungswinkel $T' = 180^\circ - T$ erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck M_g-AU-A_o die Beziehung

$$\cos T' = M_g-AU / AU-A_o = \sin \delta * \tan \varphi / \cos \delta = \tan \varphi * \tan \delta.$$

Damit erhält man schließlich die **Länge des halben Tagbogens T** über die Beziehung:

$$\cos T = - \tan \varphi * \tan \delta .$$

Ein Gestirn mit der Deklination δ beschreibt für einen Beobachter auf der geografischen Breite φ eine Tagesbahn (Bahn oberhalb des Beobachterhorizonts), deren halber Tagbogen die Länge T hat:

$$\cos T = - \tan \varphi * \tan \delta .$$

Auf- und Untergangspunkte bzw. Abendweite w:

Wir erhalten im rechtwinkligen Dreieck B-M_g-AU: $B-AU = \sin \delta / \cos \varphi$.

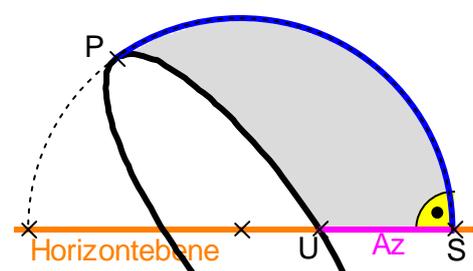
Nun klappen wir den Horizontkreis um und erhalten den umgeklappten Punkt A_o*.

Im rechtwinkligen Dreieck B-AU-A_o* erhalten wir für den Winkel $(90^\circ - w)$ die Beziehung: $\cos (90^\circ - w) = \sin w = \sin \delta / \cos \varphi$. Damit ergibt sich für die Abendweite w:

Die Abendweite w des Untergangspunktes eines Sterns der Deklination δ für einen Beobachter auf der geografischen Breite φ ergibt sich aus: $\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$.

Wir wählen einen zweiten Weg zur Herleitung dieser Beziehung:

Das Euler-Dreieck aus dem Himmelsnordpol P, dem Südpunkt S im Horizont und dem Untergangspunkt U im Horizont hat die folgenden Seitenlängen:



$PS = 180^\circ - \varphi$ (Polhöhe = geografische Breite)

$SU = Az$ = Azimut des Untergangspunktes

$PU = p =$ Poldistanz des Gestirns $= 90^\circ - \delta$

Der Winkel bei P ist genau die Länge T des halben Tagbogens des Gestirns.

Für dieses Euler-Dreieck wenden wir den Seiten-Kosinussatz an:

$$\begin{aligned}\cos Az &= \cos(PU) * \cos(PS) + \sin(PU) * \sin(PS) * \cos T \\ &= \cos(180^\circ - \varphi) * \cos(90^\circ - \delta) + \sin(180^\circ - \varphi) * \sin(90^\circ - \delta) * \cos T \\ &= -\cos \varphi * \sin \delta + \sin \varphi * \cos \delta * \cos T\end{aligned}$$

Benutzen wir nun $\cos T = -\tan \delta * \tan \varphi$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cos Az &= -\sin \delta * \cos \varphi - \cos \delta * \sin \varphi * \sin \delta * \sin \varphi / (\cos \delta * \cos \varphi) \\ &= -\sin \delta (\cos \varphi + \sin^2 \varphi / \cos \varphi) = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.\end{aligned}$$

Mit $w = Az - 90^\circ$ (das ist der Winkel, um den der Untergangspunkt nordwestlich vom Westpunkt liegt) bezeichnet man die so genannte **Abendweite** des Untergangspunktes.

Für die Abendweite w des Untergangspunktes eines Gestirns der Deklination δ für einen Beobachter auf der geografischen Breite φ gilt: $\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$.

Analoges gilt selbstverständlich für die Morgenweite des Aufgangspunktes.

h) Das nautische Dreieck Pol – Zenit – Gestirn

Als **nautisches Dreieck** an der Himmelskugel bezeichnet man das Euler-Dreieck PZG bestehend aus den Ecken **Himmelspol P, Ortszenit Z und Gestirn G**.

Bevor wir die Einzelheiten beschreiben erinnern wir nochmals an die verschiedenen Koordinatensysteme:

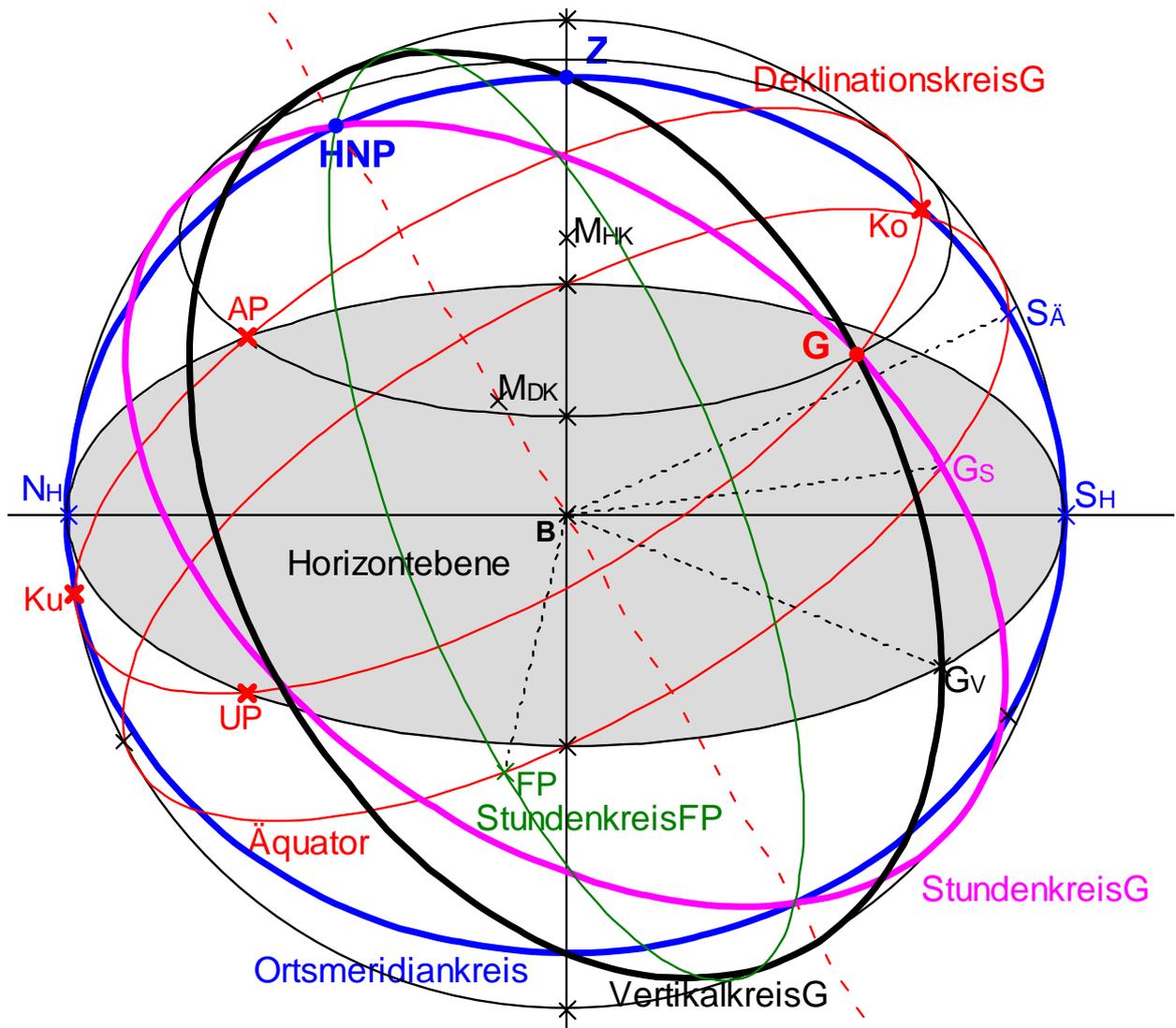
Das **Horizontsystem** bezieht sich auf die *Horizontebene* und den *Zenitpunkt Z* als deren Pol. Koordinaten sind das *Azimut* (Westabweichung vom Südpunkt auf dem Horizontkreis) und die *Höhe* über dem Horizont (gemessen auf dem Ortsmeridian) bzw. die Zenitdistanz als Ergänzungswinkel der Höhe.

Das **ortsabhängige Äquatorsystem** bezieht sich auf die *Ebene des Himmelsäquators* und den *Himmelspol P*. Koordinaten sind der *Stundenwinkel* (Westabweichung des Stundenkreises des Gestirns vom Ortsmeridian HNP-Z-S_H) gemessen auf dem Äquator und die *Deklination* (Höhe über dem Äquator; nordwärts positiv).

Das ortsunabhängige Äquatorsystem bezieht sich ebenfalls auf den *Himmelsäquator* und den *Himmelspol P*, hat jedoch einen anderen Nullmeridian. An Stelle des Ortsmeridians legt man den Stundenkreis durch den Frühlingspunkt FP (Schnittpunkt des Äquators mit der Ekliptik im Sternbild Fische) als Nullmeridian fest. Die *Rektaszension* α (ge-

messen in Stunden) gibt die Abweichung des Stundenkreises eines Sterns vom Frühlingspunkt aus an (ostwärts positiv gemessen). Zweite Koordinate ist die *Deklination* δ .

Wir wollen uns an Hand der nachstehenden Zeichnung die Zusammenhänge und Beziehungen am nautischen Dreieck klarmachen:



G_V-G = Höhe h über dem Horizont N_H-HNP = Polhöhe = geografische Breite φ

G_V-S_H = $\angle(G-Z-S_H)$ = Az = Südabweichung des Vertikalkreises vom Ortsmeridian

G_S-G = *Deklination* δ = Höhe über dem Äquator

$G_S-S_{\bar{A}}$ = $\angle(G-HNP-Z)$ = *Stundenwinkel* t des Gestirns G

$FP-G_S$ = $\angle(FP-HNP-G)$ = *Rektaszension* α des Gestirns G

Sternzeit $\Theta = t_F = t_G + \alpha_G$

Der Großkreisbogen auf dem Ortsmeridiankreis vom Himmelsnordpol (HNP) zum Zenit Z hat die Winkelgröße $90^\circ - \varphi$, weil die Polhöhe (also der Bogen N_H-HNP) gleich der geografischen Breite ist.

Die Seite Pol-Gestirn (der Bogen $HNP - G$) auf dem Stundenkreis durch G ist der Polabstand des Gestirns, hat also den Wert $90^\circ - \delta$, wobei $\delta = \angle G_S-B-G$ die Deklination des Gestirns G ist.

Die Seite ZG ist der Zenitabstand des Gestirns, hat also den Wert $90^\circ - h$, wobei der Bogen $h = \angle G_V-B-G$ die Höhe des Gestirns über dem Horizont ist.

Der Winkel G-Z-Ko ist das Azimut Az des Gestirns G und daher hat sein Nebenwinkel, der Innenwinkel HNP-Z-G des nautischen Dreiecks, den Wert $180^\circ - Az$.

Der Winkel Z-HNP-G ist der Stundenwinkel t_G des Gestirns G.

Einzige unbekannte Grundgröße ist der Winkel Z-G-P beim Gestirn G.

$G_V-G = \text{Höhe } h \text{ über dem Horizont}$ $N_H-HNP = \text{Polhöhe} = \text{geografische Breite } \varphi$

$G_V-S_H = \angle(G-Z-S_H) = Az = \text{Südabweichung des Vertikalkreises vom Ortsmeridian}$

$G_S-G = \text{Deklination } \delta = \text{Höhe über dem Äquator}$

$G_S-S_{\ddot{A}} = \angle(G-HNP-Z) = \text{Stundenwinkel } t \text{ des Gestirns G}$

$FP-G_S = \angle(FP-HNP-G) = \text{Rektaszension } \alpha \text{ des Gestirns G}$

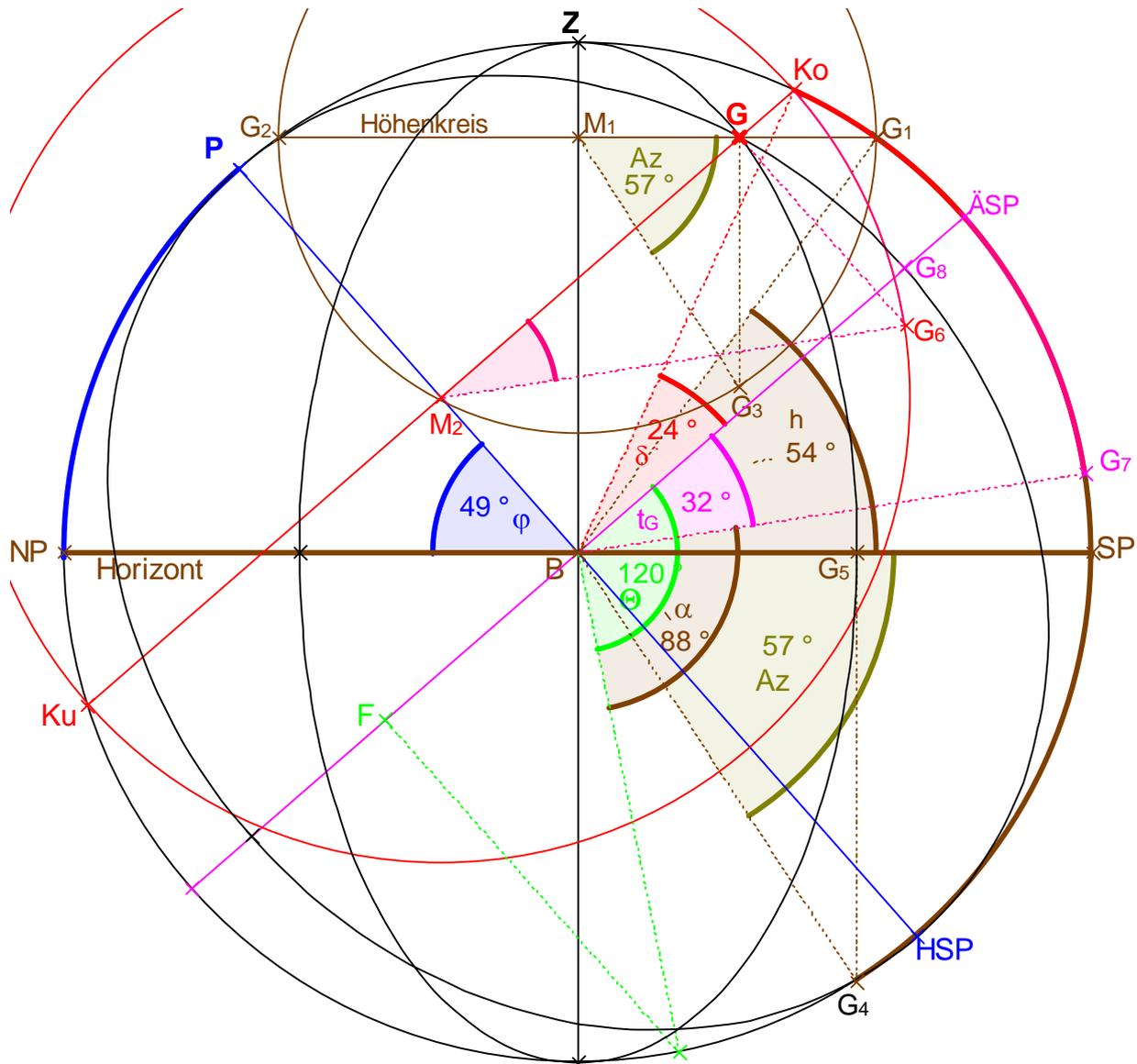
$\text{Sternzeit } \Theta = t_F = t_G + \alpha_G$

i) Das nautische Dreieck in Eintafelprojektion

Wir erläutern die Zeichnung auf der folgenden Seite:

- Zunächst zeichnen wir die Himmelskugel für einen Beobachter B mit Zenit, Nadir und Horizontebene.
- Dann tragen wir den Pol (Polhöhe über dem Horizont = geografische Breite) ein und zeichnen die Äquatorebene senkrecht zur Achse BP durch B.
- Nun sei eine Gestirnsbahn durch ihren Deklinationskreis (mit Deklination $\delta =$ Höhe über dem Äquator) gegeben. Dieser ist ein Parallelkreis zum Äquator. Auf diesem erhalten wir den Punkt Ko der oberen und den Punkt Ku der unteren Kulmination, sowie die Auf- und Untergangspunkte A und U. Der Mittelpunkt der Gestirnsbahn sei M1.
- Wir tragen nun noch den Höhenkreis auf der Höhe h parallel zum Horizont für eine bestimmte Stellung des Gestirns ein.
- Nun erhalten wir folgende Beziehungen am nautischen Dreieck:
 - **Bogen PZ** = Zenitdistanz des Pols = $90^\circ - \text{geografische Breite} = 90^\circ - \varphi$.
 - Auf dem *Vertikalkreis* durch das Gestirn (Großkreis durch Zenit, Gestirn und Nadir) erscheint die Höhe h über dem Horizont. Man erhält: **Bogen ZG** = $90^\circ - h$.
 - Der Winkel G-Z-Ko = G-Z-SP am Zenit ist der Winkel zwischen dem Vertikalkreis des Gestirns und dem Ortsmeridian, also das Azimut des Gestirns. Daher **Winkel PZG** = $180^\circ - Az$.
 - Wir zeichnen den *Stundenkreis* PG des Gestirns G ein. Die Höhe von G über dem Himmelsäquator ist die Deklination δ . Also ist der **Bogen PG** = $90^\circ - \delta$.
 - Der Winkel G-P-Z im nautischen Dreieck ist der Winkel zwischen dem Ortsmeridian und dem Stundenkreis, also gleich dem Stundenwinkel t des Gestirns: **Winkel GPZ** = t .

Mit diesen 5 Angaben (oben kursiv und fett) haben 5 der 6 Größen am nautischen Dreieck eine astronomische Bedeutung. Einzig der Winkel g am Gestirn fehlt.



Zugpunkte: P: Geograf. Breite; G₁: Gestirnhöhe h ;
 G₃: Azimut Az ; F₁: Frühlingspunkt/Rektaszension

Koordinaten:

$h = \text{Bogen } SP - G_1 = \angle SP - B - G_1 = \mathbf{Höhe}$ über dem Horizont

$Az = \angle G_3 - M_1 - G_1 = \angle G_4 - B - SP = \mathbf{Azimut}$

$t = \angle G_6 - M_2 - Ko = \angle G_7 - B - \ddot{A}qSP = \mathbf{Stundenwinkel}$

$d = \angle \ddot{A}qSP - B - Ko = \mathbf{Deklination}$

$a = \angle F_1 - B - G_7 = \mathbf{Rektaszension}$ von G

$\Theta = \angle F_1 - B - \ddot{A}qSP = t_f = \mathbf{Sternzeit} = t_G + a$

Z-G-G₅-N = Vertikalkreis von G P-G-G₈-HSP = Meridiankreis von G

j) Rechnerische Zusammenhänge am nautischen Dreieck:

Wendet man die üblichen Sätze über Eulersche Kugeldreiecke auf das nautische Dreieck an, so erhält man folgende Beziehungen:

$$(1) \quad \text{Sinussatz:} \quad \frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin g}{\cos \varphi}$$

$$(2) \quad \text{Seitenkosinussätze:} \quad \begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi * \sin \delta + \cos \varphi * \cos \delta * \cos t \\ \sin \delta &= \sin \varphi * \sin h - \cos \varphi * \cos h * \cos A \end{aligned}$$

Es gilt: **Sternzeit** = **Stundenwinkel des Frühlingspunktes**
 = **Rektaszension + Stundenwinkel** (für beliebiges Gestirn)
 = $t_F = \alpha_G + t_G$.

Man kann mit diesen Beziehungen einige quantitative Ergebnisse über die Tagesbahnen von Gestirnen errechnen:

1. Kulminationspunkte

Für Sterne in der oberen Kulmination ist $Az = 0^\circ$ und $t_G = 0^\circ$.

Es gilt: $(90^\circ - \varphi) + (90^\circ - h_0) = (90^\circ - \delta)$. Daraus erhält man die Kulminationshöhe:

$$h_o = \delta + 90^\circ - \varphi$$

Entsprechend für die untere Kulmination (bzw. obere auf PZ): $h_u = \delta - 90^\circ + \varphi$

Misst man die Kulminationshöhe eines bekannten Sterns, so kann man φ bestimmen.

Misst man die Kulminationshöhe an einem bekannten Ort (φ), so kann man δ bestimmen.

Misst man h_o und h_u für einen bestimmten Stern, so kann man δ und φ bestimmen.

2. Tagbogen sowie Auf- und Untergangspunkte

Wir betrachten das bei SP bzw. NP rechtwinklige Kugeldreieck P-SP-U bzw. P-NP-U. Mit $h = 0$ und $t_u = T$ folgt: $\cos T = -\tan \varphi * \tan \delta$.

Dabei ist T der Stundenwinkel zwischen oberer Kulmination und Untergang, also der **halbe Tagbogen**. Wir geben in einer Tabelle die Werte der halben Tagbogen für die geografische Breite $\varphi = 50^\circ$ an:

δ	- 40°	- 35°	- 30°	- 20°	- 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°
T	0	2h13	3h6	4h17	5h11	6h00	6h48	7h42	8h54	12h

Abendweite w des Untergangspunktes (Dreieck PSU mit Seitenkosinussatz):

Man erhält: $\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$

3. Äquatorsterne: $\delta = 0^\circ$

$h_o = 90^\circ - \varphi$ $h_u = \varphi - 90^\circ$ $T = 6h = 90^\circ$; $A = \text{Ostpunkt}$;
 U-A-Punkte sind der West- bzw. Ostpunkt im Horizont. Abendweite $w = 0$.

k) Anwendungsbeispiele am nautischen Dreieck

1. Geografische Ortsbestimmung

Zu bekanntem Zeitpunkt (Sternzeit Θ bekannt) wird Azimut und Höhe eines bekannten Sternes (Rektaszension α , Deklination δ) gemessen und daraus der Beobachtungsort bestimmt.

Beispiel 1:

Rigel ($\alpha = 5\text{h } 12\text{min} = 78^\circ$; $\delta = -8^\circ 15' = -8,25^\circ$) wird vermessen mit Azimut $A = -47,5^\circ$ (vom Südpunkt) und Höhe $h = 21,5^\circ$. Wo befindet man sich?

Durch Einjustieren der Zeichnung (Einstellen von h ; dann ziehen an P - und zur Korrektur auch wieder an Ko - zur Einstellung von $\delta = 351,8^\circ$ bis sich das Azimut von $47,5^\circ$ ergibt) erhält man $t = -43,9^\circ$ und $\varphi = 48,4^\circ$. (Bemerkung: Da Az negativ ist, befindet sich der Stern östlich der Südrichtung. Daher ist auch t negativ). Damit erhält man die Ortssternzeit $\Theta = \alpha + t = 78^\circ - (-43,9^\circ) = 121,9^\circ$.

Kennt man nun noch die Greenwich-Sternzeit (erfordert eine genaue Uhr), so kann man aus $\Theta_G - \Theta = \lambda$ **die geografische Länge** bestimmen.

Beispiel2:

Arkturus ($\alpha = 14\text{h } 14\text{min} = 213,5^\circ$; $\delta = 19,4^\circ$); wird vermessen:
 Höhe $h = 32,2^\circ$; Azimut $A = 75,8^\circ$ (vom Südpunkt aus).

Aus dem Sinussatz $\sin t / \cos h = \sin A / \cos \delta$ erhält man: $t = 60,4^\circ = 4\text{h } 24\text{min}$.
 Mit α ergibt sich die Orts-Sternzeit: $\Theta = \alpha + t = 18\text{h } 38\text{min} = 279,5^\circ = -80,5^\circ$.

Zeigt z. B. ein mitgeführtes Schiffschronometer die Greenwich-Ortssternzeit $\Theta_g = 22\text{h}$ an, so erhält man die geografische Länge zu
 $\lambda = \Theta_g - \Theta = 3\text{h } 22\text{min} = 50,5^\circ$.

Mit den beiden Gleichungen des Seitenkosinussatzes erhält man zwei lineare Gleichungen für $x = \sin \varphi$ und $y = \cos \varphi$:

$$\begin{aligned} 0,532876 &= x * 0,332161 + y * 0,465897 \\ 0,332161 &= x * 0,532876 - y * 0,2075774 \end{aligned}$$

Daraus erhält man $y = \cos \varphi = 0,5473$ und $\varphi = 56,5^\circ$.

Durch ausprobierendes Einstellen der Geo-Datei *Naut-Dreieck.geo* gelingt es, folgende Werte einzujustieren:

$h = 32,2^\circ$; $\delta = 19,4^\circ$; $Az = 76,1^\circ$. Man erhält $t = 60,6^\circ$ und $\varphi = 56,5^\circ$.

Eine gute (und mühelose) Bestätigung für die Rechnung.

Kennt man noch die Sternzeit, so lässt sich auch die geografische Länge ermitteln.

2. Ermittlung von Azimut und Höhe eines bekannten Sterns zur Beobachtung

Gegeben sei ein bekannter Stern (α ; δ). Ferner sei der Erdort (φ ; λ) des Beobachters und die Ortssternzeit Θ gegeben.

Gesucht sind Azimut A und Höhe h des Sterns zur Beobachtung.

Beispiel1:

In Stuttgart ($\varphi = 48,75^\circ$; $\lambda = -9^\circ 12' = -9,2^\circ$) soll der Stern Aldebaran mit den Koordinaten $\alpha = 4 \text{ h } 34 \text{ min} = 68,5^\circ$ und $\delta = 16^\circ 26' = 16,5^\circ$ zur Sternzeit $\Theta = 2 \text{ h}$ beobachtet werden. Auf welches Azimut und welche Höhe muss man das Fernrohr justieren?

Aus $\Theta = t + \alpha$ erhält man $t = -2 \text{ h } 34 \text{ min} = -38,5^\circ$.

Der Seitenkosinussatz ergibt: $\sin h = \sin \varphi * \sin \delta + \cos \varphi * \cos \delta * \cos t$

Daraus ermittelt man **Höhe $h = 45,1^\circ$** .

Aus dem Seitenkosinussatz für δ löst man auf nach $\cos A$:

$\cos A = (\sin \varphi * \sin h - \sin \delta) / (\cos \varphi * \cos h) = 0,53435$ und daraus $A = \pm 57,7^\circ$.

Bemerkung zum Vorzeichen: Da sich der Stundenwinkel (s. o.) negativ ergeben hat, steht der Stern noch östlich der Südrichtung, also vor der oberen Kulmination. Daher muss der negative Wert von A gewählt werden.

Statt über den Seitenkosinussatz kann man A auch mit Hilfe des Sinussatzes ermitteln:
 $\sin A = \sin t * \cos \delta / \cos h = -0,8456$ und daraus **$A = -57,7^\circ$** .

Man kann die Aufgabe mit Hilfe der Datei Naut-Dreieck.geo auch zeichnerisch lösen: Man stellt die Werte von φ und δ ein und verzieht h so, bis sich $t = 38,5^\circ$ ergibt. Dann kann man $A = 57,6^\circ$ und $h = 45,2^\circ$ ablesen – bequem und mühelos.

Beispiel2:

Stuttgart ($\varphi = 48,75^\circ$; $\lambda = -9,2^\circ$). Aldebaran ($\alpha = 4\text{h}34' = 68,5^\circ$; $\delta = 16,5^\circ$). Zum Beobachtungszeitpunkt sei die Sternzeit zu $\Theta = 6 \text{ h}$ gegeben.

Wir berechnen zuerst den Stundenwinkel für Aldebaran aus $\Theta = \alpha + t$.

Man erhält: $t = 6 \text{ h} - 4,5 \text{ h} = 1,5 \text{ h} = 22,5^\circ$.

Nun kann man den Rest entweder zeichnerisch mit der Geo-Datei Naut-Dreieck.geo lösen oder rechnerisch.

➤ Zeichnung:

Wir stellen Polhöhe $\varphi = 48,75^\circ$ und Deklination $\delta = 16,5^\circ$ ein (Ziehen am HNP und an Ko). Dann ziehen wir am Punkt H (Einstellen der Höhe) bis sich der Stundenwinkel $t = \text{Winkel}(Ko-M_1-Go')$ zu $22,5^\circ$ ergibt. Dann kann man die Höhe $h = \text{Winkel}(S-B-H) = 52,9^\circ$ und das Azimut $A = \text{Winkel}(Go''-M_2-H) = 37,6^\circ$ ablesen.

➤ Rechnung:

Aus dem Seitenkosinussatz kann man $\sin h$ und damit die Höhe h ermitteln:
 $\sin h = \sin \varphi * \sin \delta + \cos \varphi * \cos \delta * \cos t = 0,7976$; damit hat man $h = 52,9^\circ$.

Aus der zweiten Anwendung des Seitenkosinussatzes ermittelt man dann $\cos A$ und

daraus A : $\cos A = \frac{\sin \varphi * \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi * \cos h} = 0,9736$, damit hat man $A = 37,5^\circ$.

➤ Bemerkung: Die Zeichnung ist erstaunlich genau und deshalb zu bevorzugen. Bei der Berechnung wird das Azimut über den Kosinus errechnet. Deshalb kann der Winkel positiv oder negativ sein. Dies muss man auf Grund der Gegebenheiten ent-

scheiden. In unserem Fall ist der Stundenwinkel positiv, der Stern steht also westlich der Südrichtung, also ist auch das Azimut positiv.

- Zusatzfrage: Stellen Sie an Hand der Sternkarte fest, an welchem Datum diese Situation etwa eintritt?

3. Ermittlung der Koordinaten eines unbekanntes Sterns

An einem bekannten Ort sollen die Koordinaten α und δ eines unbekanntes Sterns ermittelt werden. Man misst dazu Sternzeit, Azimut und Höhe.

Beispiel:

In Stuttgart ($\varphi = 48,7^\circ$) werden Höhe $h = 35,7^\circ$ und Azimut $A = 120^\circ$ eines Sterns zur Sternzeit $\Theta = 2\text{h } 15\text{min}$ gemessen. Der Stern steht also im Nordwesten.

Zeichnerische Lösung:

Wir stellen φ und h in der Geo-Datei Naut-Dreieck.geo ein und verändern nun die Deklination (durch Ziehen an Ko) bis das Azimut 120° wird. Dann können wir ablesen: Deklination $\delta = 45^\circ$ und Stundenwinkel $t = 83,5^\circ = 5\text{h } 34\text{min}$. Mit Hilfe der bekannten Sternzeit $\Theta = 2\text{h } 15\text{min}$ ermitteln wir die Rektaszension α des Sterns:

$$\alpha = \Theta - t = 2\text{h } 15\text{m} - 5\text{h } 35 = - 3\text{h } 20\text{m} = \mathbf{20\text{ h } 40\text{ min.}}$$

Beantworten Sie folgende Fragen unter Benutzung der Sternkarte:

- Um welchen bekannten Stern handelt es sich?
- An welchem Tag des Jahres wurde die Messung durchgeführt?

Rechnerische Lösung:

Aus dem Seitenkosinussatz (2b) ermitteln wir $\sin \delta = 0,7064$ und damit $\delta = 44,94^\circ$.

Aus dem Sinussatz (1) ermitteln wir $\sin t = 0,9946$ und daraus $t = 84^\circ = 5\text{h } 36\text{m}$. Damit erhalten wir ebenfalls $\alpha = 20\text{ h } 41\text{ min}$.

4. Bestimmung von Azimut und Stundenwinkel

In Hamburg ($\varphi=53,6^\circ$) wird die Sonnenhöhe $h = 29,1^\circ$ gemessen, wobei die Deklination der Sonne bekannt ist: $\delta = 17,2^\circ$.

Gesucht sind Azimut und Stundenwinkel der Sonne.

Die Aufgabe kann zeichnerisch gelöst werden, indem man die Zeichnung Naut-Dreieck.geo benutzt und φ , h und δ einstellt und Az und t abliest. Man erhält folgende Werte: $Az = 79,6^\circ$ und $t = 64,2^\circ$.

Rechnung: Aus dem Seitenkosinussatz (2a) erhält man t , aus (2b) erhält man Az.

I) Herleitung der Berechnungsformeln für rechtwinklige Euler-Dreiecke

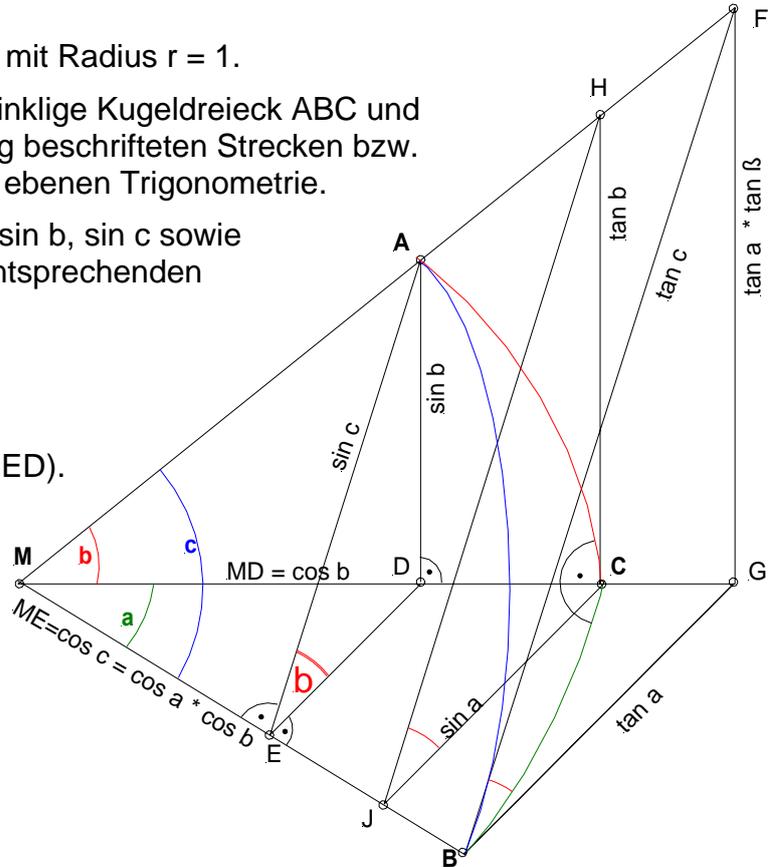
M ist der Mittelpunkt der Kugel mit Radius $r = 1$.

Wir zeichnen das bei C rechtwinklige Kugeldreieck ABC und berechnen die in der Zeichnung beschrifteten Strecken bzw. Winkel gemäß den Sätzen der ebenen Trigonometrie.

Man erhält so die Werte $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ sowie $\tan a$, $\tan b$ und $\tan c$ für die entsprechenden Strecken in der Zeichnung.

Für ME erhält man den Wert

$$\begin{aligned} ME &= \cos c \quad (\text{Dreieck MDA}) \\ &= \cos a * \cos b \quad (\text{Dreieck MED}). \end{aligned}$$



Dreieck EDA ist rechtwinklig bei D: $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$ analog: $\sin \alpha =$

Dreieck BDF ist rechtwinklig bei G: $\cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}$ analog: $\cos \alpha =$

Dreieck ICH ist rechtwinklig bei C: $\tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a}$ analog: $\tan \alpha =$

Dreieck MED ist rechtwinklig bei E: $\cos c = \cos a * \cos b$ (weil $ME = \cos c$)

Weiter gilt:

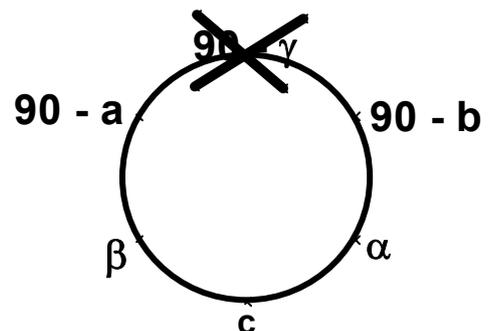
$$\cos c = \cot \alpha * \cot \beta$$

$$\cos \alpha = \cos a * \sin \beta$$

Im rechtwinkligen Eulerschen Kugeldreieck gilt die **Nepersche Regel** ($\gamma = 90^\circ$):

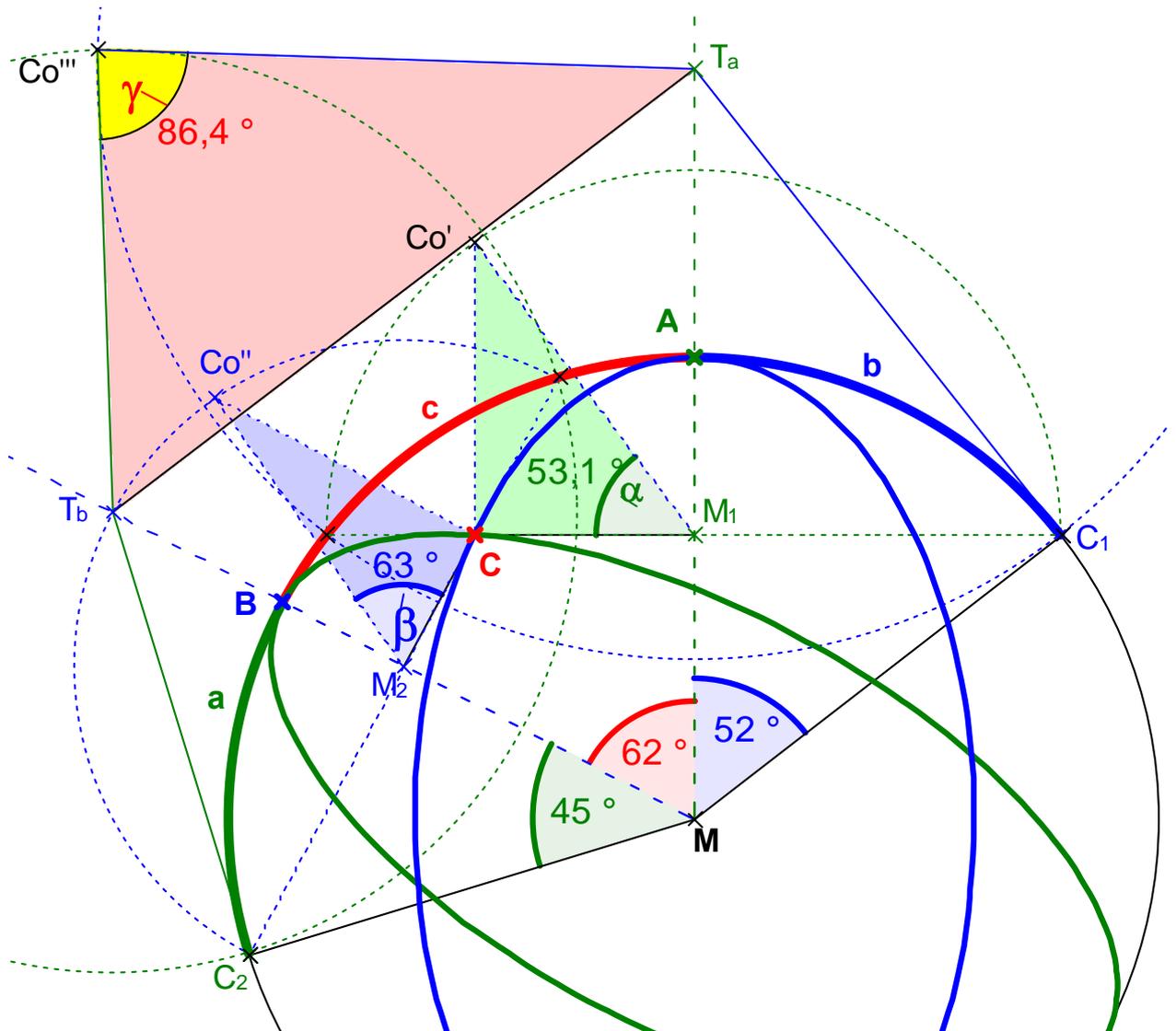
Der Kosinus eines Stückes ist gleich dem Produkt der

- Sinuswerte der nicht benachbarten Stücke
- bzw. der
- Kotangenten der benachbarten Stücke.



m) Herleitung der wichtigsten Sätze über Eulersche Kugeldreiecke

Wir benutzen die bereits auf Seite 51 erläuterte Zeichnung zur Konstruktion eines Eulerdreiecks aus den drei Seiten a, b und c.



Es ist
$$\sin \beta = \frac{C_4C}{M_2C_4} = \frac{C_3C}{C_2M_2} = \frac{M_1C_3 \cdot \sin \alpha}{MC_2 \cdot \sin a} = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a}.$$

Damit ist der **Sinussatz** bewiesen:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Kosinussatz für die Seite $T_a T_b$ in den Dreiecken $C_5 T_a T_b$ und $MT_a T_b$:

$$(1) \quad T_a T_b^2 = C_5 T_a^2 + C_5 T_b^2 - 2 * C_5 T_a * C_5 T_b * \cos \gamma$$

$$(2) \quad T_a T_b^2 = MT_a^2 + MT_b^2 - 2 * MT_a * MT_b * \cos c$$

Es ist $C_5 T_a = C_2 T_a$ und Dreieck $C_2 T_a M$ ist rechtwinklig bei M, also gilt:

$$(3) \quad C_5 T_a^2 = C_2 T_a^2 = MT_a^2 - r^2 \quad \text{und analog für } C_5 T_b^2 = MT_b^2 - r^2$$

Gleichsetzung von (1) und (2) unter Benützung von (3) liefert:

$$MT_a^2 - r^2 + MT_b^2 - r^2 = 2 * r * \tan a * r * \tan b * \cos \gamma$$

$$= MT_a^2 + MT_b^2 - 2 * \frac{r}{\cos a} * \frac{r}{\cos b} * \cos c$$

Daraus erhält man den **Seitenkosinussatz**:

$$\cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos \gamma$$

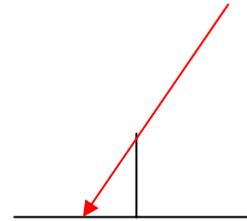
Weiter erhält man den **Winkelkosinussatz**:

$$\cos \alpha = -\cos \beta * \cos \gamma + \sin \beta * \sin \gamma * \cos a$$

9. Stabschattenkurven

Experiment:

Auf einer horizontalen ebenen Fläche wird senkrecht ein Stab (Gnomon) aufgestellt. Im Verlauf eines Sonnentages wird der Schatten der Stabspitze auf einem Blatt Papier in der Horizontebene markiert und die Punkte zu einer Kurve verbunden.



Zunächst wollen wir einige Bemerkungen zur technischen Ausführung machen. Es eignet sich ein quadratisches Brett mit etwa 40 bis 50 cm Seitenlänge als Unterlage und als Schatten werfender Stab ein Stahlstift, ein Nagel oder eine Schraube, die senkrecht in das Brett gesteckt werden können. Eine passende Hülse oder ein Gewinde als Halterung sind vorteilhaft.

Zum Aufzeichnen der Kurve wird ein Blatt Papier vorbereitet, auf das man zuvor eine Serie konzentrischer Kreise gezeichnet hat mit dem Loch für den Stab als Zentrum. Dann stellt man die Anordnung an einem den ganzen Tag über sonnigen Platz horizontal (Wasserwaage) auf und markiert in regelmäßigen Abständen (möglichst mit genauer Angabe der Beobachtungszeit) die Spitze des Stabschattens.

Es erheben sich die folgenden Fragen zum Ergebnis des Experiments:

- Von welcher Art ist die Kurve des Schattens der Stabspitze?
- Wie hängt sie vom Sonnenstand (Deklination δ) und vom Beobachtungsort (geografische Breite φ) ab?
- Was kann man mit einer solchen Stabschattenkurve messen?

Bevor Sie das Experiment durchführen: Was glauben Sie, wie wird die Kurve der Stabspitzenschatten im Tagesverlauf aussehen? Wird sie konkav oder konvex zum Stab hin verlaufen?

Wir geben nun an, was man aus der erhaltenen Kurve herausholen kann:

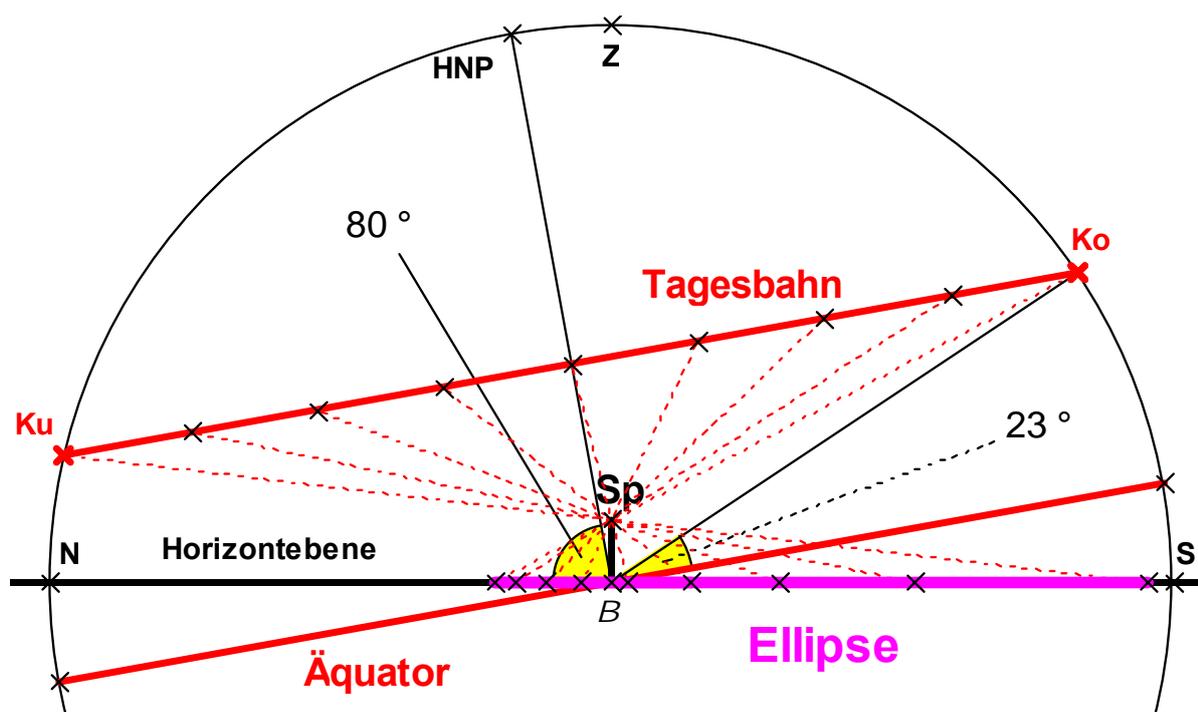
1. Die Symmetrielinie der Kurve ist die Nord-Süd-Richtung in der Horizontebene. Man kann also die Mittagslinie (den Meridian) sowie den Südpunkt und den Nordpunkt im Horizont ermitteln.
2. Mit Hilfe des Abstands des dem Stab am nächsten liegenden Kurvenpunktes (auf der Symmetrielinie) und der Höhe des Schattenstabes kann man den Tangens und damit den Winkel des Sonnenhöchststandes an diesem Tag ermitteln, also die Kulminationshöhe der Sonne.
3. Hat man die Beobachtungszeiten der einzelnen Markierungen notiert, so kann man den Zeitpunkt des Durchgangs der Sonne durch die Mittagslinie, also die Uhrzeit des wahren Mittags ermitteln. Das ist besonders genau, wenn man für einen der Kreisbögen beide Übergangszeiten notiert hat. Die in der Mitte dieser Zeitpunkte liegende Uhrzeit ist der wahre Mittag.
4. Sofern man dieses Experiment übers Jahr hinweg mehrmals durchführt, insbesondere an den besonderen Tagen 23. Dezember, 21. März, 21. Juni und 23. September, kann man durch den Vergleich eine Reihe weiterer Daten ermitteln wie z. B. die

Schiefe der Ekliptik. Eine besondere Überraschung wird man durch die Form der Stabschattenkurve bei den Äquinoktien erleben. Erleben Sie es!

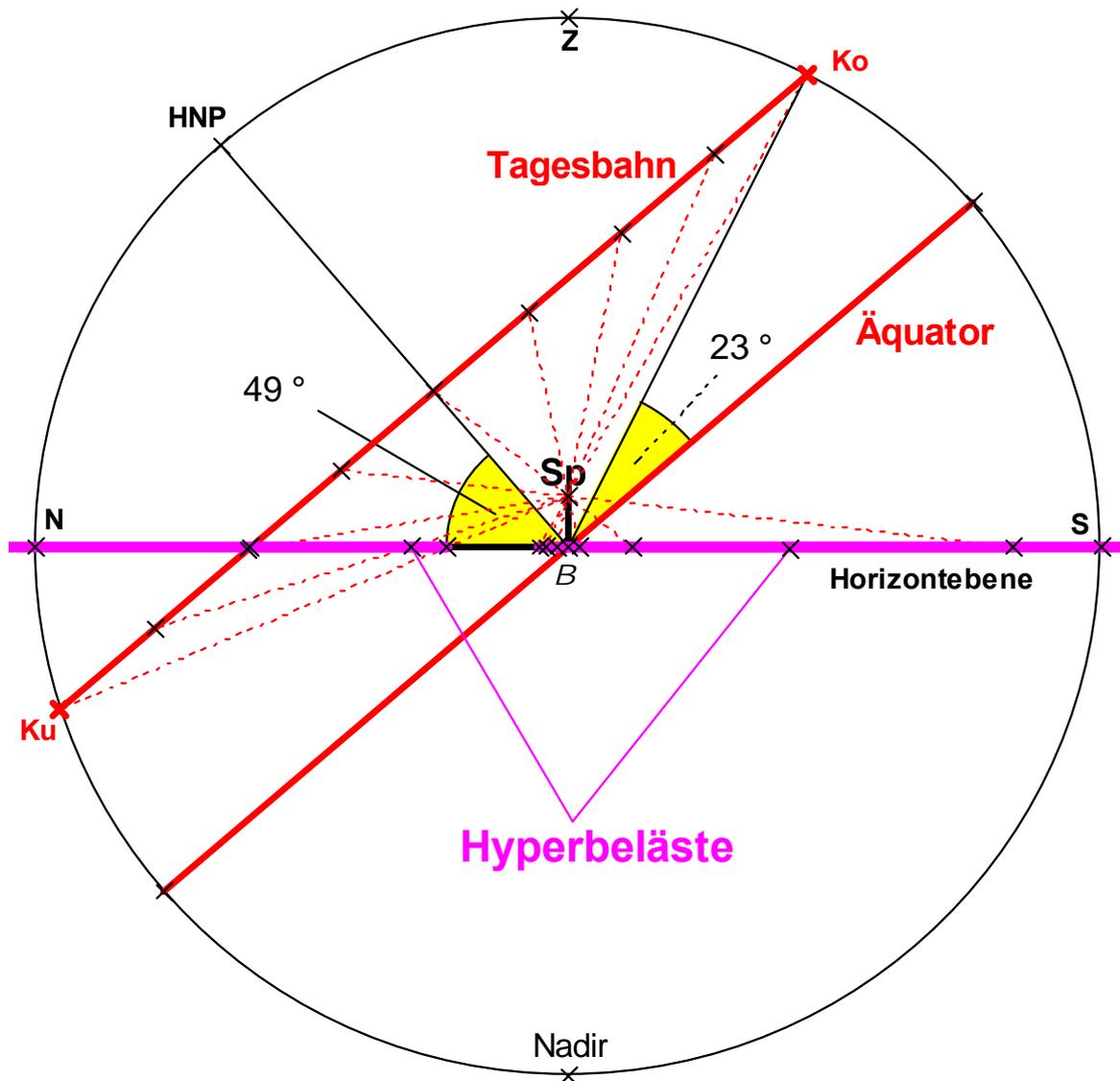
Wir wollen im Folgenden eine kleine Betrachtung zur Theorie der Stabschattenkurven anstellen.

Dazu stellen wir uns die ruhende Erde vor und die Tagesbahn der Sonne als Kreis an der Himmelskugel (Deklinationkreis als Tagesbahn). Verbindet man jeden Punkt dieser Tagesbahn mit der Spitze des Stabes, so entsteht ein Doppel-Kegel mit der Stabspitze als Spitze. Dieser Kegel ist der projizierende Kegel für die Stabschattenkurve. Die Strahlen treffen auf einem ebenen Brett auf und daher erhält man als Kurve den ebenen Schnitt eines Kegels. Jede Stabschattenkurve ist also ein **Kegelschnitt**. Es kommen daher **Ellipsen**, **Parabeln** oder **Hyperbeln** mit ihren jeweiligen Sonderfällen (Kreis bzw. Geradenpaar) in Frage. Sobald ein Auf- oder Untergang der Sonne stattfindet, hat der betreffende Kegelschnitt einen „Fernpunkt“ (der Schatten der Spitze trifft gar nicht mehr auf das Brett). Tritt sowohl Auf- als auch Untergang ein, so hat die Kurve zwei Fernpunkte und ist daher eine Hyperbel. Nur wenn die Sonne in ihrer Tagesbahn den Horizont in einem einzigen Punkt berührt (*ein* Fernpunkt), hat man den Fall einer Parabel. Sofern die Sonne überhaupt nicht untergeht, also zirkumpolar ist, erhält man eine Ellipse. Außer in den Polargebieten wird man also stets Hyperbeläste als Stabschattenkurven erhalten.

In der nachfolgenden Zeichnung ist die Situation für einen zirkumpolaren Umlauf der Sonne auf der geografischen Breite 80° , also nördlich des Polarkreises, mit der Sonnendeklination 23° , also bei der Sommersonnwende, dargestellt. Die Stablänge ist natürlich stark überhöht gezeichnet. Man erhält als Stabschattenkurve eine Ellipse, weil die Sonne im Laufe des „Polartages“ gar nicht untergeht und daher als Kegelschnitt eine Ellipse entsteht.



In der nächsten Zeichnung haben wir die Situation für die geografische Breite 49° und die Sonnendeklination 23° (also auf unserer Breite bei der Sommersonnwende) mit stark überhöhter Stablänge dargestellt. Es entstehen zwei Hyperbeläste, einer für den Tagbogen (rechter Teil) und einer - unbeobachtbar - für den Nachtbogen der Sonnenbahn.



In beiden Zeichnungen ist die Stablänge B-Sp unverhältnismäßig übertrieben (man bedenke, dass die Erde auf den Beobachterpunkt B zusammengeschrumpft gedacht ist).

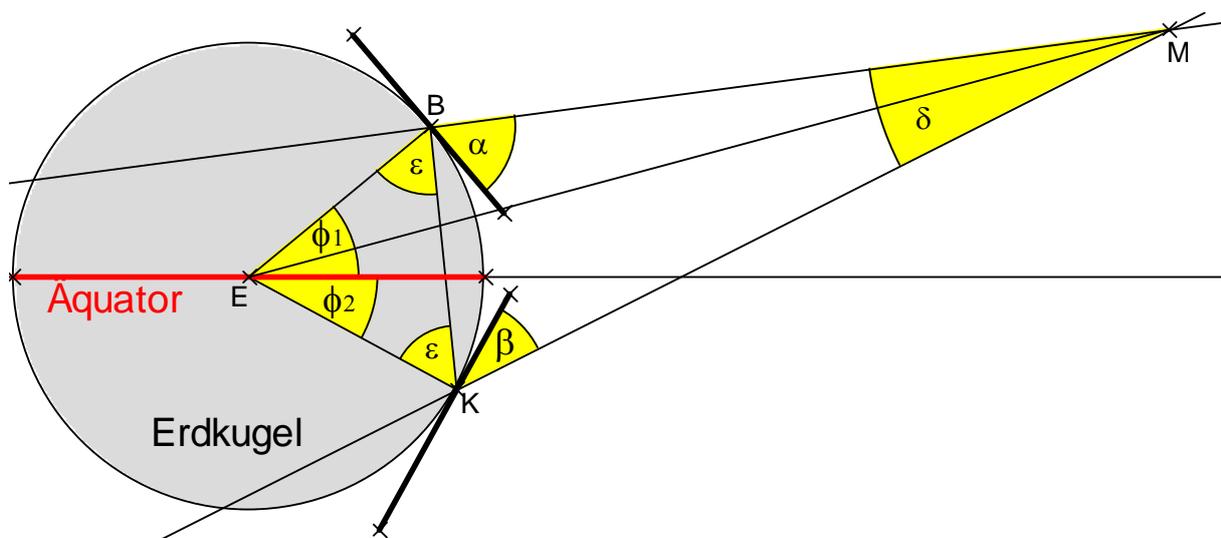
Was passiert, wenn die Stabspitze, d. h. der Beobachter B, *in der Bahnebene* der Sonne liegt, wenn also die Deklination $\delta = 0$ ist, d. h. wenn die Sonne im Äquator steht? Dann entartet der (Doppel-)Kegelmantel zu einer Ebene und die Stabschattenkurve wird als Schnitt zweier Ebenen eine Gerade. Dies ist natürlich genau bei den Äquinoktien der Fall. Zeichnet man diesen Fall der Stabschattenkurve auf, so kann man die Nord-Süd- und die Ost-West-Richtung besonders genau ermitteln.

Wie sieht die Kurve auf unseren Breiten im Sommer aus, wie im Winter, wie sind die entsprechenden Verhältnisse an den Polen?

10. Bestimmung der Mondentfernung durch Lacaille und Lalande im Jahr 1752

Lalande hat in Berlin (Punkt B) mit der nördlichen geografischen Breite $\varphi_1 = 52^\circ 31,2' = 52,52^\circ$ einen Mondpunkt M (Rand) angepeilt und seine Höhe zu $\alpha = 57^\circ 55,2' = 57,92^\circ$ gemessen. Gleichzeitig hat am Kap der guten Hoffnung (Punkt K) auf der südlichen geografischen Breite $\varphi_2 = 33^\circ 56' = 33,93^\circ$ Lacaille denselben Mondpunkt M angepeilt und seine Höhe zu $\beta = 34^\circ 17,2' = 34,287^\circ$ gemessen.

Wir zeigen nun, wie man mit diesen Daten die Mondentfernung EM bestimmen kann:



Zunächst errechnet man den Winkel $\delta = 360^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 - (\alpha + 90^\circ) - (\beta + 90^\circ) = 1^\circ 20,4' = 1,34^\circ$.

Das Dreieck KEB ist gleichschenkelig mit dem Erdradius r als Schenkellänge. Daher errechnet man den Winkel $\varepsilon = \frac{1}{2} * (180^\circ - \varphi_1 - \varphi_2) = 46^\circ 46,2' = 46,773^\circ$.

Im Dreieck KEB kann man nun z. B. mit Hilfe des Kosinussatzes oder des Sehnensatzes zu gegebenem Mittelpunktswinkel die Sehnenlänge BK berechnen:

$$BK = 2 * r * \sin \left(\frac{1}{2} * (\varphi_1 + \varphi_2) \right) = 2 * 6371 \text{ km} * \sin 43,227^\circ = 8726,875 \text{ km}$$

Im Dreieck BKM kennt man alle Winkel und eine Seite, daher kann man sowohl KM als auch BM mit Hilfe des Sinussatzes berechnen:

$$BM : BK = \sin (90^\circ + \beta - \varepsilon) : \sin \delta = \sin 77,517 : \sin 1,34^\circ$$

Damit erhält man $BM = 364\,356,265 \text{ km}$ und ebenso $KM = 366\,134,123 \text{ km}$.

Damit kann man schließlich die Entfernung EM mit Hilfe des Kosinussatzes z. B. aus dem Dreieck EKM berechnen:

$$EM^2 = EK^2 + KM^2 - 2 * EK * KM * \cos (90^\circ + \beta) \text{ also } EM = 367\,979 \text{ km} \approx \mathbf{368\,000 \text{ km.}}$$

Heutige Werte:

Apogäum 406 740 km und Perigäum 356 410 km. Mittlere Distanz = 384 400 km.

11. Loxodromen

Neben den ***Linien kürzester Entfernung*** (geodätische Linien) auf einer Kugeloberfläche, das sind Bogenstücke von Großkreisen, spielen die ***Linien konstanten Kurses*** für die Navigation eine bedeutende Rolle. Derartige Linien konstanten Kurses (z. B. Ost 30° Nord) auf einer Kugeloberfläche nennt man **Loxodromen** im Gegensatz zu den **Orthodromen** (Großkreise als geodätische Linien).

Für den Kurs in exakter Nord-Süd-Richtung sind die Meridiane die Loxodromen, für den Kurs in exakter Ost-West-Richtung sind die Breitenkreise die entsprechenden Loxodromen. Interessant verlaufen dagegen alle anderen Loxodromen. Es ist aufschlussreich eine solche Loxodrome z. B. für 45° gegen die Nord-Süd-Richtung auf einem Globus einmal aufzuzeichnen. Sie schlängelt sich, allmählich immer enger werdend, um die Pole und endet in diesen. Jede konstante Fahrt auf einer Loxodrome (außer in Ost-West-Richtung) führt also zu einem der Pole.

Wir wollen im Folgenden eine Gleichung für die Loxodrome und die Länge s des Loxodromenbogens zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 angeben:

Im Startort $P_1(\lambda_1; \varphi_1)$ beginnt eine Loxodrome unter dem Winkel α gegen die Nordrichtung. Dann erhält man die Loxodromengleichung (λ im Bogenmaß) wie folgt:

$$\lambda - \lambda_1 = \tan \alpha \cdot \ln \frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2} + 45^\circ\right)} \quad \text{Bogenlänge } s = P_1P_2 = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich zu jedem Wert von φ der zugehörige Wert von λ bzw. umgekehrt bestimmen und man kann die Loxodromenpunkte einzeln berechnen.

Umgekehrt kann man daraus bei gegebenem Startpunkt $P_1(\lambda_1; \varphi_1)$ für einen beliebigen Zielpunkt $P(\lambda; \varphi)$ den Kurswinkel α der die beiden Punkte verbindenden Loxodrome berechnen.

Wir geben ein Beispiel für die Berechnung einer Loxodrome an:

- a) Von Hamburg ($\varphi = 53,6^\circ; \lambda = 10^\circ$) nach New York ($\varphi = 40,7^\circ; \lambda = -74^\circ$).

Man erhält durch Einsetzen und Auflösen nach $\tan \alpha$ den Kurswinkel $\alpha = 77,2^\circ$.

Würde man auf dem Großkreis (Orthodrome) zwischen Hamburg und New York navigieren, so erhielte man den Startkurs zu 67° .

- b) Wir errechnen einen Zwischenpunkt auf der Loxodrome für $\lambda = -18^\circ$:

Man erhält den Punkt ($\varphi = 49,7^\circ; \lambda = -18^\circ$) gegenüber dem auf der Orthodrome ($\varphi = 57^\circ; \lambda = -18^\circ$). Die Orthodrome verläuft also viel weiter nördlich.

- c) Wir vergleichen die Weglängen zwischen Loxodrome und Orthodrome:

Man erhält als Weglänge für die Loxodrome $s = 58,23^\circ$ dagegen für die Orthodrome nur $55,1^\circ$. Der Unterschied von 3° entspricht einer Strecke von 333 km und das bedeutet immerhin eine halbe Flugstunde mehr (Kerosinverbrauch).

12. Elemente der Kartografie

Problemstellung

Die Aufgabenstellung in der Kartografie besteht darin, die Oberfläche einer Kugel möglichst genau auf eine Ebene abzubilden. Nach einem wichtigen Ergebnis aus der Differentialgeometrie (C. F. Gauß) ist es nicht möglich, die Kugeloberfläche isometrisch, also durchgehend längentreu und damit auch winkel- und flächentreu, auf eine Ebene abzubilden, wie dies z. B. für einen Zylinder- oder Kegelmantel durchaus möglich ist. Je nach Problemstellung begnügt man sich mit einzelnen Abbildungsinvarianten:

- **Winkeltreue**
Derartige Abbildungen sind z. B. bei der Festlegung von Kursen in der Nautik oder Aeronautik interessant. Auf Karten mit dieser Eigenschaft schneiden z. B. die Meridiane die Breitenkreise stets rechtwinklig. Ein Beispiel dafür ist die Mercator-Karte.
- **Flächentreue**
Etwa beim flächenmäßigen Vergleich von Ländergrößen sind derartige Karten erforderlich. Ein Beispiel dafür ist der Entwurf von Lambert.
- **Vermittelnde Entwürfe**
Derartige Abbildungen versuchen, in beschränkten Bereichen möglichst gute Annäherungen an Winkel- und an Flächentreue zu erzielen.

Überblick über die Kartografie:

- Je nach **Art der Entstehung** unterscheidet man wirkliche *Projektionen* (Abbildungen durch Zentral- oder Parallelprojektion) und berechnete *Entwürfe* (z. B. Mercator).
- Je nachdem **auf welche Art von Fläche abgebildet wird** gibt es *ebene* (azimutale), *kegelförmige* oder *zylindrische* Projektion. Ebene und Zylinder können als Sonderfälle von Kegeln gedeutet werden.
- Je nach **Lage der Projektionsfläche** hat man *polständige*, *äquatorständige* oder *zwischenständige* Projektion.

Beispiele von kartografischen Entwürfen bzw. Projektionen

Orthografische Projektion

Eine der einfachsten Projektionen ist die orthografische Projektion. Es handelt sich dabei um eine senkrechte Parallelprojektion auf eine Tangentialebene an die Kugel. Bei „polständiger“ Tangentialebene handelt es sich um den gewöhnlichen Grundriss, bei „äquatorständiger“ Tangentialebene um einen Aufriss der Erdkugel. Diese Projektion ist einfach und leicht konstruierbar außerdem einigermaßen maßgerecht, jedoch wenig anschaulich.

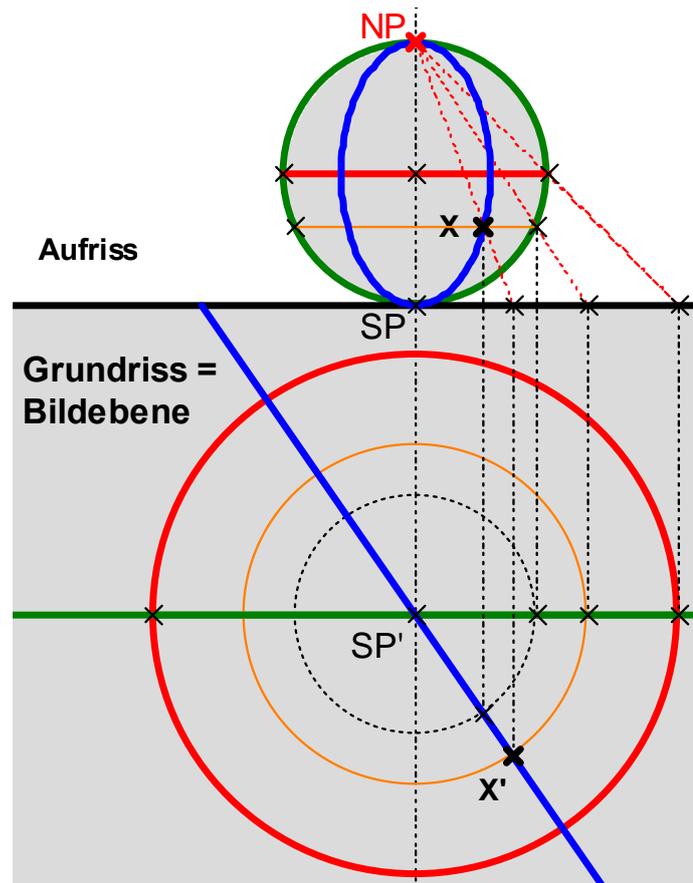
Stereografische Projektion

Es handelt sich um eine Zentralprojektion von einem Kugelpunkt (z. B. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im Gegenpunkt (z. B. Südpol).

Die stereografische Projektion ist „kreistreu“, d. h. ein Kreis oder eine Gerade wird stets abgebildet auf einen Kreis oder eine Gerade. Die Distanzen werden in allen Richtungen gleichartig (jedoch nicht gleichmäßig) verzerrt.

Leicht abzubilden sind in diesem Falle die Breitenkreise (konzentrische Kreise um den Südpol) und die Längengrade (Geraden durch den Südpol). Alle Kreise durch das Projektionszentrum NP werden auf Geraden, alle anderen Kreise jedoch wieder auf Kreise abgebildet.

Eine solche Projektion ist z. B. für Sternkarten geeignet.



Entwurf einer Sternkarte durch stereografische Projektion:

Die Himmelskugel wird vom Himmelssüdpol HSP als Zentrum auf die Äquatorebene (also eine zur Tangentialebene im Nordpol parallele Ebene) projiziert.

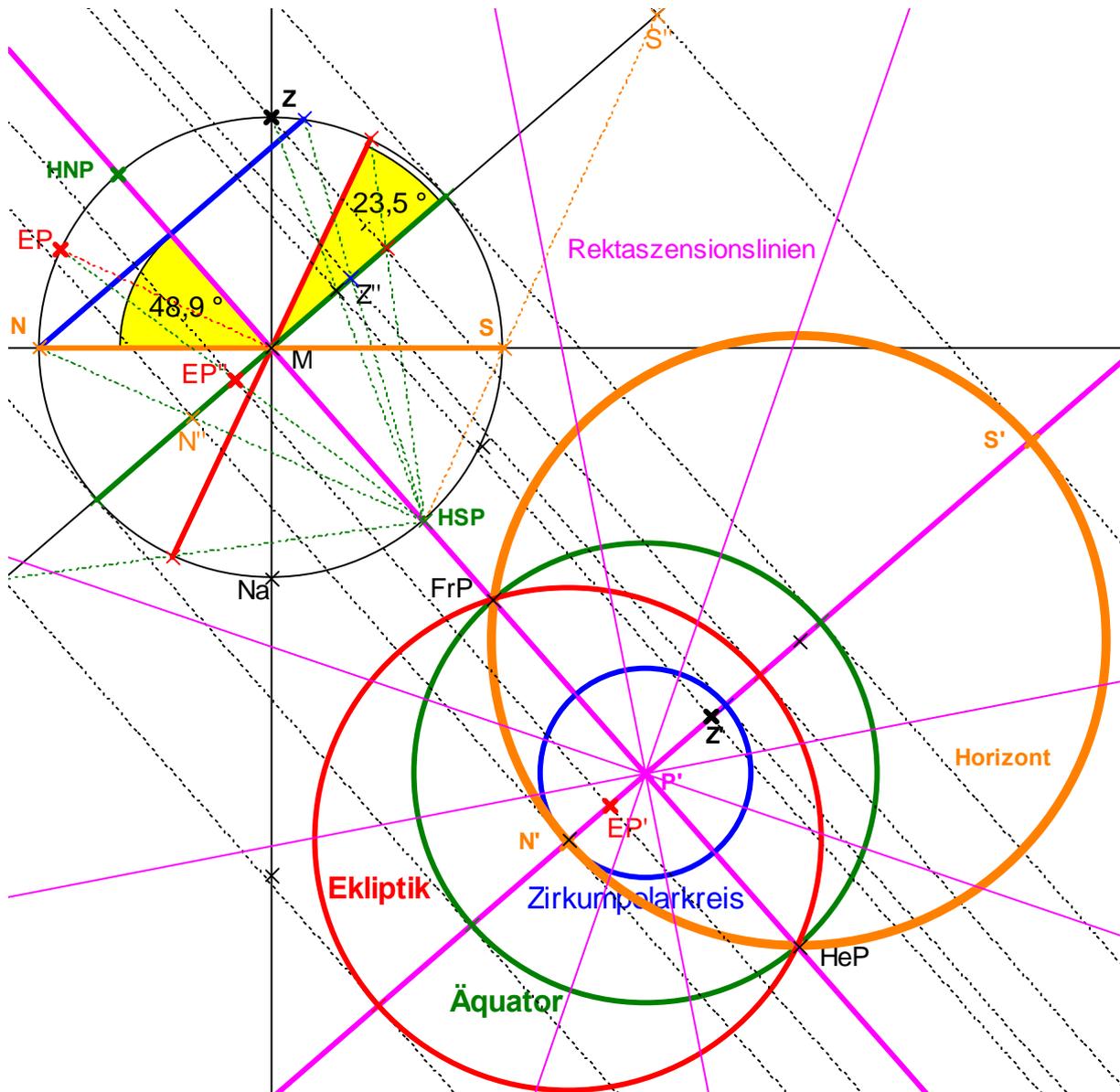
In der folgenden Zeichnung sind die Bilder bei dieser Projektion aus HSP mit P'' usw. bezeichnet. Sie liegen alle auf der im Aufriss projizierend, d. h. als Gerade (grün), erscheinenden Äquatorebene.

Anschließend wurde die Äquatorebene umgeklappt in die Zeichenebene und nach rechts unten herausgezogen. Die Bilder bei dieser Abbildung sind dann mit P' usw. bezeichnet. Wegen der Kreistreue sind die Bilder des Äquators, der Ekliptik und des Zirkumpolarkreises ebenfalls wieder Kreise.

Die Bilder der Rektaszensionslinien sind Halbgeraden durch P' (weil die Urbilder als Meridianhalbkreise durch das Zentrum HSP und durch den Nordpol HNP, das Urbild von P' verlaufen) und sie werden winkeltreu abgebildet.

Man beginnt die Zeichnung mit dem Horizont, Zenit und Nadir sowie Nord- und Südpunkt im Horizont. Dann werden die Pole, der Äquator, die Ekliptik und ihr Pol (EP) eingezeichnet. Frühlings- und Herbstpunkt ergeben sich als Schnittpunkte von Äquator und Ekliptik. Der Kreis der Zirkumpolarität ist ein Deklinationskreis und deshalb konzentrisch zum Äquator.

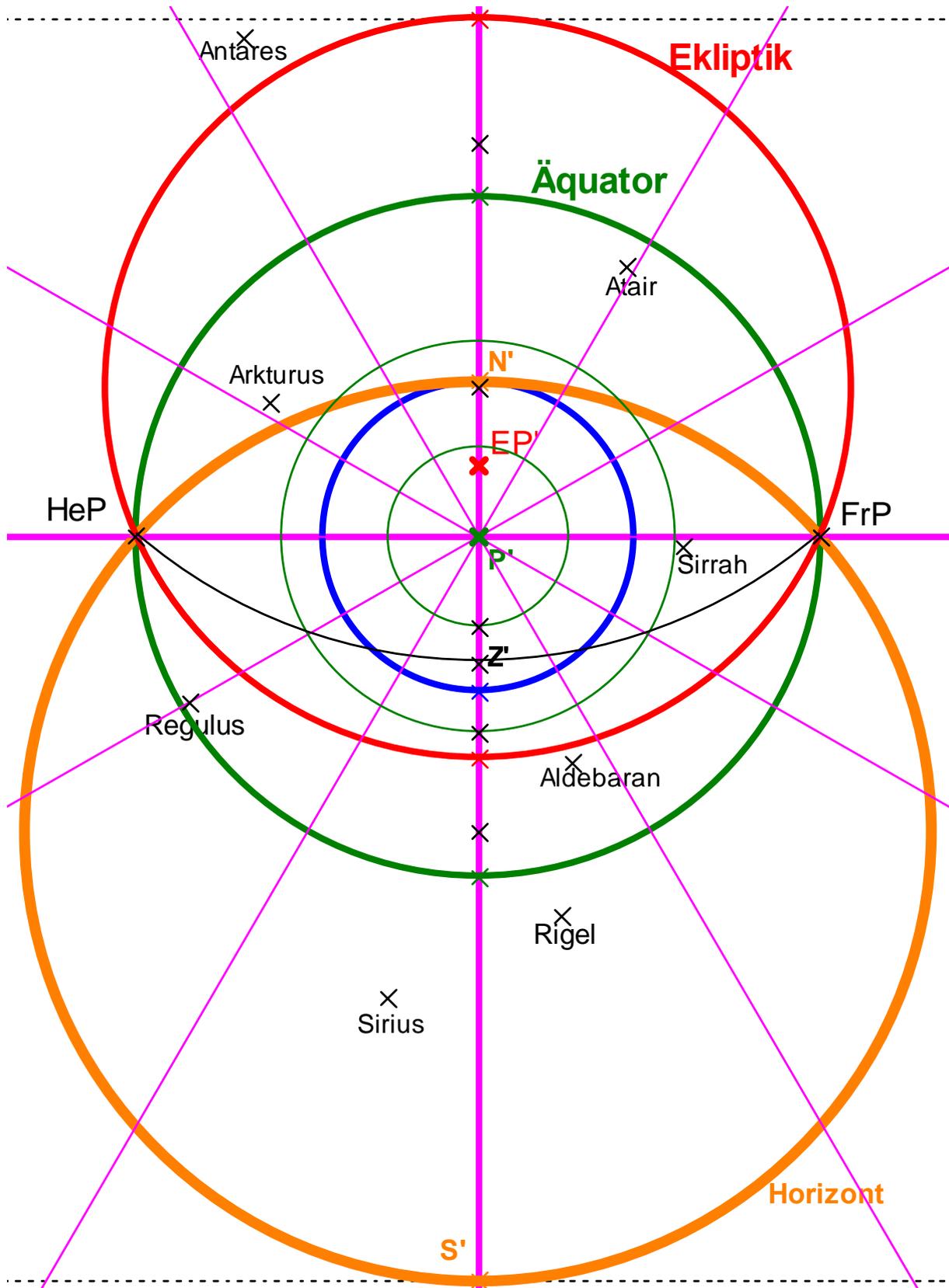
Entwurf einer Sternkarte durch stereografische Projektion aus dem Himmelssüdpol HSP auf die Äquatorebene



Daraus erhält man die Sternkarte, indem man die Projektion in die übliche Lage in die Zeichenebene umklappt. Wir haben in der folgenden Abbildung die Deklinationskreise für 30° und 60° ergänzt und schließlich noch die ungefähre Lage einiger bekannter Sterne eingetragen (Rigel, Aldebaran, Sirius, Regulus, Antares, Arkturus, Atair, Sirrah).

In diese Sternkarte kann nun jeder bekannte Stern mit Hilfe seiner Koordinaten Deklination und Rektaszension eingetragen werden.

Sternkarte aus stereografischer Projektion



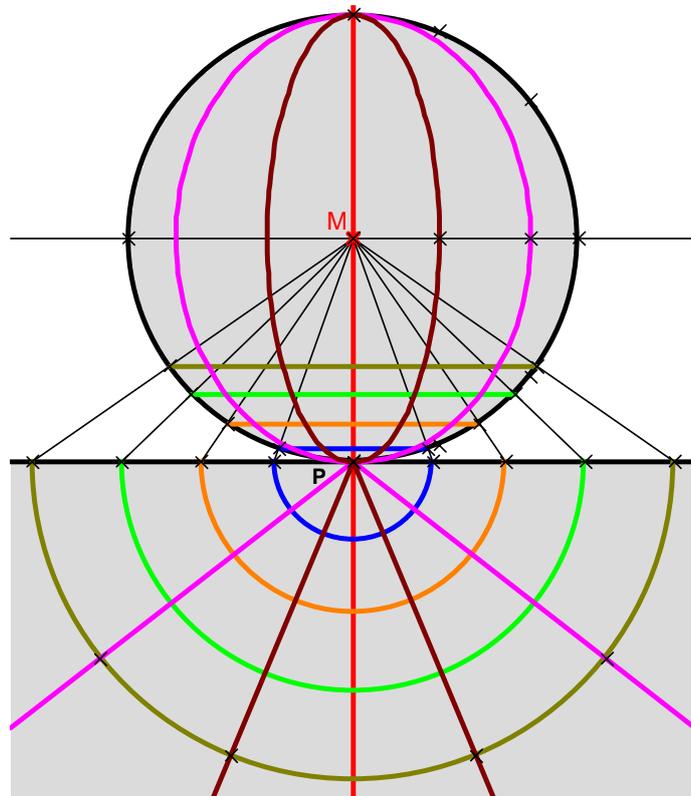
Gnomonische Projektion (geradwegig; Großkreiskarte)

Die Kugeloberfläche wird aus dem Mittelpunkt M auf eine Berührebene im Punkt P projiziert (polständig oder äquatorständig oder zwischenständig).

Dabei wird jeder Großkreis als Gerade abgebildet (weil die Projektionsebene durch das Zentrum M verläuft). Beliebige andere Kreise werden stets in Kegelschnitte abgebildet.

Die Vorteile dieser Karten liegen in der Handhabung bei der Navigation: Start- und Zielpunkt werden geradlinig verbunden. Dann werden geeignete Zwischenpunkte festgelegt, zwischen denen jeweils eine einfache Loxodromennavigation durchgeführt wird.

Diese Kartenart wird auf Grund ihres Gebrauchs oft einfach als **Seekarte** bezeichnet.



Polständig:

Die Meridiane werden als Geraden durch P', die Breitenkreise als konzentrische Kreise um P' abgebildet.

Äquatorständig:

Die Breitenkreise werden als Hyperbeln, die Meridiane als Geraden abgebildet.

Mercator-Entwurf:

Die Mercator-Karten entstehen nicht als Ergebnis einer Projektion, sondern werden berechnet.

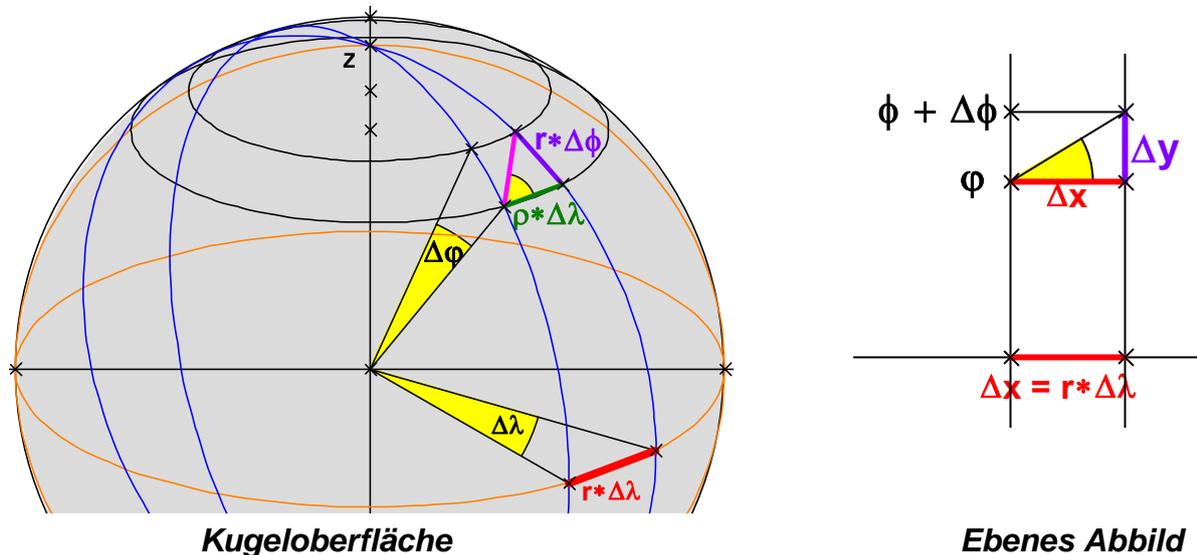
[G. Kremer (Mercator) lebte von 1512 bis 1594 und war Geograf und Kartenzeichner in Duisburg. Von 1569 stammt die erste große Weltkarte Mercators.]

Beim Mercator-Entwurf werden zwei Forderungen gestellt:

1. **Loxodromen**, also die Linien konstanten Kurses, sollen **als gerade Linien** erscheinen, insbesondere also auch Meridiane und Breitenkreise.
2. Die Abbildung soll **winkeltreu** erfolgen.

Aus 1. und 2. folgt, dass die Meridiane und die Breitenkreise zwei zueinander orthogonale Parallelbüschel bilden müssen. In der geografischen Breite φ hat der Breitenkreis den Radius $\rho = r \cdot \cos \varphi$. Wird nun z. B. der Äquator längentreu abgebildet, so wird dabei der Breitenkreis auf der Breite φ um den Faktor $\frac{1}{\cos \varphi}$ zu lang. Wegen der Forde-

rung 2. müssen daher auch die Längengrade entsprechend gestreckt werden. Der Entfernungsmaßstab ist also breitenabhängig und für feste geografische Breite in alle Richtungen gleich. Wir werden diese Abhängigkeit an folgenden Skizzen erläutern und berechnen. Die linke Skizze stellt das Koordinatennetz in Länge λ und Breite φ auf der Kugeloberfläche dar, die rechte das daraus entstehende nach Mercator berechnete rechtwinklige Netz der x-y-Koordinatenlinien in der Ebene.



Im Original (linkes Bild) gilt bei der geografischen Breite φ die folgende Bedingung im Steigungsdreieck:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r \cdot \Delta \varphi}{\rho \cdot \Delta \lambda} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \lambda \cdot \cos \varphi}$$

In der Bildebene gilt jedoch für das Steigungsdreieck
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{r \cdot \Delta \lambda}.$$

Durch Gleichsetzung und Grenzübergang erhält man daraus die Differentialgleichung
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{r}{\cos \varphi},$$
 und als deren Lösung die Funktion $y = r \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$ die die Abhängigkeit der y-Werte von der geografischen Breite beschreibt. Gemäß dieser Beziehung kann man nun eine φ -y-Tabelle oder ein Maßstabsdiagramm aufstellen und die Bildpunkte jeweils errechnen.

Die Mercatorkarte ist für die Polgebiete unbrauchbar, dort werden nämlich die Maßstäbe viel zu stark verzerrt ($\cos \varphi$ geht gegen 0). Sie ist jedoch **die** Seekarte für See- und Luftnavigation schlechthin, weil Linien konstanten Kurses (Loxodromen) immer Geraden sind.

Ein übliches Navigationsschema verläuft nun wie folgt:

1. In eine **Großkreiskarte** werden **Orthodromen** (kürzeste Linien; Großkreisbögen) geradlinig zwischen Start- und Zielort eingetragen.
2. Geeignete **Zwischenpunkte** auf den Orthodromen werden in eine **Mercatorkarte** übertragen und dort jeweils geradlinig, also durch **Loxodromen**, mit einem Streckenzug vom Start- bis zum Zielort verbunden.
3. Man navigiert nun von Teilpunkt zu Teilpunkt der Orthodrome stückweise jeweils auf Linien konstanten Kurses, also den Loxodromen (Teilstrecken des Streckenzuges).

13. Grundlagen der Navigation

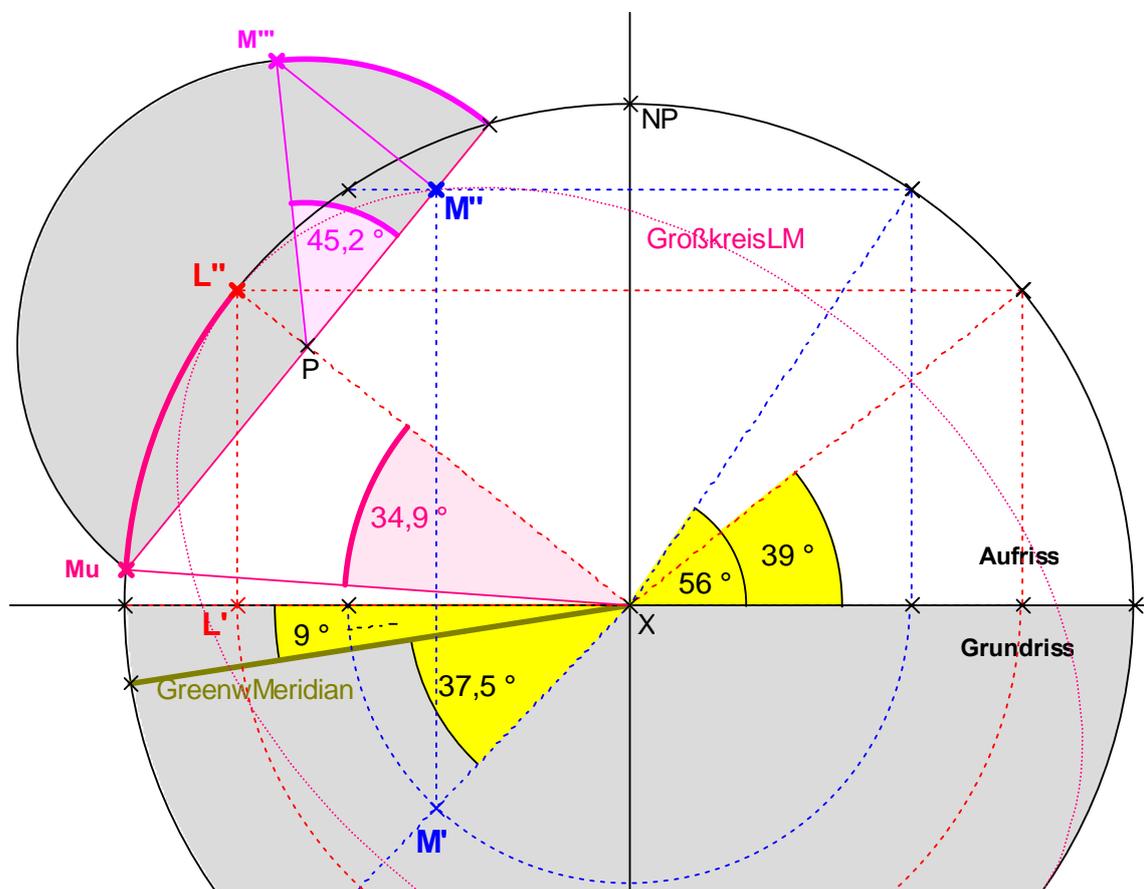
Flug- und Schiffsnavigation benötigen Methoden der Geometrie auf der Erdoberfläche, also auf einer Kugelfläche (näherungsweise). Bezüglich der Grundtatsachen in der Kugelgeometrie verweisen wir deshalb auf die bisherigen Abschnitte etwa zur Kugelgeometrie und weiteren Themen (z. B. Loxodromen und Orthodromen). Bisher wurde gezeigt, wie man Orthodromen und sphärische Abstände zwischen bekannten Orten konstruiert und berechnet. Ergänzen wollen wir für diesen Teil nur eine zeichnerische Möglichkeit zur Bestimmung des Kurswinkels für den Anfangskurs auf einem Großkreisbogen.

Bestimmung des Start-Kurswinkels für einen Großkreisbogen:

Wir wählen als Beispiel den Startort Lissabon (39° Nord; 9° West) und den Zielort Moskau (56° Nord; $37,5^\circ$ Ost).

Zur einfachen Zeichnung wählen wir Lissabon im Aufriss auf der Kontur als L'' auf der entsprechenden Breite von 39° . Den Breitenkreis von Moskau kann man im Aufriss sofort auf 56° Nord eintragen und in den Grundriss übernehmen. Der Meridian von Greenwich bildet mit dem von Lissabon im Grundriss den Winkel 9° (westliche Länge von Lissabon). Der Meridian von Moskau bildet im Grundriss mit dem von Greenwich den Winkel $37,5^\circ$ (östliche Länge von Moskau). Damit hat man M' als Schnitt von Meridian und Breitenkreis und kann M'' im Aufriss mit Hilfe eines Ordners konstruieren.

Für die *Bestimmung der Länge des Großkreisbogens* drehen wir den Bogen LM im Auf-



riss um die Achse X-P-L'' bis M auf der Kontur als Mu erscheint. Man erhält als Großkreisentfernung den Wert 34,9° das entspricht der Entfernung von 3 881 km. Die trigonometrische Berechnung ergibt den Winkel 34,83° und die Länge 3 872 km.

Zur *Bestimmung des Kurswinkels beim Start*, das ist der Winkel zwischen den Großkreisbögen LN (Meridian von L) und dem Großkreisbogen LM, klappen wir den Schnittkreis senkrecht zu LX durch M (das ist der Kreis um den Punkt P senkrecht zu X-P-L'') um die Klappachse PM'' in die Zeichenebene um und erhalten den umgeklappten Punkt M'''. Der Winkel M''-P-M''' ist der gesuchte Kurswinkel und ergibt den Wert 45,2°.

Berechnung des Kurswinkels beim Start

Der Kurswinkel beim Start wird angegeben als Ostabweichung des Großkreisbogens Start-Ziel vom Nordkurs. Es handelt sich also um den Winkel NP-L-M in unserem Eulerdreieck L-NP-M. Nach Berechnung der dritten Seite LM sind alle drei Seitenlängen bekannt, und wir können den Seitenkosinussatz zur Berechnung des Kurswinkels verwenden:

Wir lösen den Kosinussatz auf nach dem Kosinus des Winkels:

$$\text{Seitenkosinussatz: } \cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a * \cos b}{\sin a * \sin b}$$

Für unseren Fall ergibt dies:

$$\begin{aligned} \cos (\angle \text{NP-L-M}) &= \frac{\cos(\text{NP-M}) - \cos \text{LM} \bullet \cos(\text{L-NP})}{\sin \text{LM} \bullet \sin(\text{L-NP})} = \frac{\cos 34^\circ - \cos 34,83^\circ \bullet \cos 51^\circ}{\sin 34,83^\circ \bullet \sin 51^\circ} \\ &= 0,70396.. \end{aligned}$$

und daraus erhält man den gesuchten Startwinkel zu $\angle \text{NP-L-M} = 45,25^\circ$ in sehr guter Übereinstimmung mit der Zeichnung.

Hinweis:

Legt man sich eine DYNAGEO-Zeichnung mit variablem Start- und Zielort (Vari-Navi.geo) an, so kann man durch einfaches Einstellen der beiden Koordinaten der Orte die Ergebnisse sphärische Entfernung und Start-Kurswinkel für beliebige Start-bzw. Zielorte sofort ablesen.