

# **Einführung in die Endliche Geometrie**

Prof. Siegfried Krauter  
Pädagogische Hochschule  
Ludwigsburg

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Axiomatische Geometrie</b>	
1.1 Einführende Beispiele für Inzidenzstrukturen	4
1.2 Das Axiomensystem für affine Inzidenzebenen	9
1.3 Minimalsätze und Struktursätze über affine Inzidenzebenen	12
1.4 Untersuchungen an den affinen Inzidenzebenen der Ordnung 2 und 3	17
1.5 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben	19
<b>2. Analytische Geometrie</b>	
2.1 Die Idee der Analytischen Geometrie	25
2.2 Endliche Körper	27
2.3 Beispiele affiner Koordinatenebenen über endlichen Körpern	34
2.4 Allgemeines über affine Ebenen über den Körpern $\text{GF}(p^k)$	45
2.5 Affine Räume über endlichen Körpern	48
2.6 Das Prinzip der Körpererweiterungen	49
2.7 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben	52
<b>3. Projektive Ebenen</b>	
3.1 Von der affinen zur projektiven Ebene	57
3.2 Das Axiomensystem für projektive Inzidenzebenen	61
3.3 Minimalsätze und Struktursätze über projektive Inzidenzebenen	65
3.4 Die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal	67
3.5 Die projektive Koordinatenebene über einem Körper	70
3.6 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben	72
<b>4. Ergänzungen</b>	
4.1 Orthogonalisierbarkeit endlicher affiner Ebenen	77
4.2 Abbildungen in affinen Inzidenzebenen	81
4.3 Abbildungen in projektiven Inzidenzebenen	90
4.4 Ovale in projektiven endlichen Ebenen	94
4.5 Algebraisierbarkeit affiner Inzidenzebenen	101
4.6 Lateinische Quadrate und affine Ebenen	107
Literaturhinweis	112

## Vorwort

Warum behandelt man Endliche Geometrie in der Lehrerbildung, das kommt doch als Schulstoff überhaupt nicht in Frage?

In der Tat ist diese Frage berechtigt. Ich halte dennoch dieses Teilgebiet der Mathematik für eine ausgezeichnete Möglichkeit, elementare Kenntnisse der Schulmathematik zu verfremden (und dadurch „fragwürdig“ zu machen), unter abstrakteren Gesichtspunkten zu behandeln und verschiedene Teilgebiete der Elementarmathematik integrierend aufzugreifen.

Das Axiomensystem der affinen oder projektiven Inzidenzebenen ist mit nur drei Axiomen sehr einfach und übersichtlich, deshalb eignet sich dieses Gebiet viel besser für ein exemplarisches Beispiel axiomatischen Arbeitens als etwa die reelle euklidische Elementargeometrie.

In der endlichen Geometrie kommen viele verschiedene Anwendungen elementarer Mathematik zur Anwendung: Kombinatorische Zählmethoden bei Anzahlfragen, algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume) bei den affinen Koordinatenebenen über Körpern, elementare Zahlentheorie (Rechnen mit Restklassen) analytische Geometrie und lineare Algebra um nur die wichtigsten zu nennen. Nicht zuletzt berührt das Thema noch die Graphentheorie und beim axiomatischen Arbeiten natürlich die Logik. Schließlich kann man durch die Behandlung affiner und projektiver Abbildungen auch einen sehr schönen und klärenden Überblick über die Geometrie im Sinne von Felix Kleins Erlanger Programm anbieten.

Aus diesem Grund, und weil man vieles durch einfaches explorierendes Vorgehen leicht selbst erforschen kann, scheint mir das Thema Endliche Geometrie geradezu ideal für die Ausbildung von Mathematiklehrern jeder Stufe zu sein. Man kommt in vielen Fällen ohne großen Theorieaufwand zu interessanten meist einfach zu lösenden Fragestellungen auf elementarem Niveau. Vieles kann durch Ausprobieren endlich vieler Fälle gelöst werden und animiert deshalb zum Explorieren. Auf der anderen Seite kommt man auch sehr schnell an die Grenzen der Wissenschaft, denn viele Ergebnisse der Endlichen Geometrie sind relativ neu und einige einfach zu formulierende Fragestellungen (z. B. die Frage nach der Existenz von affinen Ebenen der Ordnung 10 oder 14 u. a. m.) führen auf bis heute ungelöste Fragen. So bietet sich bei diesem Gebiet durchaus auch ein Ausblick auf die Geschichte der Mathematik vom Altertum bis in die Gegenwart an.

Ich wünsche allen Lesern viel Freude beim Entdecken.  
Genießen Sie den Stolz auf selbst Entdecktes.

Ludwigsburg im Winter 2005/2006

Prof. Siegfried Krauter

# 1. Axiomatische Geometrie

## 1.1 Einführende Beispiele für Inzidenzstrukturen

Bevor wir eine Definition des Begriffs „Inzidenzstruktur“ geben, wollen wir einige Beispiele und Darstellungsformen kennen lernen.

### Beispiel 1:

$S$  = Menge von Studierenden = {1, 2, 3, 4, 5}

$P$  = Menge von Professoren = {A, B, C, D}

Wir betrachten die Relation  $I$  zwischen *Studierenden* und *Professoren*, die durch die inhaltliche Angabe „... ist Hörer bei...“ definiert ist. Die Relation  $I$  ist eine Menge von geordneten Paaren der Form  $(s; p)$ , also eine Teilmenge des kartesischen Produkts  $S \times P$ .

	A	B	C	D
1	x	x		x
2	x	x		
3	x			
4	x	x	x	x
5	x			x

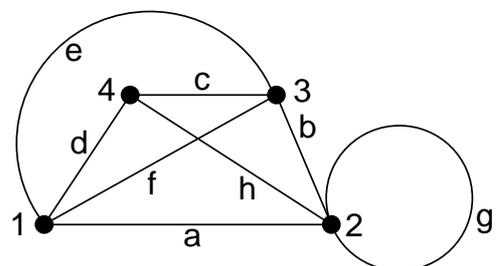
Nebenstehend ist sie dargestellt durch eine Ankreuztabelle bzw. eine Inzidenzmatrix.

### Aufgabe 1:

Was kann man aus der Inzidenztabelle von Beispiel 1 alles ablesen z. B. an möglichen Aussagen über die 5 Studierenden oder die 4 Professoren?

### Beispiel 2:

Ein **Netz** oder **Graph** besteht aus einer Menge von *Ecken* (*Punkten*, *Knoten*) und einer Menge von *Kanten* (*Bögen*). Jede Kante verbindet entweder zwei Ecken miteinander oder nur eine mit sich selbst (in diesem Fall spricht man von einer *Schlinge*). Eine Ecke „inzidiert“ mit einer Kante, wenn (mindestens) ein Kantenende in dem betreffenden Punkt liegt. Erstellen Sie für das angegebene Netz eine Inzidenztabelle.

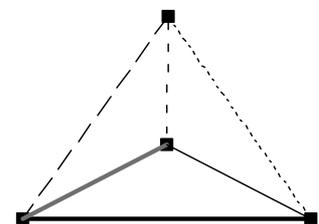


### Aufgabe 2:

Stellen Sie für das nebenstehende Netz mit vier *Ecken* und sechs *Kanten* eine Inzidenztabelle auf und geben Sie Besonderheiten an (Regularitäten etc.).

Man kann die Ecken bzw. Kanten des Netzes auch interpretieren als „Punkte“ bzw. „Geraden“ einer bestimmten Geometrie.

Die hier dargestellte Struktur wird sich als die einfachste unserer „endlichen affinen Ebenen“ herausstellen.



### Beispiel 3:

Bei einem Schachturnier gibt es einerseits die Menge  $S$  der teilnehmenden *Spieler* und andererseits die Menge  $P$  der gespielten *Partien*. „Inzidenz“ zwischen Spieler und Partie wird erklärt durch Teilnahme des Spielers an der betreffenden Partie.

**Aufgabe 3:**

Stellen Sie eine Inzidenztabelle auf und zeichnen Sie ein Netz für ein Schachturnier mit folgenden Bedingungen:

- A1: Für je zwei Spieler  $X$  und  $Y$  gibt es genau eine Partie  $q$ , die sie gegeneinander spielen.
- A2: Zu jeder Partie  $q$  und jedem Spieler  $X$ , der nicht an der Partie  $q$  teilnimmt, gibt es genau eine Partie  $r$ , an der der Spieler  $X$  teilnimmt, aber keiner der Spieler der Partie  $q$ .
- A3: Es gibt mehr als zwei Spieler im Turnier.

**Beispiel 4:**

Gegeben sind die Mengen  $W = \{\text{AMT, TOR, RAD, DOM}\}$  von vier *Wörtern* und  $B = \{\text{a, d, m, o, r, t}\}$  von sechs *Buchstaben*. Inzidenz zwischen Wörtern und Buchstaben wird erklärt durch „...enthält den Buchstaben...“.

**Aufgabe 4:**

Stellen Sie eine Inzidenztabelle auf und zeichnen Sie ein Netz für das Beispiel 4. Kommt Ihnen dieser Fall schon bekannt vor?

**Beispiel 5:**

Ein Netzplan eines U-Bahn-Netzes enthält eine Menge von „Stationen“ und eine Menge von „Linien“. Inzidenz zwischen Stationen und Linien wird erklärt durch „... ist Haltepunkt an der Linie ...“.

**Aufgabe 5:**

- a) Entwerfen Sie selbst einen einfachen Netzplan und eine zugehörige Inzidenztabelle.
- b) Entwerfen Sie einen Netzplan mit möglichst wenigen Stationen, der den folgenden drei Bedingungen genügt:
  - P1: Von jeder Station zu jeder anderen gibt es genau eine „direkte“ Linie („direkt“ im Sinne von „ohne Umsteigen“).
  - P2: Je zwei verschiedene Linien haben stets genau eine Station gemeinsam.
  - P3: Es gibt mindestens vier Stationen, von denen keine drei an einer Linie liegen.

Das Ergebnis dieser Aufgabe wird sich als einfachstes Beispiel einer „endlichen projektiven Ebene“ herausstellen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe 2.

**Beispiel 6:**

Bei einem Skatturnier gibt es *Spieler* und *Skatrunden*. Jede Skatrunde besteht aus drei Spielern. Ein Skatturnier wird nach folgenden Forderungen organisiert (vgl. Aufgabe 3):

- A1: Für zwei beliebige Spieler  $A$  und  $B$  gibt es genau eine Runde, an der beide teilnehmen.
- A2: Ist  $r$  irgendeine Runde und  $A$  ein beliebiger Spieler, der nicht zu dieser Runde  $r$  gehört, so gibt es genau eine Runde  $s$ , an der der Spieler  $A$  teilnimmt, jedoch kein Spieler aus der Runde  $r$ .
- A3: Es gibt mindestens 3 Spieler, die nicht alle zur selben Skatrunde gehören.

**Aufgabe 6:**

- a) Geben Sie für das Turnier aus Beispiel 6 einen Spielplan (Inzidenztabelle) und ein Netz an.
- b) Wie viele Spieler sind beteiligt, wie viele Runden werden von jedem gespielt?
- c) Wie viele Runden gibt es beim Turnier insgesamt?

Nach diesen einführenden Beispielen können wir zur Definition der ihnen allen gemeinsamen Struktur übergehen: Es gab jeweils zwei nichtleere Mengen, die Menge  $P$  der **Punkte** und die Menge  $B$  der **Blöcke**. Zwischen diesen Mengen bestand eine Relation  $I \subseteq P \times B$ , die wir Inzidenz nennen wollen.

**Definition:**

**Ein Tripel von drei nichtleeren Mengen  $(P, B, I)$  mit  $I \subseteq P \times B$  heißt eine Inzidenzstruktur. Die Elemente von  $P$  nennen wir Punkte die von  $B$  Blöcke.**

Möglichkeiten zur Darstellung von Inzidenzstrukturen sind Paarmengen, Inzidenztabeln oder Graphen (Netze). Endliche Geometrien sind Beispiele von Inzidenzstrukturen.

Wir wollen keine vertiefte Behandlung von besonderen Inzidenzstrukturen (Blockpläne, taktische Konfigurationen) betreiben, aber doch wenigstens auf eine wichtige Überlegung hinweisen.

**Man kann die Anzahl der Inzidenzen in der Inzidenztabelle entweder zeilenweise durch Aufsummieren über die sämtlichen Punkte (Elemente von  $P$ ) oder spaltenweise über die sämtlichen Blöcke (Elemente von  $B$ ) bestimmen und erhält in beiden Fällen dieselbe Anzahl.**

Als kleine Anwendung dieser Idee wollen wir einige grundlegende Sätze über spezielle Inzidenzstrukturen thematisieren.

**Definition:**

**Eine Inzidenzstruktur  $(P, B, I)$  heißt ein Netz oder Graph, falls für alle  $b \in B$  gilt: Die Anzahl der Punkte, die mit  $b$  inzidieren ist entweder 1 (Schlingen) oder 2 (Verbindungskanten).**

In einem Netz nennt man die Anzahl der in einer Ecke liegenden Kantenenden die **Ordnung** (oder den **Eckengrad**) der Ecke.

Will man nun z. B. irgendein Netz zeichnen, das genau drei Ecken von Ordnung drei enthält, so wird man scheitern, ebenso mit genau drei Ecken von Ordnung fünf oder genau fünf Ecken von Ordnung drei. Es ist nicht möglich, ein Netz mit genau drei Punkten von ungerader Eckenordnung zu zeichnen. Probieren Sie dies aus, warum geht es nicht?

**Satz 1:**

**In einem beliebigen Netz ist die Summe aller Eckenordnungen über sämtliche vorhandenen Ecken stets eine gerade Zahl.**

**Aufgabe 7:**

Beweisen Sie den vorstehenden Satz 1.

Hinweis: Zählen Sie die Kantenenden auf zwei verschiedene Weisen.

**Satz 2:**

**In einem beliebigen Netz ist die Anzahl der Ecken mit ungerader Eckenordnung stets eine gerade Zahl.**

**Aufgabe 8:**

Beweisen Sie den vorstehenden Satz 2.

Hinweis: Zählen Sie die Kantenenden auf zwei verschiedene Weisen wie in Aufgabe 7.

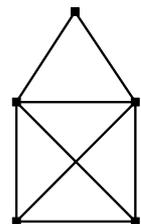
**Satz 3:**

**Besitzt eine endliche Inzidenzstruktur genau  $v$  Punkte ( $v = \text{vertices}$ ) und genau  $b$  Blöcke, und inzidiert jeder Block mit genau  $k$  Punkten und jeder Punkt mit genau  $r$  Blöcken, so gilt:  $v \cdot r = b \cdot k$ .**

**Aufgabe 9:**

Beweisen Sie den vorstehenden Satz durch Abzählen der Inzidenzen auf zwei verschiedene Weisen.

Zum Schluss wollen wir einen interessanten Satz über Netze ohne Beweis ergänzen. Es geht dabei um folgende Fragestellung: Unter welchen Umständen kann man die sämtlichen Kanten eines Netzes so in einem Zug ohne abzusetzen zeichnen, dass man *jede Kante genau ein Mal* zeichnet? Ein Beispiel eines solchen Netzes ist das allen Kindern wohlbekannte „Haus vom Nikolaus“. Zeichnen Sie dieses in einem Zug. Kann man an jeder beliebigen Ecke beginnen oder enden? Welche Vermutung haben Sie?

**Satz 4:**

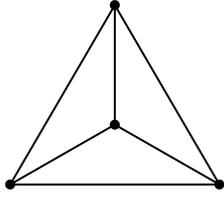
- a) Ein Netz ist genau dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufbar, wenn jede Ecke von gerader Ordnung ist. Jede Ecke kann als Anfangspunkt (und gleichzeitig als Endpunkt) dienen.
- b) Ein Netz ist genau dann in einem offenen Kantenzug durchlaufbar, wenn es genau zwei Ecken ungerader Ordnung besitzt. Diese beiden Ecken sind Anfang bzw. Ende jeder möglichen Durchlaufung.

Netze die man in einem Zug ohne abzusetzen nachzeichnen kann, nennt man **unikursale** Netze und eine solche Durchlaufung zu Ehren von Leonhard Euler (1707 – 1783) eine **Eulerlinie**.

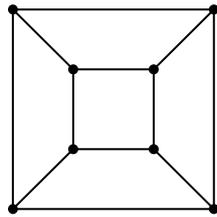
**Aufgabe 10:**

- a) Welche der folgenden Netze sind unikursal?
- b) In welchen Punkten liegen ggf. Anfang und Ende der Durchlaufung?
- c) Für welche Netze gibt es sogar eine geschlossene Eulerlinie?

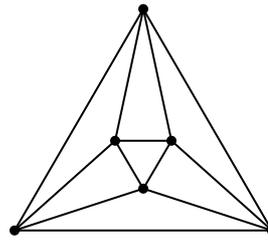
(1) Kantennetze von vier der fünf platonischen Körper:



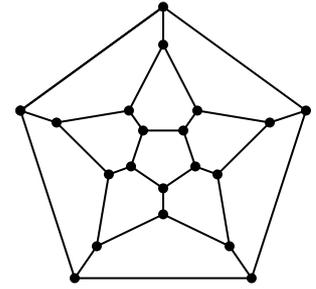
Tetraedernetz



Würfelnetz

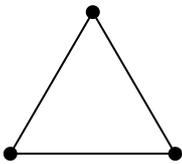


Oktaedernetz

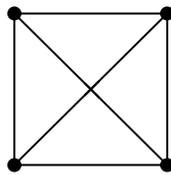


Dodekaedernetz

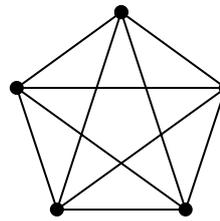
(2) Vollständige Netze von 3 bzw. 4 bzw. 5 bzw. 6 Punkten.



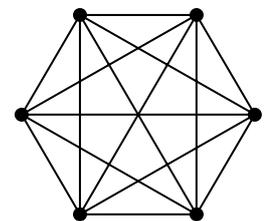
$V_3$



$V_4$

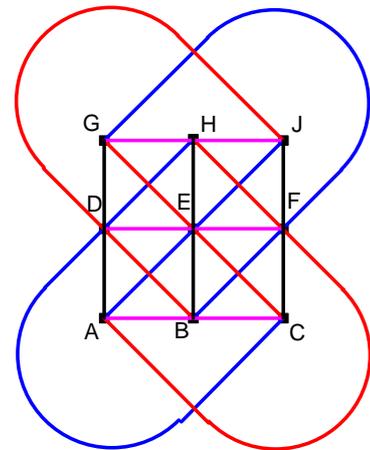
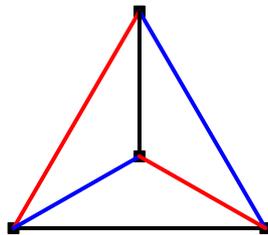


$V_5$

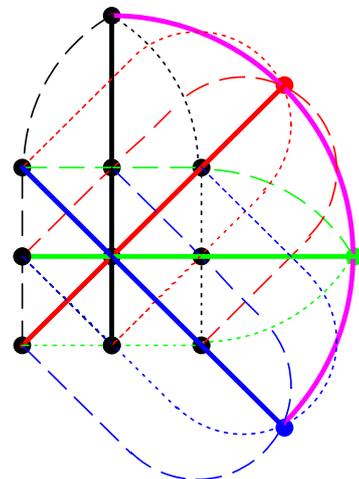
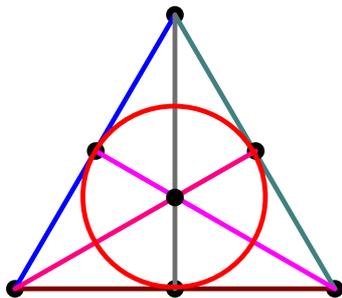


$V_6$

(3) Affine Ebenen der Ordnung 2 bzw. 3:



(4) Projektive Ebenen der Ordnung 2 bzw. 3:



## 1.2 Das Axiomensystem für affine Inzidenzebenen

Wir wollen nun spezielle Inzidenzstrukturen  $(P, B, I)$  studieren, die wir in der Geometrie antreffen. Die Punkte der Geometrie sind dabei die Elemente von  $P$  und die Geraden der Geometrie sind die Elemente von  $B$ , also die Blöcke. Inzidenz zwischen einem Punkt  $X$  und einer Gerade  $g$  liegt vor, wenn der Punkt  $X$  auf der Geraden  $g$  liegt bzw. die Gerade  $g$  durch den Punkt  $X$  verläuft.

Was ist nun für die Verhältnisse der so genannten „affinen Geometrie“ charakteristisch?

Zunächst einmal gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten stets genau eine **Verbindungsgerade**. Dies werden wir daher als erstes fordern.

Ferner gilt in der uns bekannten affinen Geometrie das so genannte **Parallelenaxiom**: Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es genau eine Gerade  $h$ , auf der  $P$  liegt, die jedoch mit  $g$  keinen gemeinsamen Punkt besitzt, also zu  $g$  parallel ist.

Eigentlich könnten wir mit diesen beiden Forderungen auskommen, aber damit wir wirklich eine Ebene – und nicht etwa nur eine einzige Gerade – erhalten, fordert man noch eine gewisse **Reichhaltigkeit**, nämlich die Existenz eines echten Dreiecks, also dreier Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen.

### Definition:

**Eine Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$  heißt eine affine Inzidenzebene, wenn folgende Axiome erfüllt sind:**

**A1: Axiom von der Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgerade:**  
Zu zwei beliebigen voneinander verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  existiert genau eine Gerade  $g$ , mit der die beiden Punkte inzidieren.

$$\forall_{A \neq B \in P} \exists_{g \in G} [(A, g) \in I \wedge (B, g) \in I]$$

**A2: Parallelenaxiom:**

Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht mit ihr inzidierenden Punkt  $A$  gibt es genau eine Gerade  $h$ , die mit  $A$  inzidiert und die mit  $g$  keinen gemeinsamen Punkt besitzt.

$$\forall_{A \in P} \forall_{g \in G \wedge (A, g) \notin I} \exists_{h \in G} [(A, h) \in I \wedge (\forall_{X \in P} (X, g) \in I \Rightarrow (X, h) \notin I)]$$

**A3: Reichhaltigkeitsaxiom:**

Es gibt mindestens drei verschiedene Punkte, die nicht mit einer Geraden inzidieren. (Es gibt ein echtes Dreieck).

$$\exists_{A, B, C \in P} \forall_{g \in G} [(A, g) \in I \wedge (B, g) \in I] \Rightarrow (C, g) \notin I]$$

Auf ein häufig auftretendes Missverständnis zu A3 sei aufmerksam gemacht:

A3 besagt nicht, dass jedes beliebige Tripel  $A, B, C$  von Punkten der affinen Ebene die Eigenschaft besitzt, dass nicht alle drei auf einer Gerade liegen.

A3 besagt nur, dass es *mindestens ein Tripel von Punkten der betreffenden Art* gibt.

Es geht im Folgenden darum, *ohne Rückgriff auf die Anschauung allein durch logisches Schließen* aus diesen drei Axiomen Folgerungen zu ziehen, um Kenntnisse über die durch die Axiome beschriebene Struktur zu gewinnen, also die Geometrie affiner Inzidenzebenen kennen zu lernen. Selbstverständlich sind uns schon Beispiele solcher Geometrien bekannt, denn die gewöhnliche reelle Ebene, die wir von der Schulgeometrie her kennen, erfüllt alle drei dieser Axiome. Eine nahe liegende und sehr einfache Folgerung wäre z. B. die Feststellung, dass zwei verschiedene Geraden höchstens einen gemeinsamen Punkt haben können.

Zunächst einmal wollen wir uns mit dem Axiomensystem selbst befassen. Vielleicht widersprechen sich ja die Axiome und es gibt gar keine Struktur der beschriebenen Art. Dieser Problemkreis ist die wichtigste Frage für jedes Axiomensystem: Wie steht es um die **Widerspruchsfreiheit** des Axiomensystems? Üblicherweise wird man sie dadurch beantworten, dass man ein Modell angibt, das die Axiome erfüllt. Wäre das Axiomensystem in sich selbst widersprüchlich, so könnte es ja durch kein Modell erfüllt werden.

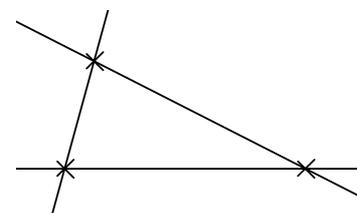
### Aufgabe 11:

Geben Sie ein Modell einer Inzidenzstruktur an, das die drei Axiome A1 bis A3 erfüllt und damit die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems garantiert.  
Hinweis: Orientieren Sie sich an den Beispielen aus Abschnitt 1.1.

Eine zweite, allerdings weniger wichtige, Frage betrifft die **Unabhängigkeit** des Axiomensystems. Es könnte ja durchaus sein, dass man allein mit Hilfe der Axiome 1 und 3 die Gültigkeit des Axioms A2 beweisen könnte, dann müsste man dieses gar nicht als Axiom fordern, sondern es wäre ein beweisbarer Satz. In diesem Fall wäre Axiom A2 von den beiden anderen abhängig und das Axiomensystem A1 bis A3 nicht unabhängig. Selbstverständlich ist man bestrebt, möglichst wenige Axiome zu fordern und versucht deshalb ein unabhängiges System anzugeben. Wie aber kann man die Unabhängigkeit der Axiome nachweisen?

Findet man ein Modell, in dem zwar die Axiome A1 und A3 gelten, das Axiom A2 jedoch nicht, dann kann das Axiom A2 nicht von A1 und A3 abhängig sein, denn sonst müsste es ja auch in dem erwähnten Modell erfüllt sein. A2 ist in diesem Fall dann sicher von A1 und A3 unabhängig.

Das ist aber eine ganz leichte Aufgabe, wie das nebenstehende Modell zeigt. In diesem gelten zwar A1 und A3, jedoch nicht A2. Damit ist die Unabhängigkeit des Axioms A2 von den beiden anderen nachgewiesen.



### Aufgabe 12:

Geben Sie je ein Modell für die Unabhängigkeit der Axiome A1 und A3 von den beiden anderen an.

Neben diesen beiden Kriterien überprüft man manchmal ein Axiomensystem auf seine **Vollständigkeit** – bzw. weniger weitgehend – seine **Monomorphie**. Hierbei geht es um die Frage, ob das Axiomensystem die betreffende Struktur vollständig bestimmt in dem Sinne, dass alle möglichen Modelle des Systems zueinander isomorph (d. h. strukturgleich) sind. Dass unser Axiomensystem A1 bis A3 **nicht vollständig** ist, zeigt man

dadurch, dass man zwei nicht zueinander isomorphe Modelle angibt, z. B. die nicht zueinander isomorphen Beispiele 3 und 4 im Abschnitt 1.1.

**Aufgabe 13:**

- a) Weisen Sie die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems P1 bis P3 aus Aufgabe 5 nach.
- b) Weisen Sie für das Axiomensystem P1 bis P3 aus Aufgabe 5 die Unabhängigkeit jedes der Axiome von den beiden anderen nach.

Hinweis: Wir lernen später weitere nicht isomorphe Modelle für das Axiomensystem P1 bis P3 kennen, die zeigen, dass dieses System nicht monomorph ist.

Wir stellen nochmals die möglichen Forderungen an ein Axiomensystem zusammen:

- Ein Axiomensystem ist **widerspruchsfrei**, wenn es ein Modell gibt, in dem alle Axiome des Systems erfüllt sind. Dies ist die Hauptforderung an jedes Axiomensystem.
- Ein Axiomensystem ist **monomorph** oder **kategorisch**, wenn es nur zueinander isomorphe Modelle besitzt.
- Ein Axiomensystem ist **vollständig**, wenn entweder jeder einschlägige Satz oder seine Negation aus ihm ableitbar ist. Jedes vollständige Modell ist von selbst monomorph.
- Ein Axiomensystem ist **unabhängig**, wenn jedes einzelne Axiom von den übrigen unabhängig ist.

Zusammenfassend halten wir fest:

**Das Axiomensystem A1 bis A3 für affine Inzidenzebenen ist zwar widerspruchsfrei und unabhängig, aber nicht kategorisch und erst recht nicht vollständig.**

### 1.3 Minimalsätze und Struktursätze über affine Inzidenzebenen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Strukturen endlicher affiner Inzidenzebenen genauer untersuchen - soweit dies die Axiome hergeben. Zunächst werden wir zur Vereinfachung der Sprechweise den Begriff der Parallelität von Geraden einführen:

**Definition:**

**Zwei Geraden  $a$  und  $b$  einer affinen Inzidenzebene nennen wir zueinander parallel, wenn sie entweder identisch sind, also  $a = b$ , oder wenn es keinen Punkt der Ebene gibt, der mit beiden Geraden inzidiert.**

Wir haben Parallelität so definiert, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, also eine reflexive, symmetrische und transitive Relation.

**Aufgabe 14:**

- a) Weisen Sie nach, dass die oben definierte Relation der Parallelität eine Äquivalenzrelation ist.
- b) Was sind die Äquivalenzklassen dieser Relation, d. h. die Mengen aller untereinander parallelen Geraden?
- c) Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen der Relation „parallel“ gibt es in den bisher bekannten affinen Inzidenzebenen von Beispiel 4 bzw. von Aufgabe 6?

**Die Äquivalenzklassen der Relation „parallel“ in der Menge der Geraden nennt man „Parallelscharen“ oder „Richtungen“.**

Bisher kennen wir nur zwei Modelle von affinen Inzidenzebenen, eine mit 4 Punkten und 6 Geraden und eine mit 9 Punkten und 12 Geraden (Beispiel 6 aus 1.1). Gibt es außer diesen noch weitere und wenn ja, solche mit möglichst wenigen Punkten und Geraden? Zu diesem Zweck überlegen wir uns, wie viele Punkte und Geraden es mindestens geben muss. Die Antworten darauf liefern die Minimalsätze.

**Satz (Minimalsatz):**

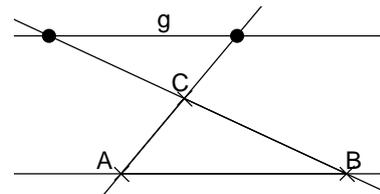
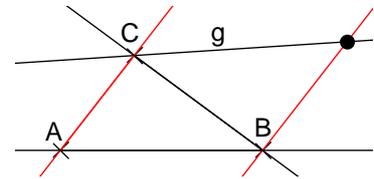
Für jede affine Inzidenzebene gilt:

- a) Mit jeder Geraden inzidieren mindestens zwei verschiedene Punkte.
- b) Mit jedem Punkt inzidieren mindestens drei verschiedene Geraden.
- c) Es gibt mindestens 4 verschiedene Punkte und 6 verschiedene Geraden.
- d) Zu jeder Geraden  $g$  gibt es einen Punkt  $P$ , der nicht mit  $g$  inzidiert.
- e) Zu jedem Punkt  $P$  gibt es eine Gerade  $g$ , wobei  $P$  nicht mit  $g$  inzidiert.

Beweis:

a) Sei  $g$  eine beliebige Gerade. Wegen A3 gibt es mindestens drei nichtkollineare Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- Ist  $g$  eine der Geraden  $AB$ ,  $BC$  oder  $CA$ , so ist unsere Behauptung bewiesen.
- Verläuft  $g$  durch genau einen der Punkte  $A$ ,  $B$  oder  $C$ , z. B. durch  $C$ , so ist  $g$  sicher nicht parallel zu  $AC$  und wird von der Parallelen zu  $AC$  durch  $B$  (die es nach A2 mit Sicherheit gibt) in einem von  $C$  verschiedenen Punkt  $D$  getroffen. Damit liegen zwei verschiedene Punkte auf  $g$ .
- Verläuft  $g$  durch keinen der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so kann  $g$  höchstens zu *einer* der drei Geraden  $AB$ ,  $BC$  bzw.  $CA$  parallel sein und wird von den beiden anderen in zwei voneinander verschiedenen Punkten geschnitten. Also gibt es zwei Punkte auf  $g$ .



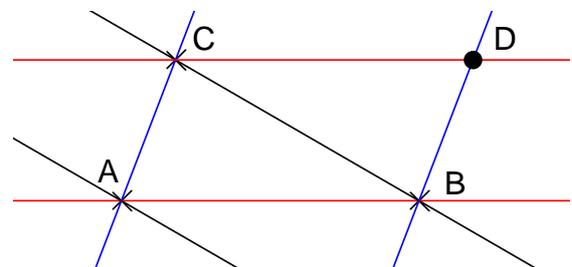
b) Wir geben nur Hinweise für die Beweisidee:

Ist  $P$  irgendein Punkt, so unterscheiden wir zwei Fälle:

- $P$  ist einer der in a) erwähnten und mit Sicherheit vorhandenen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  entsprechend dem Axiom A3. Dann ist unsere Behauptung richtig (warum?).
- Ist  $P$  von  $A$ ,  $B$  und  $C$  verschieden, so verlaufen durch  $P$  die Parallelen zu  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  und damit inzidiert  $P$  mit mindestens drei verschiedenen Geraden.

c) Zunächst gibt es wegen A3 mindestens drei nicht kollineare Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Wegen A1 gibt es die drei Verbindungsgeraden  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  und außerdem die drei Parallelen zu  $AB$  durch  $C$ , zu  $BC$  durch  $A$  und zu  $CA$  durch  $B$ . Diese drei sind alle voneinander verschieden und verschieden von  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$ . Weisen Sie dies im Einzelnen nach. Damit haben wir schon 6 verschiedene Geraden.



Nun sind z. B. die Parallelen zu  $AB$  durch  $C$  und zu  $AC$  durch  $B$  nicht zueinander parallel (warum ergäbe das einen Widerspruch?) und daher muss es einen Punkt  $D$  geben, der mit beiden inzidiert. Dies kann aber keiner der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  sein (weisen Sie dies nach). Also haben wir mindestens 4 verschiedene Punkte.

Ausdrücklich möchten wir darauf hinweisen, dass wir nicht bewiesen haben, – und das auch gar nicht können – dass die Parallele zu  $BC$  durch  $A$  ebenfalls noch durch den Punkt  $D$  verläuft. Dies trifft zwar im Fall des Minimalmodells (Tetraedermodell) zu, jedoch nicht bei anderen Modellen.

### Aufgabe 15:

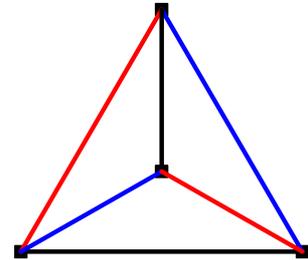
Beweisen Sie die Aussagen d) und e) des vorhergehenden Minimalgesetzes.

Im vorhergehenden Satz (Minimalsatz) haben wir bewiesen, dass jede affine Inzidenzebene mindestens 4 Punkte und 6 Geraden haben muss. Da wir jedoch schon ein Modell mit genau diesen Anzahlen kennen, können wir behaupten:

### Satz vom Minimalmodell:

**Das Minimalmodell einer affinen Inzidenzebene besteht aus genau 4 Punkten und genau 6 Geraden („Tetraedermodell“).**

- **Es enthält drei Richtungen (Parallelscharen) zu je zwei Geraden.**
- **Jede Gerade inzidiert mit genau zwei Punkten.**
- **Jeder Punkt inzidiert mit genau drei Geraden.**



Bevor wir uns im Einzelnen näher mit den zwei bisher bekannten Modellen endlicher affiner Ebenen befassen, wollen wir noch einen wichtigen Struktursatz über sämtliche affinen Ebenen beweisen. Bei der 4-Punkte-Ebene inzidiert jede Gerade mit genau zwei Punkten, bei der 9-Punkte-Ebene inzidiert jede Gerade mit genau drei Punkten. Dies lässt sich verallgemeinern.

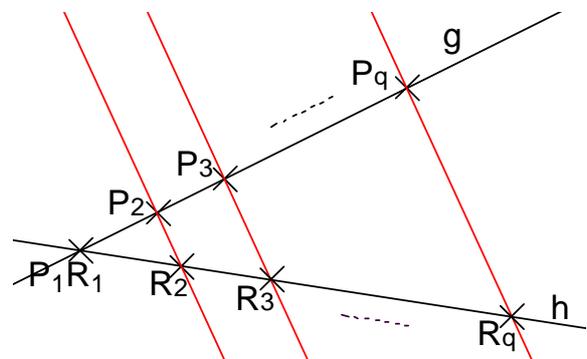
### Struktursatz Teil A:

**Inzidiert eine einzige Gerade  $g$  einer affinen Inzidenzebene mit genau  $q$  Punkten, so inzidiert jede Gerade dieser Ebene mit genau  $q$  Punkten und jeder Punkt  $P$  der Ebene inzidiert mit genau  $(q + 1)$  Geraden.**

Beweisidee:

Man kann die  $q$  Punkte der Geraden  $g$  durch *Parallelprojektion* auf eine beliebige andere Gerade  $h$  (man unterscheide ob  $h$  parallel zu  $g$  ist oder nicht) projizieren und erhält so eine Bijektion der Punkte von  $g$  auf die Punkte von  $h$ . Führen Sie den Beweis im Einzelnen selbstständig durch.

Warum sind auf  $h$  mindestens die  $q$  Punkte  $R_1$  bis  $R_q$  vorhanden und warum können außer diesen keine weiteren vorhanden sein?



Durch einen Punkt  $P$ , der nicht mit  $g$  inzidiert, laufen alle Verbindungsgeraden  $PP_k$  und außerdem die Parallele zu  $g$  durch  $P$ . Warum kann keine weitere Gerade durch  $P$  verlaufen?

### Definition:

**Die Anzahl  $q$  der mit einer Gerade inzidierenden Punkte nennt man die Ordnung der affinen Inzidenzebene.**

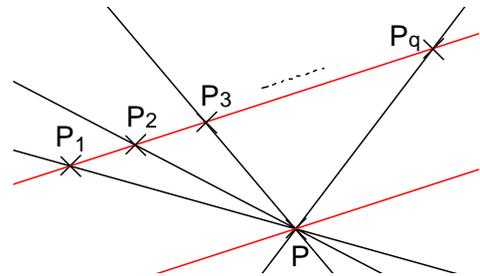
Mit diesem ersten Teil des Struktursatzes haben wir eine gewisse Regularität aller Geraden in endlichen affinen Ebenen festgestellt: Mit jeder Geraden inzidiert dieselbe Anzahl von Punkten. Ganz analog verhalten sich die Punkte:

**Struktursatz Teil B:**

**Inzidiert ein einziger Punkt  $P$  einer affinen Inzidenzebene mit genau  $q + 1$  Geraden, so inzidiert jeder Punkt dieser Ebene mit genau  $q + 1$  Geraden und jede Gerade inzidiert mit genau  $q$  Punkten.**

Beweisidee:

Analog wie bei Teil A: Man bestimmt eine Gerade  $g$ , die zu einer der Geraden durch  $P$  parallel ist und von den übrigen  $q$  Geraden durch  $P$  getroffen wird. Nun verbindet man einen beliebigen Punkt  $X$  mit den  $q$  Punkten auf  $g$  und hat dann noch die Parallele zu  $g$  durch  $X$ , also  $(q + 1)$  Geraden durch  $X$ . Führen Sie den Beweis im Einzelnen vollständig durch.



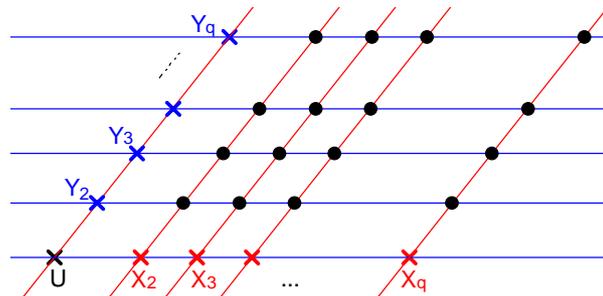
In Kenntnis dieser Regelmäßigkeiten der Struktur affiner Ebenen können wir nun die Gesamtzahl aller Punkte und aller Geraden einer affinen Ebene der Ordnung  $q$  bestimmen:

**Struktursatz Teil C:**

**Eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$  enthält genau  $q^2$  Punkte und genau  $q * (q + 1) = q^2 + q$  Geraden.**

Beweisidee:

Man wählt zwei nicht zueinander parallele Geraden  $x$  und  $y$ , die mit dem gemeinsamen Punkt  $U$  inzidieren als Achsen eines affinen Parallelkoordinatensystems und benützt die bisher bekannten Sätze und die Axiome. Damit gelangt man zur Punkteanzahl  $q^2$ .



Durch Abzählen der Inzidenzen auf zwei verschiedene Weisen erhält man folgende Beziehung zwischen der Gesamtzahl  $g$  aller Geraden, der Gesamtzahl  $p$  aller Punkte und der Ordnung  $q$  der Ebene:

$g * q = p * (q+1)$ . Daraus ermittelt man die Anzahl der Geraden.

Führen Sie den Beweis gemäß dieser Ideenskizze im Einzelnen sorgfältig aus.

**Struktursatz Teil D:**

**Eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$  enthält genau  $q + 1$  verschiedene Parallelbüschel (Richtungen) zu je  $q$  Geraden.**

Beweisidee:

Die Anzahl der mit einem Punkt inzidierenden Geraden gibt die Anzahl der Richtungen an. Zusammen mit der Gesamtzahl aller Geraden und der Ordnung  $q$  ergibt sich damit die Anzahl der Geraden pro Richtung.

Wir fassen die Ergebnisse der Teile A bis D in einem Satz zusammen:

### Struktursatz über affine Ebenen der Ordnung $q$ .

- Jede Gerade inzidiert mit genau  $q$  verschiedenen Punkten.
- Jeder Punkt inzidiert mit genau  $(q + 1)$  verschiedenen Geraden.
- Es gibt genau  $(q + 1)$  verschiedene Parallelscharen (Richtungen) zu je  $q$  Geraden.
- Die Gesamtzahl aller Punkte der affinen Ebene ist  $q^2$ .
- Die Gesamtzahl aller Geraden der affinen Ebene ist  $q \cdot (q + 1) = q^2 + q$ .

Der Struktursatz gibt Auskunft über Anzahlen in affinen Ebenen der Ordnung  $q$ . Ob es jedoch überhaupt solche Ebenen gibt, wissen wir bisher nur für  $q = 2$  und  $q = 3$ , aber nicht für andere Anzahlen  $q$ . Über die Existenz solcher Ebenen sagt der Struktursatz gar nichts aus. Er gilt eben nur vorbehaltlich der Existenz.

Es erhebt sich deshalb eine Reihe von **offenen Fragen**:

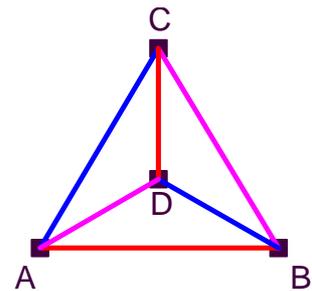
- Wir kennen affine Ebenen von Ordnung  $q = 2$  und von Ordnung  $q = 3$ .  
Gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $q$  eine (oder gar mehrere nicht zueinander isomorphe) affine Ebenen mit dieser Ordnung?
- Welche geometrischen Sätze gelten in affinen Ebenen?  
Gilt alles was man in der gewöhnlichen ebenen Geometrie kennen gelernt hat?
- Lassen sich z. B. Mittelpunkte definieren? Kann man Teilverhältnisse einführen?
- Kann man in sinnvoller Weise eine brauchbare Senkrechtrelation (Orthogonalität) einführen, die die üblichen Kriterien erfüllt?  
Wenn ja wie und unter welchen Bedingungen?
- Lassen sich Abbildungen in diesen Geometrien definieren und gelten die üblichen Zusammenhänge der Abbildungsgeometrie?
- Man kann eine Reihe von kombinatorischen Fragen (Abzählprobleme) stellen:  
Wie viele Strecken, Dreiecke, Vierecke, Parallelogramme gibt es in der Geometrie?
- U.v.a.m.

## 1.4 Untersuchungen in den affinen Inzidenzebenen der Ordnungen 2 und 3.

Bevor wir einen weiteren Zugang zu den endlichen Geometrien von der Algebra herkommend behandeln, wollen wir einige Studien in den einfachsten Ebenen der Ordnungen 2 und 3 treiben.

### a) Die affine Inzidenzebene der Ordnung 2

Das nebenstehende Netz (Tetraedermodell) gibt die Struktur der affinen Inzidenzebene der Ordnung  $q = 2$  mit 3 Richtungen zu je 2 Geraden, vier Punkten und insgesamt 6 Geraden wieder.



#### Aufgabe 16:

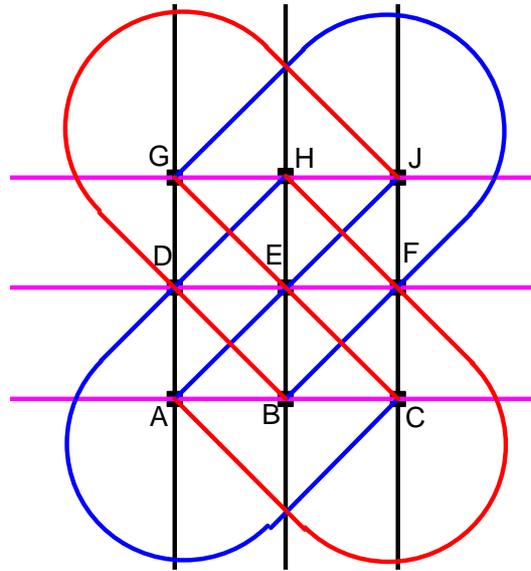
- Wie viele verschiedene Strecken (Mengen von 2 Punkten) gibt es in dieser Ebene?
- Wie viele verschiedene Dreiecke gibt es?
- Wie viele verschiedene Vierecke gibt es?
- Wie viele Parallelogramme gibt es?  
Wie verlaufen die Diagonalen eines Parallelogramms?
- Sind alle Vierecke Parallelogramme?  
Warum ist jedes Viereck mit Sicherheit mindestens ein Trapez?
- Kann man „Mittelpunkte“ von Strecken einführen?  
Wenn ja wie, wenn nein, warum nicht?
- Lässt sich eine Orthogonalitätsrelation (Senkrechtrelation für Geraden) sinnvoll definieren? Wenn ja wie, wenn nein, warum nicht?

Viel mehr ist aus dieser sehr einfachen Geometrie vorerst nicht zu holen, weil sie arm an geometrischen Strukturen ist. Es gibt keine Mittelpunkte, keine Teilverhältnisse, keine „anständige“ Orthogonalität von Geraden, keine Streckenlängen, keine Winkelgrößen etc.

## b) Die affine Inzidenzebene der Ordnung 3

Das nebenstehende Netz gibt die Struktur der affinen Inzidenzebene der Ordnung 3 wieder:

- Es gibt 9 Punkte und 12 Geraden.
- Es gibt 4 Richtungen zu je 3 Geraden.
- Mit jedem Punkt inzidieren 4 Geraden.
- Mit jeder Gerade inzidieren 3 Punkte.



### Aufgabe 17:

- Wie viele „Strecken“ gibt es?
- Wie viele Dreiecke gibt es?
- Wie viele Vierecke gibt es?
- Wie viele Parallelogramme gibt es?
- Kann man „Mittelpunkte“ einführen?  
Wenn ja wie? Welche allgemeine Aussage kann man damit machen?
- Hat man Mittelpunkte, so kann man Seitenhalbierende und Mittelparallelen in Dreiecken untersuchen. Gelten die Sätze der gewöhnlichen Geometrie?  
Gilt der Satz vom Mittenviereck für jedes Viereck?
- Mit Mittelpunkten kann man Punktspiegelungen definieren und diese verketteten. Was erhält man? Gelten die üblichen Sätze über Punktspiegelungen?
- Kann man eine Orthogonalitätsrelation einführen?  
Wie würden Sie vorgehen, wenn man „dem Augenschein“ folgen würde?
- Wenn man eine Orthogonalitätsrelation hat, kann man Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke untersuchen ebenso Mittelsenkrechten, Höhen und die betreffenden Eigenschaften. Was erhalten Sie?
- Wir setzen folgende **Definition** für **Mittelpunkte** und für **Orthogonalität** voraus:
  - Zu je zwei verschiedenen Punkten ist der dritte Punkt ihrer Verbindungsgeraden der Mittelpunkt.
  - Es sollen jeweils die Parallelscharen zu AB und AD sowie die zu AE und AF zueinander orthogonal sein.

Beweisen Sie:

- In jedem Dreieck sind alle drei Seitenhalbierenden zueinander parallel.
- Die Höhen jedes Dreiecks schneiden sich in einer Ecke.
- Die drei Mittelsenkrechten jedes Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt einer Dreiecksseite. Daher ist jedes Dreieck „rechtwinklig und gleichschenkelig“.

Es ist bereits jetzt außerordentlich ergiebig und reizvoll, weitere Eigenschaften dieser einfachen endlichen Geometrie mit nur 9 Punkten und 12 Geraden zu erforschen und mit den Verhältnissen in der gewöhnlichen reellen affinen Ebene zu vergleichen. Wie steht es z. B. um verschiedene **Typen von Vierecken** und ihre Eigenschaften?

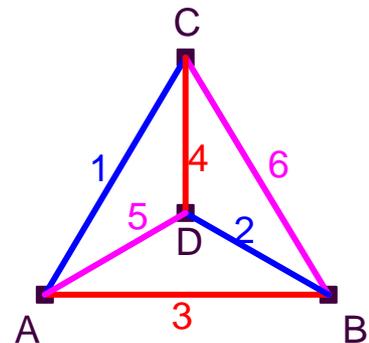
### 1.5 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben

**Aufgabe 1:**

Student 1 besucht 3, Student 2 besucht 2, Student 3 nur 1, Student 4 alle 4 und Student 5 nur 2 Vorlesungen. Professor A scheint bei Studenten beliebt, dagegen C nicht.

**Aufgabe 2:**

	1	2	3	4	5	6
A	x		x		x	
B		x	x			x
C	x			x		x
D		x		x	x	



Wir interpretieren die Inzidenzstruktur als Geometrie:

Jeder Punkt inzidiert mit genau drei Geraden, jede Gerade mit genau zwei Punkten.

Die Geraden 1 und 2, 3 und 4 bzw. 5 und 6 haben jeweils keinen gemeinsamen Punkt, sind also zueinander parallel. Es gibt also genau drei verschiedene Richtungen (Parallelscharen) zu je zwei Parallelen.

**Aufgabe 3:**

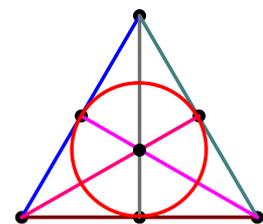
Man erhält genau die in der vorigen Aufgabe dargestellte Struktur. Die beiden Inzidenzstrukturen sind also zueinander isomorph (strukturgleich). Die Punkte sind die Spieler und die Geraden sind die Parteien.

**Aufgabe 4:**

Wieder erhält man genau die in Aufgabe 2 bereits ermittelte Struktur mit den Wörtern als Punkten und den Buchstaben als Geraden.

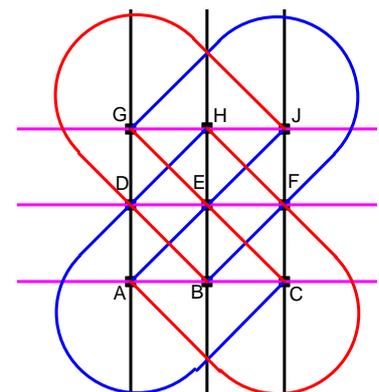
**Aufgabe 5:**

- a) Lassen Sie Ihrer Phantasie freien Lauf.
- b) In diesem Fall erhält man eine eindeutige Lösung, nämlich das Minimalmodell einer projektiven Inzidenzebene mit genau 7 Punkten (Stationen) und genau 7 Geraden (Linien). Eine mögliche Darstellung geben wir nebenstehend an.



**Aufgabe 6:**

- a) Wir geben nebenstehend einen Netzplan an, verzichten jedoch auf die Aufstellung der Inzidenztabelle. Die Struktur erweist sich als affine Inzidenzebene von Ordnung 3, weil jede Skatrunde („Gerade“) genau drei Spieler („Punkte“) hat und jeder Spieler an genau 4 Runden teilnimmt.



- b) Es sind insgesamt 9 Spieler und jeder nimmt an 4 Runden teil.
- c) Es gibt insgesamt 12 Runden. Zählt man die Zahl aller Inzidenzen einmal über die 12 Geraden und einmal über die 9 Punkte so erhält man  $12 \cdot 3 = 9 \cdot 4 = 36$ .

### **Aufgabe 7:**

Man kann die Zahl der Kantenenden auf zwei verschiedene Weisen zählen:

*Über die Kanten:* Da jede Kante zwei Enden hat, ist die Anzahl aller Kantenenden eine gerade Zahl, nämlich  $2 \cdot k$ , wenn  $k$  die Anzahl aller Kanten ist.

*Über die Ecken:* Da jedes Kantenende in irgendeiner Ecke vorkommt, erhält man alle Kantenenden durch Summieren aller Eckengrade. Auch hierbei muss sich die gerade Zahl  $2 \cdot k$  ergeben, womit der Satz bewiesen ist.

### **Aufgabe 8:**

Die Summe aller Eckenordnungen ist nach Satz 1 gerade. Der Anteil der Ecken mit gerader Eckenordnung ist als Summe von geraden Zahlen ebenfalls gerade. Daher muss der Anteil der Ecken mit ungeraden Eckenordnungen ebenfalls gerade sein. Nun ist aber eine Summe von ungeraden Zahlen genau dann gerade, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Also ist die Anzahl der Ecken mit ungerader Eckenordnung eine gerade Zahl.

### **Aufgabe 9:**

Man zählt die Anzahl der Inzidenzen einmal über die Punkte und einmal über die Blöcke und erhält genau die angegebene Gleichung.

### **Aufgabe 10:**

- a) Unikursal sind genau die Netze, die höchstens zwei Ecken ungerader Ordnung enthalten. Dies sind das Oktaedernetz sowie die Netze  $V_3$  und  $V_4$ .

Bei der Deutung der Netze von affinen und projektiven Ebenen müssen entscheiden, wie wir sie interpretieren:

Die Kanten der Netze verbinden stets höchstens zwei Punkte miteinander.

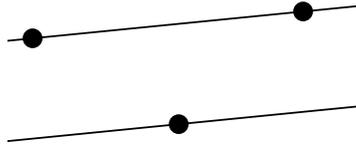
Bei den Geometrien können jedoch zu ein und derselben Gerade mehr als zwei Punkte gehören.

Wir wollen hier die Netze als Netze interpretieren und die Kanten wie bei Netzen. In dieser Deutung ist keines der Netze aus (7) und (8) unikursal.

- b) Anfang und Ende der Durchlaufung liegen ggf. genau in den 2 Ecken ungerader Ordnung. Ein solcher Fall kommt hier jedoch nicht vor.
- c) Alle in a) aufgezählten Fälle lassen sogar geschlossene Eulerlinien zu, weil sie keine ungeraden Ecken enthalten. Man kann den Weg in jeder beliebigen Ecke beginnen und endet auch wieder in dieser Ecke.

### **Aufgabe 11:**

Ein Modell ist die Inzidenzstruktur von Aufgabe 2. Sie erfüllt alle drei Axiome. Sie ist die affine Inzidenzebene mit der kleinsten Anzahl von Punkten (Minimalmodell).

**Aufgabe 12:**

Zur Unabhängigkeit für A1

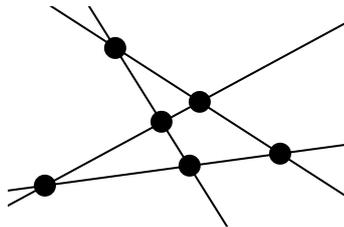


Zur Unabhängigkeit für A3

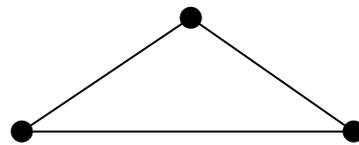
**Aufgabe 13:**

a) Das Minimalmodell von Aufgabe 5 b) erfüllt die Axiome P1 bis P3 (überprüfen Sie dies) und beweist daher die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems.

b)



Zur Unabhängigkeit für P1



Zur Unabhängigkeit für P3

Die Unabhängigkeit für P2 wird z. B. durch das Minimalmodell der affinen Inzidenzebenen (Tetraedermodell) bewiesen.

**Aufgabe 14:**

a) Auf Grund der Formulierungen ist die Relation erkennbar *reflexiv* und *symmetrisch*. Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass sie auch *transitiv* ist:

Es sei  $a$  parallel  $b$  und  $b$  parallel  $c$ . Wir müssen zeigen, dass dann  $a$  parallel  $c$  ist.

Fall 1: Sind zwei der drei Geraden identisch, so ist die Behauptung schon auf Grund der Voraussetzungen erkennbar erfüllt.

Fall 2: Alle drei Geraden sind voneinander verschieden. Wir beweisen die Behauptung indirekt: Hätten  $a$  und  $c$  einen gemeinsamen Punkt  $P$ , so gäbe es durch diesen zu  $b$  zwei verschiedene Parallelen im Widerspruch zum Axiom A2. Also können  $a$  und  $c$  keinen gemeinsamen Punkt haben und sind daher zueinander parallel.

b) Die Äquivalenzklassen der Parallelrelation sind die Scharen zueinander paralleler Geraden, also „Parallelscharen“ oder „Richtungen“.

c) In der affinen Ebene der Ordnung 2 gibt es 3, in der Ebene der Ordnung 3 gibt es 4 und allgemein in einer affinen Ebene der Ordnung  $q$  gibt es genau  $q + 1$  Richtungen.

**Aufgabe 15:**

Zu d): Es sei eine Gerade  $g$  gegeben. Lügen nun alle Punkte der Ebene auf  $g$ , so widerspräche dies dem Axiom A3. Daher gibt es mindestens einen weiteren Punkt  $P$ , der nicht mit  $g$  inzidiert.

Zu e): Es sei ein Punkt  $P$  gegeben.

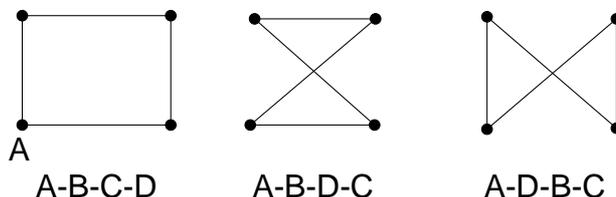
Nach A3 gibt es mindestens drei nichtkollineare Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Ist P einer von diesen, z. B. A, so gibt es die Gerade BC, mit der A nicht inzidiert.

Ist P keiner dieser drei Punkte, so kann er auf höchstens einer der Geraden AB, BC bzw. CA liegen und wir haben sogar zwei Geraden gefunden, die nicht mit P inzidieren.

### Aufgabe 16:

- a) Es gibt genau  $\binom{4}{2} = 6$  zweielementige Teilmengen der Menge der vier Punkte.
- b) Anzahl der Dreiecke: Es gibt  $\binom{4}{3} = 4$  verschiedene Dreiecke.
- c) Zu vier Punkten, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gibt es im Allgemeinen genau drei verschiedene Vierecke. Wir deuten dies in folgenden Skizzen an:



Man erhält dies Ergebnis noch auf andere Weise: Denkt man sich vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind, so kann man diese auf 24 verschiedene Reihenfolgen aufzählen (permutieren). Jeweils 8 davon beschreiben jedoch dasselbe Viereck (viermal in der einen und viermal in der umgekehrten Reihenfolge). Also gibt es drei verschiedene Vierecke.

ABCD = BCDA = CDAB = DABC = ADCB = DCBA = CBAD = BADC

ABDC = ...

ADBC = ...

Es gibt also in unserer Ebene mit vier Punkten genau drei verschiedene Vierecke und alle drei sind Parallelogramme (warum?).

- d) In jedem der vier Parallelogramme in dieser Geometrie sind die Diagonalen zueinander parallel, d. h. sie schneiden sich nicht!
- e) Alle Vierecke sind sogar Parallelogramme. Weil es nur drei Richtungen gibt, müssen mindestens zwei der Vierecksseiten die gleiche Richtung haben, also parallel sein und daher ist jedes Viereck mindestens ein Trapez.
- f) Mittelpunkte lassen sich nicht sinnvoll einführen. Der Mittelpunkt zu zwei verschiedenen Punkten sollte zumindest mit den beiden Punkten kollinear sein. Da es jedoch keinen dritten Punkt auf einer Geraden gibt, müsste man einen der beiden Punkte selbst wählen. Mit welchem Recht den einen und nicht den anderen? Es lassen sich also keine sinnvollen Mittelpunkte einführen.
- g) Eine Senkrechtrelation lässt sich ebenfalls nicht sinnvoll definieren: Man könnte z. B. zwei der Richtungen zueinander senkrecht definieren. Aber dann wäre die dritte Richtung nur noch zu sich selbst senkrecht oder man müsste auf eine dazu senkrechte Richtung mangels Masse verzichten. Es geht also nicht sinnvoller Weise.

**Aufgabe 17:**

a)  $\binom{9}{2} = 36.$

- b) Zunächst gibt es  $\binom{9}{3} = 84$  Punktripel. Allerdings sind davon 12 kollinear, nämlich jeweils die drei Punkte jeder der 12 Geraden. Daher gibt es genau 72 Dreiecke.

Alternative: Für den ersten Punkt gibt es 9, für den zweiten 8 und für den dritten nur noch 6 mögliche Auswahlen, insgesamt also  $9 * 8 * 6$  geordnete Auswahlen. Da es auf die Ordnung nicht ankommt und jedes Tripel auf  $3! = 6$  verschiedene Weisen angeordnet werden kann ( $ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$ ), gibt es  $8 * 9 = 72$  mögliche Dreiecke.

- c) Wir bestimmen geordnete Punktequadrupel, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Davon gibt es  $9 * 8 * 6 * 3$ . Nach den Überlegungen von Aufgabe 16 c) geben jeweils 8 dasselbe Viereck an. Daher gibt es genau  $9 * 6 * 3 = 162$  Vierecke.

Alternative: Es gibt  $\binom{9}{4} = 126$  verschiedene Punktequadrupel. Von denen müssen

wir diejenigen ausschließen, bei denen drei der vier Punkte kollinear liegen. Das sind genau  $12 * 6 = 72$ , weil man zu je drei kollinearen Punkten einer Geraden genau 6 weitere Punkte als vierte Punkte wählen kann.

Daher haben wir  $126 - 72 = 54$  Punktequadrupel, bei denen keine drei kollinear sind. Jedes dieser Quadrupel bestimmt jedoch genau 3 Vierecke (siehe Aufgabe 16 c)), also haben wir  $3 * 54 = 162$  Vierecke.

- d) Ein Parallelogramm ist bestimmt, wenn wir aus zwei nicht zueinander parallelen Scharen jeweils 2 Geraden ausgewählt haben. Da es 4 Richtungen gibt, können wir  $\binom{4}{2} = 6$  verschiedene Paare von Richtungen auswählen. Dazu wählt man jeweils aus jeder Schar 2 aus den drei Geraden, das sind dann  $6 * 3 * 3 = 54$  Möglichkeiten, also gibt es genau 54 verschiedene Parallelogramme.

- e) Die einzig sinnvolle Möglichkeit zur Einführung von Mittelpunkten ist die, dass man zu zwei verschiedenen Punkten den dritten Punkt der von diesen bestimmten Geraden als Mitte definiert: Zu je zwei Punkten ist der dritte Punkte ihrer Verbindungsgeraden der Mittelpunkt.
- f) Man bestätigt an Beispielen den Satz von der Mittelparallele in Dreiecken und den Satz vom Mittenviereck in Vierecken. Ein allgemeiner Beweis dafür folgt später.
- g) Die Verkettung von zwei Punktspiegelungen erweist sich als Translation, die von drei wieder als Punktspiegelung am vierten Parallelogrammpunkt, genau wie man es von der reellen affinen Ebene her kennt. Beispiele genügen, Beweise später.
- h) Im Gegensatz zur Ebene der Ordnung 2 mit drei Richtungen haben wir hier eine gerade Anzahl von Richtungen und können sinnvoll zwei Paare von zueinander orthogonalen Richtungen definieren. Man wird die Richtungen AB und AD sowie die Richtungen AE und AF jeweils als zueinander senkrecht festlegen.
- i) Es zeigt sich, dass jedes Dreieck rechtwinklig ist. Der Beweis ist einfach: Da es nur vier Richtungen gibt, von denen drei im Dreieck vorkommen, ist mindestens ein orthogonales Paar von Richtungen vorhanden, das Dreieck also rechtwinklig. Damit

müssen sich die Höhen im Dreieck in einer Ecke treffen. Untersucht man die Mittelsenkrechten in Dreiecken, so stellt man fest, dass jedes Dreieck nicht nur rechtwinklig, sondern auch symmetrisch, also gleichschenkelig ist, also die Form eines Geodreiecks hat, und die Mittelsenkrechten sich auf der Hypotenusenmitte treffen.

Man erhält leicht die Anzahl der Rechtecke: Je zwei Geraden aus zueinander orthogonalen Richtungen auswählen. Dafür gibt es  $2 * 3 * 3 = 18$  Möglichkeiten.

- j) Die drei Seitenhalbierenden jedes Dreiecks sind zueinander parallel. Da drei Richtungen durch die Seiten eines Dreiecks verbraucht sind, bleibt für jede Seitenhalbierende nur noch die vierte Richtung übrig.

Alle Dreiecke sind rechtwinklig, daher schneiden sich die Höhen in einer Ecke.

Alle Dreiecke sind sogar symmetrisch („gleichschenkelig“): Wir betrachten die Ecke mit dem rechten Winkel, sie sei C. Die Seiten CA und CB sind dann zueinander orthogonal. Die Verbindung von C mit der Seitenmitte von AB muss aber die vierte Richtung neben den Richtungen der drei Dreiecksseiten sein, also notwendigerweise orthogonal zu AB. Daher ist die Seitenhalbierende von C aus auch die Mittelsenkrechte von AB und jedes Dreieck symmetrisch.

- k) Untersuchen Sie Typen von Vierecken aus dem „Haus der Vierecke“.  
Warum ist jedes Viereck in dieser Geometrie zumindest ein Trapez?  
Welche Typen von Vierecken bleiben dann noch übrig?

Zusatz: Wir haben insgesamt 162 Vierecke, 54 Parallelogramme und 18 Rechtecke gezählt. Wenn man nun noch nachweist, dass jedes Viereck ein Trapez sein muss (dies ist eine leichte Aufgabe), so bleiben also  $162 - 54 = 108$  echte (d. h. nicht parallelogrammförmige) Trapeze übrig. Analog gibt es  $54 - 18 = 36$  echte (d. h. nicht rechteckige) Parallelogramme. Es bleibt die Frage, wie viele der 18 Rechtecke sogar Quadrate sind. Befriedigen Sie Ihre Neugier, indem Sie dies untersuchen.

## 2. Analytische Geometrie über endlichen Körpern

### 2.1 Descartes Idee: Analytische Geometrie über einem Körper

Man kann Geometrie auf sehr verschiedene Weisen betreiben:

Konstruktive Geometrie, Darstellende Geometrie, Analytische Geometrie, Abbildungsgeometrie, Algebraische Geometrie, Synthetische Geometrie, Axiomatische Geometrie...

Was bedeutet es, „**Analytische Geometrie**“ zu betreiben?

Descartes Idee war die Einführung von Koordinaten zur Beschreibung geometrischer Objekte. Mit diesen konnte er Punkte und Geraden algebraisch beschreiben und damit eine algebraische Behandlung geometrischer Fragestellungen ermöglichen. Analytische Geometrie treiben heißt daher:

- Geometrie betreiben mit Hilfe algebraischer Verfahren
- Punkte einer Ebene werden dargestellt durch geordnete Zahlenpaare (Koordinaten)
- Geraden werden dargestellt durch die Koeffiziententripel  $(a; b; c)$  linearer Gleichungen  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .
- Ein Punkt inzidiert mit einer Gerade, wenn sein Koordinatenpaar ein Lösungspaar der Geradengleichung ist.
- Der Schnitt zweier Geraden ergibt sich als Lösung linearer Gleichungen

Wir geben ein konkretes Beispiel aus der gewöhnlichen reellen Ebene:

Liegen die Punkte  $P(1; 2)$  bzw.  $Q(1; 1)$  auf der Geraden  $g(-3; 2; 1)$ ?

Wir prüfen, ob die Koordinaten der Punkte die lineare Gleichung  $-3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 = 0$  mit dem Koeffiziententripel  $(-3; 2, 1)$  für die Gerade  $g$  erfüllen:

Punktprobe für  $P$ :  $-3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 2 \neq 0$ ; nicht erfüllt;  $P$  inzidiert nicht mit  $g$ .

Punktprobe für  $Q$ :  $-3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 0$ ; erfüllt;  $Q$  inzidiert also mit  $g$ .

**[Rene Descartes** (Cartesius) 1596 – 1650 frz. Philosoph und Mathematiker. Kartesische Koordinaten. Kartesisches Blatt und logarithmische Spirale. Radikaler Zweifel als methodisches Prinzip für philosophisches Erkennen (tabula rasa; cogito, ergo sum). Sucht Gewissheit im Erkennen (ontologischer Gottesbeweis). Trennung von Subjekt und Objekt. Discours de la methode pour bien conduire sa raison (1637 mit einem Anhang über Optik, Meteore, Geometrie). Begründer der analytischen Geometrie.]

Wir benötigen einen **Zahlen- oder Rechenbereich** für die Koordinaten und für das Operieren mit linearen Gleichungen, wenn wir analytische Geometrie mit Punkten und Geraden betreiben wollen. Im Normalfall ist dies der Bereich der reellen Zahlen.

Wenn wir nun *endliche* analytische Geometrie betreiben wollen, muss natürlich der zu Grunde liegende Zahl- bzw. Rechenbereich eine *endliche* Menge sein. Gibt es dafür

geeignete Rechenbereiche? Die einfachsten und bekanntesten endlichen „Rechenbereiche“ sind die **Restklassenringe  $(\mathbb{R}_m, \oplus, \otimes)$  modulo einer natürlichen Zahl  $m$** .

Wir wollen an einem einfachen Beispiel testen, ob diese für unsere Zwecke tauglich sind. Wir versuchen, ob der Restklassenring modulo 6, also  $(\mathbb{R}_6, +, *)$  geeignet ist.

[Da keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir für die Restklassen aus drucktechnischen Gründen auf den Überstrich verzichten und die Reste selbst notieren. Ebenso verwenden wir die gewöhnlichen Zeichen für die Addition und Multiplikation für die Restklassenverknüpfungen.]

Wir betrachten im Restklassenring mod 6 die beiden folgenden Geraden mit den Koeffiziententripeln  $(1; 3; 2)$  bzw.  $(3; 1; 4)$ , also mit den Gleichungen

$$x + 3y + 2 = 0 \quad (1)$$

$$3x + y + 4 = 0 \quad (2)$$

Folgende Paare  $(x; y)$  erfüllen die erste Gleichung (überprüfen Sie durch Einsetzen):

$(1; 1)$ ,  $(1; 3)$ ,  **$(1; 5)$** ,  $(4; 0)$ ,  **$(4; 2)$**  und  $(4; 4)$ .

Folgende Paare  $(x; y)$  erfüllen die zweite Gleichung (überprüfen Sie durch Einsetzen):

$(0; 2)$ ,  **$(1; 5)$** ,  $(2; 2)$ ,  $(3; 5)$ ,  **$(4; 2)$**  und  $(5; 5)$ .

Wir haben demnach folgende Situation vor uns: Obwohl die beiden „Geraden“ zwei Punkte gemeinsam haben, sind sie nicht gleich. Das widerspricht unserem Axiom A1 einer affinen Inzidenzebene und der Rechenbereich  $(\mathbb{R}_6, +, *)$  ist für unsere Zwecke ungeeignet.

Das Gleichungssystem mit den zwei linearen Gleichungen  $x + 3y + 2 = 0$  bzw.  $3x + y + 4 = 0$  besitzt im Restklassenring mod 6 genau zwei verschiedene Lösungen. Das aber würde bedeuten, dass zwei verschiedene, nicht zueinander parallele Geraden zwei gemeinsame Punkte hätten, und das würde unserem Axiom A1 widersprechen. Der Restklassenring modulo 6 eignet sich also nicht für affine analytische Geometrie.

Nur solche Rechenbereiche, in denen zwei unabhängige lineare Gleichungen genau eine Lösung besitzen, kommen für unsere Zwecke in Frage. Dies ist jedoch in Restklassenringen mit Primzahlmoduln der Fall, denn diese bilden sogar algebraische **Körper**.

Die reellen Zahlen z. B., mit denen wir die wohlbekannteste analytische Geometrie der reellen Ebene betreiben, bilden einen **Zahlkörper**.

Wir wollen nun endliche Rechenbereiche, die die Eigenschaften eines Körpers haben, bereitstellen, mit deren Hilfe wir dann endliche analytische Geometrie betreiben können.

Es wird sich zeigen, dass jede Koordinatenebene über einem Körper genau die drei Axiome A1 bis A3 einer affinen Inzidenzebene erfüllt und wir auch auf diesem Weg zur Struktur endlicher affiner Inzidenzebenen gelangen.

## 2.2 Körper als algebraische Struktur. Endliche Körper

Wir erinnern an das Rechnen mit Restklassen modulo einer natürlichen Zahl  $m$  und stellen einige Ergebnisse zusammen. Wir werden im Folgenden – wenn keine zwingenden Umstände es erfordern – die Restklassen nicht gesondert (z. B. mit Überstrich) markieren, sondern sie wie ganze Zahlen notieren, auch wenn wir in Restklassenringen rechnen. Des Weiteren werden wir auch die üblichen Verknüpfungszeichen  $+$  und  $*$  statt  $\oplus$  und  $\otimes$  verwenden.

Der einfachste, selbst Grundschulern zugängliche, Fall dürfte das Rechnen mit Restklassen mod 10 sein. Im Bereich der natürlichen Zahlen (nicht so bei den negativen Zahlen!) ist es nämlich nichts anderes als das „**Rechnen mit Endziffern in der Dezimaldarstellung**“: Man addiert und multipliziert wie gewöhnlich, schreibt jedoch immer nur die Endziffer auf, die den **Zehnerrest** angibt und als Standardrepräsentant der betreffenden Restklasse mod 10 benutzt wird.

### Restklassenaddition mod 10

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

### Restklassenmultiplikation mod 10

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Analog dazu erhält man die Restklassenverknüpfungen mod  $m$  durch „Endziffernrechnung“ mit natürlichen Zahlen bei der Darstellung im Stellenwertsystem mit der Basis  $m$ . Man kann also generell sagen: „**Restklassenrechnen mod  $m$  ist äquivalent zur Endziffernrechnung mit natürlichen Zahlen in Stellenwertdarstellung zur Basis  $m$ .**“

Für alle Restklassenverknüpfungen mod  $m$  gelten folgende Eigenschaften, die man an den Verknüpfungstabellen teilweise erkennen kann:

**R1: Die Restklassen mod  $m$  bilden bezüglich der Restklassenaddition eine kommutative Gruppe mit der Nullrestklasse als Neutralelement.**

**R2: Die Restklassen mod  $m$  bilden bezüglich der Restklassenmultiplikation eine kommutative Halbgruppe.**

**R3: Es gilt das Distributivgesetz:  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$**

**Definition:**

Eine algebraische Struktur  $(R, \oplus, \otimes)$  mit den Eigenschaften R1 bis R3 nennt man einen Ring.

Die Restklassen mod  $m$  bilden also einen Ring, den **Restklassenring mod  $m$** .

Leider gibt es in beliebigen Ringen manchmal recht seltsame Dinge, wie wir bereits gesehen haben und wie man z. B. an der Existenz von **Nullteilern** sehen kann: Es gibt Produkte mit dem Ergebnis 0, auch wenn keiner der beteiligten Faktoren 0 ist. Ein solches Beispiel ist etwa  $4 * 5 = 0$  im Restklassenring mod 10.

Für unsere Zwecke kommen nur diejenigen Restklassenringe in Frage, bei denen solche Erscheinungen nicht auftauchen, und das sind die **Restklassenringe zu Primzahlmodulen**. Diese bilden sogar einen **Körper**. Wir wählen als Beispiel den **Modul 7**:

Restklassenaddition

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Restklassenmultiplikation

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Prime Restklassengruppe

$\otimes$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

In der ersten Verknüpfungstafel ist die **Addition** für die Restklassen mod 7 dargestellt. Man erkennt die Eigenschaften einer kommutativen Gruppe mit dem Neutralelement 0.

Die mittlere Tafel enthält die **Multiplikation** der Restklassen mod 7. Man erkennt die Absorptionseigenschaft der 0 und die 1 als Neutralelement.

Beschränkt man sich mit der Multiplikation mod 7 auf die von 0 verschiedenen Elemente, so erhält man die dritte Tafel. Man erkennt, dass nun ebenfalls eine Gruppe mit dem Neutralelement 1 vorliegt. Diese multiplikative Gruppe der zum Modul teilerfremden oder „primen“ Restklassen nennt man die **prime Restklassengruppe** oder die **Einheitengruppe** des Ringes.

**Aufgabe 1:**

a) Füllen Sie die folgende Tabelle für das Rechnen mit den Restklassen mod 7 aus:

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x = x \oplus x$							
$x^2 = x \otimes x$							
$-x$							
$\frac{1}{x} = x^{-1}$							

b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke im Restklassenring mod 7:

$$T_1 = 2 * 5^3 + 3 * 4 - 6 * 2 \quad T_2 = \frac{3}{4} + 4^2 \quad T_3 = \frac{2}{5} - 3 * 5^{-4} + 6$$

c) Berechnen Sie die Lösungen für jede der folgenden Gleichungen im Restklassenring mod 7:

$$G_1: 2 * x + 5 = 3 \quad G_2: 5 * x - 2 = 4 * x + 3 \quad G_3: x^2 + 3 = 5$$

d) Leiten Sie die Lösungsformel für die Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2 + p * x + q = 0$  für einen beliebigen Körper her. Geben Sie Lösbarkeitsbedingungen an und lösen Sie folgende Gleichungen im Restklassenkörper mod 7:

$$Q_1: x^2 = 1 \quad Q_2: x^2 + 5x + 3 = 0 \quad Q_3: 3 * x^2 + 2 * x - 5 = 0$$

In einem Restklassenring zu einem Primzahlmodul haben alle von 0 verschiedenen Elemente ein multiplikativ inverses Element. Für beliebige Restklassenringe gilt dies nicht. In einen beliebigen Restklassenring mod  $m$  besitzen genau diejenigen Restklassen  $a$  ein multiplikativ Inverses, die zum Modul  $m$  teilerfremd (relativ prim) sind, das sind die so genannten „primen Restklassen“. Diese bilden bezüglich der Multiplikation für sich eine Gruppe, die „prime Restklassengruppe“ oder „Einheitengruppe“ des Ringes. Wir wollen den wesentlichen Teil dieser Behauptung aus der elementaren Zahlentheorie beweisen:

**Satz:**

**Ein Element  $a$  aus dem Restklassenring  $R_m$  besitzt genau dann ein multiplikativ inverses Element  $b$  in  $R_m$ , wenn  $a$  zu  $m$  teilerfremd ist, also  $\text{ggT}(a, m) = 1$  ist.**

Beweis:

(1) Sei  $a$  aus  $R_m$  mit  $\text{ggT}(a, m) = 1$ .

Dann folgt aus dem Euklidischen Algorithmus die Existenz zweier ganzer Zahlen  $x$  und  $y$  mit der Eigenschaft  $a * x + m * y = 1$ . Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Beziehung  $a * x \equiv 1 \pmod{m}$  bzw. für die zu  $a$  und  $x$  gehörigen Restklassen  $a * x = 1$  im Restklassenring  $R_m$ . Daher ist  $a^{-1} = x$  das gesuchte Inverse von  $a$  im Ring  $R_m$ .

(2) Ist umgekehrt  $a$  aus  $R_m$  invertierbar, so gibt es  $b$  aus  $R_m$  mit  $a * b = 1$ .

Das bedeutet jedoch, dass  $(a * b - 1)$  durch  $m$  teilbar sein muss oder  $a * b + x * m = 1$  sein muss für eine gewisse ganze Zahl  $x$ . Da der ggT von  $a$  und  $m$  die linke Seite der letzten Gleichung teilt, muss er auch die rechte teilen und kann nur gleich 1 sein.

Dieser Satz garantiert, dass in den Restklassenringen zu Primzahlmodulen alle Elemente außer der Nullrestklasse invertierbar sind, also ein Körper vorliegt.

**Satz:**

**Der Restklassenring  $(R_p, \oplus, \otimes)$  zu einem Primzahlmodul ist stets ein Körper.**

**Definition:**

**Ein Körper ist ein Tripel  $(K, +, *)$ , wobei  $K$  eine nichtleere Menge ist und  $+$  und  $*$  sind Verknüpfungen in  $K$ , also jeweils Abbildungen von  $K \times K$  in  $K$ . Dabei gelten die folgenden drei Körperaxiome**

- K1:**  $(K; +)$  ist eine kommutative Gruppe.  
Das Neutralelement  $n$  heißt die Null des Körpers.
- K2:**  $(K \setminus \{n\}; *)$  ist eine (kommutative) Gruppe.  
Das Neutralelement  $e$  heißt die Eins des Körpers.
- K3:** Es gelten die Distributivgesetze (beidseitig):  
Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $a * (b + c) = a * b + a * c$  und  
 $(a + b) * c = a * c + b * c$

**Bemerkung:**

Manchmal wird die Kommutativität der Multiplikation nicht verlangt und man spricht von einem „*Schiefkörper*“. Ein „*kommutativer Schiefkörper*“ ist dann ein „*Körper*“ im eben definierten Sinn. Wir werden uns auf kommutative Körper beschränken.

Man kann einen Körper beschreiben als einen Ring mit Einselement, bei dem alle Elemente außer der Null ein multiplikativ Inverses besitzen.

Die wichtigsten Beispiele für Körper sind:

- Der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen.
- Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.
- Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen.
- Die Restklassenringe zu Primzahlmoduln  $(\mathbb{R}_p; \oplus, \otimes)$

Gegenbeispiele:

- Die natürlichen Zahlen bzw. die ganzen Zahlen (was ist nicht erfüllt?)
- Die Restklassenringe zu Nichtprimzahlen.

**Satz über Körper**

**In einem Körper  $(K, +, *)$  mit dem Nullelement  $0$  gelten folgende Rechengesetze für alle Elemente  $a, b, c$  des Körpers:**

- (1)  $a * 0 = 0$                       (2)  $(-a) * b = -(a * b)$                       (3)  $(-a) * (-b) = a * b$
- (4) Aus  $a * b = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$
- (5) Die Gleichung  $a * x + b = c$  besitzt für  $a \neq 0$  stets eine eindeutige Lösung.
- (6) Quadratische Gleichungen  $ax^2 + bx + c = 0$  besitzen stets entweder keine oder genau eine oder genau zwei Lösungen.

**Beweis:**

- (1)  $a * 0 = a * (0 + 0) = a * 0 + a * 0$  gilt wegen Neutraleigenschaft der Null und K3. Wegen K1 ist jedoch die Lösung der Gleichung  $a * 0 + x = a * 0$  eindeutig und daher muss  $a * 0 = 0$  sein, denn wir wissen, dass  $a * 0 + 0 = a * 0$  ist (NE der Null).

(2) Es gilt:  
 $0 = 0 * b = (a + (-a)) * b = a * b + (-a) * b$  und damit ist  $(-a) * b = -(a * b)$ .

(3) Zweimalige Anwendung von (2) ergibt die Aussage von (3).

Wir bemerken, dass die bisher bewiesenen Gleichungen auch **in beliebigen Ringen gelten**, da wir bisher nur die Axiome K1 und K3 benutzt haben, die mit den Ringaxiomen R1 und R3 übereinstimmen.

(4) Sei  $a * b = 0$ . Fall 1:  $a = 0$ , dann ist die Aussage bewiesen.

Fall 2: Ist  $a \neq 0$ , so gibt es nach K2 ein multiplikativ inverses Element zu  $a$  (Kehrwert)  $a^{-1}$ , mit dem wir die Gleichung von links her durchmultiplizieren und unter Anwendung des Assoziativgesetzes folgende Gleichungen erhalten:

$$a * b = 0 \Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * 0 = 0 \Rightarrow (a^{-1} * a) * b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

In jedem der beiden möglichen Fälle ist also die Behauptung erfüllt und die Aussage (4) bewiesen. Bitte beachten Sie, dass diese nicht mehr in beliebigen Ringen gilt, sondern wirklich nur in Körpern.

(5) Mit Hilfe des Inversen von  $a$  (das ja existiert, weil  $a \neq 0$  vorausgesetzt wurde) findet man leicht die Lösung in der üblichen Weise:

$$a * x + b = c \Rightarrow a * x = c + (-b) \Rightarrow a^{-1} * (a * x) = x = a^{-1} * (c + (-b))$$

Die Eindeutigkeit der Lösung ist leicht indirekt nachweisbar.

(6) Die Methode zu diesem Beweis ist genau die, die man in der Schulalgebra zur Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (der sogenannten „Mitternachtsformel“) benutzt:

$a * x^2 + b * x + c = 0$  Wir multiplizieren mit  $a^{-1}$  durch (wäre  $a = 0$ , so hätten wir gar keine quadratische Gleichung vorliegen).

$x^2 + p * x + q = 0$  Wir ersetzen  $a^{-1} * b$  bzw.  $a^{-1} * c$  durch  $p$  bzw.  $q$ .

$x^2 + p * x + q = 0$  Sofern Division durch  $2 = 1 + 1$  möglich ist, d. h. sofern in dem Körper  $1 + 1 \neq 0$  ist, gibt es  $s$  mit  $2 * s = p$  und

$x^2 + 2 * s * x + s^2 = s^2 - q$  man kann quadratische Ergänzung durchführen.

$(x + s)^2 = s^2 - q$  Je nachdem, ob  $s^2 - q$  ein Quadrat oder 0 oder kein Quadrat ist, gibt es nun zwei bzw. eine bzw. keine Lösung der Gleichung.

Wir wollen auf die Beweise dieser Aussagen im Einzelnen verzichten, obwohl sie alle leicht zu führen sind und verweisen auf die Literatur zur Algebra. Stattdessen wollen wir im Anschluss einige Rechenoperationen in endlichen Körpern durchführen, um uns an das Rechnen in diesen zu gewöhnen.

### **Die Charakteristik eines Körpers:**

Ist  $e$  das Neutralelement der Multiplikation (die Eins) eines Körpers und gibt es eine kleinste natürliche Zahl  $\chi$  der Art, dass  $e + e + \dots + e = \chi e = 0$  ist, so gilt für alle Elemente  $a$  des Körpers  $\chi a = 0$  und man nennt  $\chi$  die **Charakteristik** des Körpers. Gibt es keine solche natürliche Zahl, dann hat der Körper die Charakteristik  $\chi = 0$  (z. B. die Körper  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ). [Der griechische Buchstabe  $\chi$  wird als „chi“ gesprochen. Dies soll an den Anfangsbuchstaben des Wortes Charakteristik erinnern.]

Der Restklassenkörper mod  $p$  hat die Charakteristik  $\chi = p$ .

Ohne Beweis teilen wir folgende Tatsache über endliche Körper mit:

**Satz:**

**Die Charakteristik jedes endlichen Körpers ist eine Primzahl.**

Die einfachsten Körper sind die Restklassenkörper zu Primzahlmodulen, also  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_5$ ,  $R_7$  usw. Es erhebt sich nun die Frage, ob es z. B. auch Körper mit 4 Elementen gibt bzw. ganz generell: Gibt es für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  endliche Körper mit genau  $n$  Elementen? Wiederum teilen wir ohne Beweis einen Satz aus der Algebra über endliche Körper mit.

**Satz:**

**Zu jeder Primzahlpotenz  $p^k$  gibt es genau einen Körper mit genau  $p^k$  Elementen. Seine Charakteristik ist  $p$ . Er enthält einen zum Restklassenkörper mod  $p$  isomorphen Unterkörper (den „Primkörper“).**

Man nennt die endlichen Körper zu Ehren des französischen Mathematikers E. Galois auch **Galoisfelder** (das englische Wort für einen algebraischen Körper ist „field“).

[*Evariste Galois 1811-1832*. Französischer Mathematiker. Gilt als der Begründer der Gruppentheorie. Nach ihm ist die Theorie der Körpererweiterungen als „Galoistheorie“ benannt. Starb beim Duell. Hat seine wesentlichen mathematischen Ideen noch in der Nacht vor dem Duelltod aufgeschrieben.]

Wir wollen nun zeigen, dass es einen **Körper mit genau 4 Elementen** gibt, indem wir diesen schrittweise konstruieren. Im Abschnitt 2.6 dieses Kapitels zeigen wir dann eine Methode, wie man allgemein aus dem Primkörper  $GF(p)$ , also dem Restklassenkörper mod  $p$ , für beliebiges  $k$  den Körper  $GF(p^k)$  konstruieren kann.

**Konstruktion eines Körpers mit genau 4 Elementen:**

Neben dem Nullelement 0 und dem Einselement 1 enthält der Körper noch zwei weitere Elemente  $a$  und  $b$ , also  $K = \{0, 1, a, b\}$ .

Weil der Körper die Charakteristik 2 hat (siehe oben) ist  $1 + 1 = 0$  und daher auch  $a + a = b + b = 0$ . Beweis:  $a + a = a * (1 + 1) = a * 0 = 0$ . In der additiven Gruppe  $(K, +)$  des Körpers  $K$  sind also alle Elemente selbstinvers. Daher ist die additive Gruppe die bekannte Kleinsche Vierergruppe (auch Diedergruppe  $D_2$  genannt) und wir können die Verknüpfungstafel leicht ergänzen, da wir wissen, dass in jeder Zeile und jeder Spalte der Tafel jedes Element genau einmal vorkommt.

Nach dem Körperaxiom  $K_2$  bilden alle von 0 verschiedenen Elemente des Körpers eine multiplikative Gruppe, deren Neutralelement die 1 des Körpers ist. Weil es jedoch bis auf Isomorphie nur eine einzige Gruppe von Ordnung 3 gibt, ist es leicht, die Gruppentafel dieser multiplikativen Gruppe aufzustellen.

**Aufgabe 2:**

- a) Ergänzen Sie die Gruppentafel für die additive Gruppe  $(K, +)$  und für die multiplikative Gruppe  $(K \setminus \{0\}; *)$  für den Körper  $(K, +, *)$  mit den vier Elementen 0, 1, a und b.

+	0	1	a	b
0	0			
1		0		
a			0	
b				0

*	1	a	b
1	1	a	b
a	a		
b	b		

- b) Zeigen Sie, dass im Körper  $K = GF(4)$  die folgenden binomischen Formeln gelten:  
 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$        $(a - b)^2 = a^2 - b^2 = a^2 + b^2$        $(a + b) * (a - b) = a^2 + b^2$
- c) Warum kann man beim Rechnen in Körpern der Charakteristik 2 keine Vorzeichenfehler machen?

Wir ergänzen unsere kurze Einführung in die Algebra endlicher Körper durch Angabe eines weiteren grundlegenden Satzes über endliche Körper, den wir ohne Beweis mitteilen:

**Sätze über endliche Körper:**

- a) **Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers ist stets zyklisch. Als Folge davon ist jeder endliche Körper kommutativ (es gibt also keine endlichen Schiefkörper).**
- b) **Jeder endliche Körper besitzt einen Primkörper, der zu einem Restklassenkörper isomorph ist. Daher ist die Charakteristik jedes endlichen Körpers eine Primzahl.**
- c) **Zu jeder Primzahlpotenz  $p^n$  gibt es bis auf Isomorphie genau einen Körper.**

## 2.3 Beispiele affiner Koordinatenebenen über endlichen Körpern

### a) Die Koordinatenebene $AG(2, 2)$ über dem Restklassenkörper mod 2

Die Bezeichnung „**AG(2, 2)**“ für die hier behandelte Geometrie soll folgende Eigenschaften zum Ausdruck bringen: „**Affine Geometrie der Dimension 2 über einem Körper von Ordnung 2**“. Eine  $AG(2, 3)$  wäre daher die affine Ebene über dem Restklassenkörper mod 3, dagegen eine  $AG(3, 2)$  ein affiner dreidimensionaler Raum über dem Restklassenkörper mod 2.

Mit den Elementen 0 und 1 als Koordinaten können wir nur vier verschiedene Punkte beschreiben:  $A(0; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(1; 0)$  und  $D(1; 1)$ . Diese 4 Punkte sind die „Punkte“ unserer affinen Koordinatenebene über dem Körper  $\mathbb{R}_2$ .

Geraden werden durch lineare Gleichungen beschrieben, dafür gibt es nur die folgenden 6 Möglichkeiten:

$$a...x = 0 \quad b...x = 1 \quad c...y = 0 \quad d...y = 1 \quad e...x + y = 0 \quad f...x + y = 1$$

#### **Aufgabe 3:**

- Stellen Sie durch Punktprobe fest, welche Punkte mit welchen Geraden inzidieren.
- Stellen Sie eine Inzidenztabelle für die 4 Punkte und die 6 Geraden auf.
- Welche der Geraden sind jeweils zueinander parallel?  
Wie kann man das an den Gleichungen erkennen?
- Zeichnen Sie ein Netz, das die entstandene Inzidenzstruktur darstellt.
- Überprüfen Sie, ob die Struktur die Axiome A1 bis A3 einer affinen Inzidenzebene erfüllt.
- Zeigen Sie, dass die Struktur genau das Minimalmodell (Tetraedermodell) einer affinen Inzidenzebene ergibt.

Wir wollen nun analytisch begründen, warum es in dieser Geometrie (und in allen analytischen Geometrien über Körpern mit der Charakteristik 2) keine Mittelpunkte gibt:

Für den Mittelpunkt  $M(p; q)$  der Punkte  $A(a; b)$  und  $B(c; d)$  müsste gelten:

$$p + p = a + c \quad (1) \quad \text{und} \quad q + q = b + d \quad (2)$$

Wir bemerken, dass bei Charakteristik 2 für alle Körperelemente gilt  $x + x = 0$ , daher sind die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) auf alle Fälle 0. Wann aber können die rechten Seiten ebenfalls 0 sein? Dies geht doch nur, wenn sowohl  $a = c$  als auch  $b = d$  ist, also wenn die Punkte A und B identisch sind, sonst ist die rechte Seite in mindestens einer der beiden Gleichungen von 0 verschieden und durch keinen Punkt M zu erfüllen. Es gibt also zu zwei *verschiedenen* Punkten niemals einen Mittelpunkt.

## b) Die affine Koordinatenebene $AG(2, 3)$ über dem Restklassenkörper mod 3

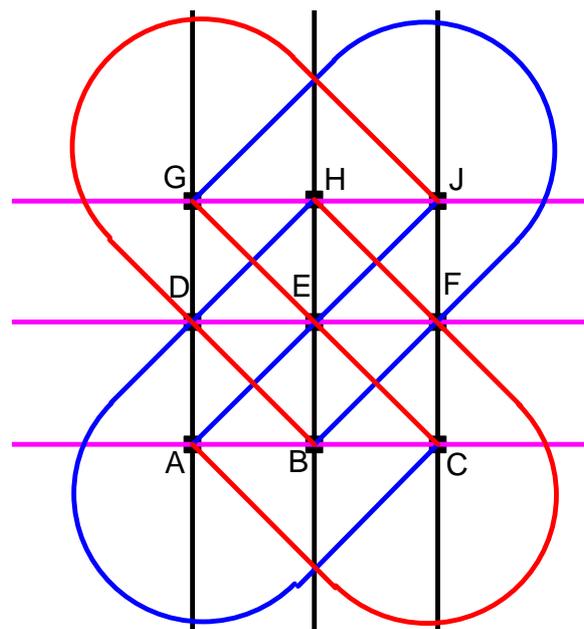
### Aufgabe 4:

Gegeben ist der Restklassenkörper  $R_3$  mit den Elementen 0, 1 und 2.

- Ermitteln Sie sämtliche möglichen Punkte der affinen Koordinatenebene über diesem Körper durch Angabe ihres Koordinatenpaares.
- Ermitteln Sie sämtliche möglichen Geraden der affinen Koordinatenebene über diesem Körper durch Angabe des jeweiligen Koeffiziententripels  $(a; b; c)$  der linearen Gleichung  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .  
Beachten Sie nun, dass es zueinander äquivalente Gleichungen gibt!
- Stellen Sie Inzidenz von Punkten und Geraden fest.  
Erstellen Sie eine Inzidenztabelle.
- Zeichnen Sie ein Netz dieser Geometrie. Zeigen Sie die Übereinstimmung der Struktur mit der affinen Inzidenzebene von Ordnung 3 (siehe Abschnitt 1.4 b)).
- Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts  $M$  für die Punkte  $H(1; 2)$  und  $D(0; 1)$ . Zeigen Sie, dass  $M$  der dritte Punkt der Gerade  $HD$  ist. Zeigen Sie allgemein: Der Mittelpunkt zweier Punkte  $X$  und  $Y$  ist der dritte Punkt der Geraden  $XY$ .
- Untersuchen Sie Eigenschaften von Seitenhalbierenden und Mittelparallelen von Dreiecken. Warum sind in jedem Dreieck alle drei Seitenhalbierenden parallel?
- Zeigen Sie, dass die Verkettung von zwei Punktspiegelungen stets eine Translation mit dem doppelten orientierten Abstand der beiden Zentren als Schubvektor ergibt.
- Was ergibt die Verkettung von drei bzw. von vier Punktspiegelungen?
- Gilt der Satz vom Mittenviereck in dieser Geometrie?

### Aufgabe 5:

- Zeigen Sie, dass man auf folgende Weise eine Orthogonalitätsrelation einführen kann: Zwei Geraden sind zueinander orthogonal, wenn je eine parallel zu einer der beiden Achsen ist oder wenn das Produkt ihrer Geradensteigungen den Wert  $-1$  ergibt, d.h.  $m_1 \cdot m_2 = -1$  gilt. Welche Parallelscharen sind zueinander orthogonal?
- Wie viele Rechtecke und wie viele rechtwinklige Dreiecke gibt es in dieser Geometrie?
- Beweisen Sie, dass alle Dreiecke rechtwinklig sind.  
Wo liegt der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks?  
Überprüfen Sie konkrete Beispiele an Hand der Figur und durch Rechnung.



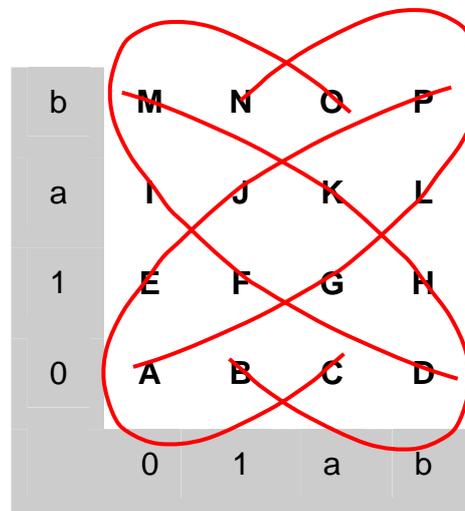
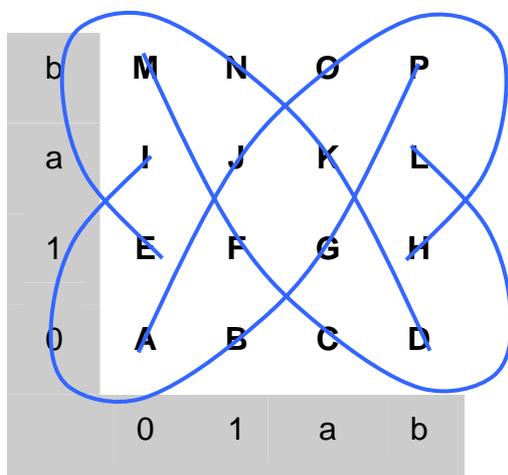
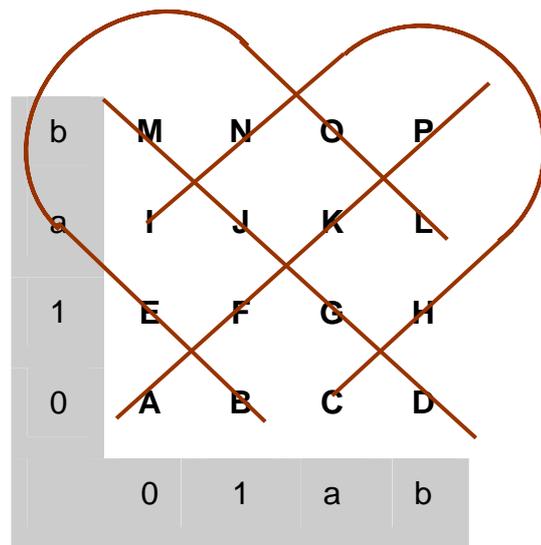
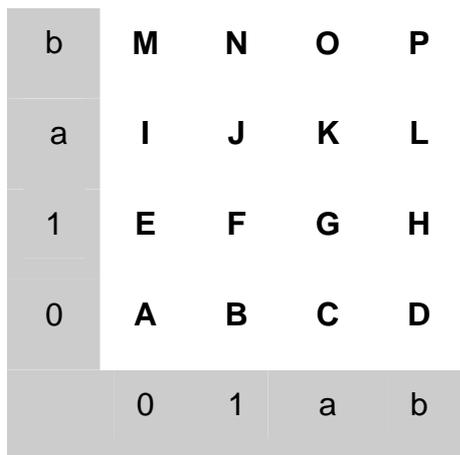
- d) Wie kann man Achsenspiegelungen in dieser Geometrie definieren?
- e) Zeigen Sie, dass jedes Dreieck dieser Geometrie rechtwinklig und gleichschenkelig ist, d.h. dass die Höhe zur Hypotenuse gleichzeitig Symmetrieachse des Dreiecks ist.
- f) Berechnen Sie für ein bestimmtes von Ihnen gewähltes Dreieck analytisch die Umkreismitte und den Höhenschnittpunkt. Welche Besonderheit ergibt sich? Kontrollieren Sie Ihre Rechnung an Hand der obigen Zeichnung.
- g) Was ergibt die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an
- zueinander parallelen Achsen?
  - zueinander senkrechten Achsen?
  - sich beliebig schneidenden Achsen?
- h) Zeigen Sie an Beispielen die Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes der gewöhnlichen reellen Geometrie: Die Verkettung von drei Achsenspiegelungen ist genau dann wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen zueinander parallel oder kopunktal sind.
- i) Wie könnte man „Gleitspiegelungen“ in dieser Geometrie definieren? Zeigen Sie: Die Verkettung einer Punktspiegelung an  $P$  und einer Achsenspiegelung an  $g$  ist eine Gleitspiegelung. Gleitgerade ist das Lot von  $P$  auf  $g$  und Schubvektor der doppelte orientierte Abstand von  $P$  zu  $g$ .
- j) Wie könnte man Achsenaffinitäten, wie Scherungen und wie Schrägspiegelungen in dieser Geometrie definieren? Geben Sie Beispiele.
- k) Gibt es echte symmetrische Trapeze und symmetrische Drachen in dieser Geometrie?
- l) Wie viele verschiedene Translationen und wie viele zentrische Streckungen sind in dieser Geometrie möglich? Wie viele Dilatationen gibt es insgesamt?
- m) Wie viele verschiedene Achsenaffinitäten gibt es in dieser Geometrie?
- n) Zeigen Sie, dass es genau zwei Klassen zueinander „kongruenter“ Strecken gibt. Dabei definieren wir eine Kongruenz als eine Achsenspiegelung oder als eine Verkettung von endlich vielen Achsenspiegelungen.

Wir erkennen an dieser Aufgabe, dass sich aus der Einfachheit der Inzidenzgeometrie mit Einführung einer Orthogonalitätsrelation bereits ein beachtlicher Reichtum und eine erstaunliche Vielfalt an geometrischen Fragestellungen entfalten lassen.

**c) Die affine Koordinatenebene  $AG(2, 4)$  über dem Körper  $K$  mit 4 Elementen**

**Aufgabe 6:**

- Konstruieren Sie analog zum Vorgehen in den Abschnitten a) und b) die affine Koordinatenebene über dem Körper  $K = \{0, 1, a, b\}$  mit vier Elementen.
- Zeigen Sie, dass man genau das geometrische Modell einer affinen Inzidenzebene der Ordnung 4 erhält.
- Untersuchen Sie selbst einige Besonderheiten dieser Geometrie.
- Wie viele Punkte und wie viele Geraden gibt es in dieser Geometrie?
- Wie viele Punkte inzidieren mit jeder Gerade und wie viele Geraden mit jedem Punkt?
- Wie erhält man auf Grund algebraischer Überlegungen die Anzahl der Richtungen?
- Bestätigen Sie, dass die nachstehenden Grafiken von Parallelscharen die  $AG(2, 4)$  repräsentieren.



**Steigung 1:**

$y = x;$	<b>0, 0</b>	<b>1, 1</b>	<b>a, a</b>	<b>b, b</b>
$y = x + 1$	<b>0, 1</b>	<b>1, 0</b>	<b>a, b</b>	<b>b, a</b>
$y = x + a$	<b>0, a</b>	<b>1, b</b>	<b>a, 0</b>	<b>b, 1</b>
$y = x + b$	<b>0, b</b>	<b>1, a</b>	<b>a, 1</b>	<b>b, 0</b>

**Steigung a:**

$y = a * x$	<b>0, 0</b>	<b>1, a</b>	<b>a, b</b>	<b>b, 1</b>
$y = a * x + 1$	<b>0, 1</b>	<b>1, b</b>	<b>a, a</b>	<b>b, 0</b>
$y = a * x + a$	<b>0, a</b>	<b>1, 0</b>	<b>a, 1</b>	<b>b, b</b>
$y = a * x + b$	<b>0, b</b>	<b>1, 1</b>	<b>a, 0</b>	<b>b, a</b>

**Steigung b:**

$y = b * x$	<b>0, 0</b>	<b>1, b</b>	<b>a, 1</b>	<b>b, a</b>
$y = b * x + 1$	<b>0, 1</b>	<b>1, a</b>	<b>a, 0</b>	<b>b, b</b>
$y = b * x + a$	<b>0, a</b>	<b>1, 1</b>	<b>a, b</b>	<b>b, 0</b>
$y = b * x + b$	<b>0, b</b>	<b>1, 0</b>	<b>a, a</b>	<b>b, 1</b>

Wir haben die 16 Punkte der  $AG(2, 4)$  mit ihren Koordinaten in einem Quadratraster (Koordinatensystem) dargestellt. Die Grafiken jeder Farbe geben jeweils eine Schar von Parallelen an. Die zugehörigen Geradengleichungen und die auf den einzelnen Geraden liegenden Punkte sind in den oben stehenden Tabellen aufgezählt. Neben diesen drei Steigungen mit den Werten 1, a und b gibt es noch die zur x-Achse parallele Richtung mit der Steigung 0 und die zur y-Achse parallele Richtung mit nicht definierter Steigung bzw. formal der Steigung  $\infty$ .

Mit dieser Kenntnis kann man nun affine Geometrie betreiben und einfache Fragestellungen kombinatorischer oder geometrischer Art verfolgen.

- Wie viele Strecken, Dreiecke, Vierecke, Parallelogramme gibt es?
- Gibt es nun – im Gegensatz zur affinen Ebene der Ordnung 3 – auch nicht trapezförmige Vierecke?
- Lässt sich ein Sechseck mit drei Paaren paralleler Gegenseiten finden?
- Gibt es Achsenaffinitäten?
- Warum lässt sich keine sinnvolle Orthogonalitätsrelation einführen?
- Wie verlaufen die Diagonalen von Parallelogrammen?
- Warum kann man Mittelpunkte nicht sinnvoll definieren?
- Wie viele Translationen gibt es in dieser Geometrie?

**d) Die affine Koordinatenebene über dem Restklassenkörper mod 5.****Aufgabe 7:**

- a) Stellen Sie Verknüpfungstabellen für die Addition der Restklassen mod 5 und die Multiplikation der von 0 verschiedenen Restklassen mod 5 auf.
- b) Stellen Sie analog zu Aufgabe 1 in Abschnitt 2.2. eine Tabelle auf für die Elemente des Körpers  $R_5$ .
- c) Bestimmen Sie die Koordinatenpaare sämtlicher Punkte und die Koordinatentripel sämtlicher Geraden. Wie viele Punkte und wie viele Geraden gibt es? Wie viele Richtungen gibt es in dieser Geometrie? Wie viele Geraden inzidieren mit jedem Punkt und wie viele Punkte mit jeder Gerade?
- d) Wie viele Strecken, wie viele Dreiecke, wie viele Vierecke und wie viele Parallelogramme gibt es in dieser Ebene?
- e) Kann man auf sinnvolle Weise Mittelpunkte definieren (gehen Sie dabei analytisch vor; in diesem Körper existiert der Kehrwert von 2, also die Zahl  $\frac{1}{2}$ ; siehe b) ).
- f) Untersuchen Sie nach Einführung von Mittelpunkten Punktspiegelungen und deren Verkettungen sowie Dreieckssätze über Seitenhalbierende und Mittelparallelen.
- g) Zeigen Sie, dass die grafische Darstellung auf der folgenden Seite genau die Ebene  $AG(2, 5)$  beschreibt.

**Aufgabe 8:**

Wir versuchen, in dieser Geometrie eine Orthogonalitätsrelation einzuführen.

- a) Warum eignet sich die Zahl  $-1 = 4$  nicht als Orthogonalitätskonstante, d.h. warum kann man nicht  $m_1 \cdot m_2 = -1$  als definierende Gleichungen für die Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  zweier zueinander senkrechter Geraden  $g_1$  und  $g_2$  wählen? Welche Geradensteigung hätte dann eine zur Gerade mit der Steigung  $m_1 = 2$  bzw.  $m_1 = 3$  senkrechte Gerade?
- b) Führen Sie eine Orthogonalitätsrelation mit der Orthogonalitätskonstante 2 ein. Welche Parallelscharen (Richtungen) sind nun jeweils zueinander senkrecht?
- c) Untersuchen Sie nun Dreiecke auf Höhen und Höhenschnittpunkte, Mittelsenkrechten und Umkreismitte sowie rechtwinklige Dreiecke. Liegt die Umkreismitte von rechtwinkligen Dreiecken auf der Hypotenusenmitte?
- d) Untersuchen Sie die Gültigkeit des Satzes über die Eulergerade in Dreiecken: Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismitte liegen kollinear.
- e) Untersuchen Sie verschiedene Formen von Vierecken in dieser Geometrie. Wie viele Rechtecke gibt es?

**Aufgabe 9:**

- a) Zeigen Sie, dass man an Stelle der Orthogonalitätskonstante 2 genau so gut die Orthogonalitätskonstante 3 verwenden kann. Welche Richtungen sind nun zueinander orthogonal?
- b) Untersuchen Sie nun geometrische Eigenschaften (Figuren, Abbildungen) Ihrer Wahl. Lassen Sie sich etwas einfallen, indem Sie sich an die gewöhnliche Geometrie erinnern.

### Die affine Koordinatenebene über dem Restklassenkörper mod 5:

Geradengleichungen geordnet nach Richtungen (Parallelscharen):

$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$x = c$
$y=0$	$y=x$	$y=2x$	$y=3x$	$y=4x$	$x=0$
$y=1$	$y=x+1$	$y=2x+1$	$y=3x+1$	$y=4x+1$	$x=1$
$y=2$	$y=x+2$	$y=2x+2$	$y=3x+2$	$y=4x+2$	$x=2$
$y=3$	$y=x+3$	$y=2x+3$	$y=3x+3$	$y=4x+3$	$x=3$
$y=4$	$y=x+4$	$y=2x+4$	$y=3x+4$	$y=4x+4$	$x=4$

Wir stellen nun jede Parallelschar (außer den Scharen  $x = c$  und  $y = c$ ) einzeln dar. In jedem der vier Felder sind diejenigen Punkte, die auf der gleichen Gerade der Parallelschar liegen, mit der gleichen Farbe eingefärbt.

<b>m=1</b>					<b>m=4</b>						
b=4	V	W	X	Y	Z	b=4	V	W	X	Y	Z
b=3	Q	R	S	T	U	b=3	Q	R	S	T	U
b=2	L	M	N	O	P	b=2	L	M	N	O	P
b=1	F	G	H	J	K	b=1	F	G	H	J	K
b=0	A	B	C	D	E	b=0	A	B	C	D	E
<b>m=2</b>					<b>m=3</b>						
b=4	V	W	X	Y	Z	b=4	V	W	X	Y	Z
b=3	Q	R	S	T	U	b=3	Q	R	S	T	U
b=2	L	M	N	O	P	b=2	L	M	N	O	P
b=1	F	G	H	J	K	b=1	F	G	H	J	K
b=0	A	B	C	D	E	b=0	A	B	C	D	E

### e) Zur Analytischen Geometrie in Koordinatenebenen über Körpern

**Zunächst stellen wir zur Erinnerung einige Tatsachen aus der analytischen Geometrie im Reellen zur Verfügung:**

Sind zwei Punkte P und Q mit den Koordinaten  $P(x_1; y_1)$  und  $Q(x_2; y_2)$  gegeben, so kann man sowohl die Steigung der Strecke bzw. Gerade PQ, als auch die Gleichung der Geraden PQ wie folgt berechnen:

$$\text{Steigung } m_{PQ} = \frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ein beliebiger Punkt X mit den Koordinaten  $X(x; y)$  liegt genau dann auf der Geraden PQ, wenn die Steigung der Strecke PX denselben Wert hat, wie die der Strecke PQ. Damit hat man eine charakteristische Bedingung für genau die Punkte der Geraden PQ,

$$\text{also die Gleichung der Geraden PQ: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Damit sie auch noch für den Punkt P selbst gilt, wird sie nennerfrei geschrieben:

$$y - y_1 = m * (x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1).$$

Damit hat man die Gleichungen der Geraden mit definierter Steigung m durch den Punkt  $P_1$  (Punkt-Steigungs-Form) bzw. durch zwei Punkte P und Q (Zwei-Punkte-Form). Die Parallelen zur y-Achse haben keine definierte Steigung und ihre Gleichungen die Form  $x = \text{const.}$

Zwei Geraden mit den Steigungen  $m_1$  bzw.  $m_2$  stehen in der reellen Koordinatenebene genau dann zueinander senkrecht, wenn gilt:  $m_1 * m_2 = -1$ . Man nennt  $-1$  die **Orthogonalitätskonstante**. Sie darf keine Quadratzahl sein, weil sonst eine Gerade zu sich selbst senkrecht wäre, ein zwar denkbarer, aber doch pathologischer Fall.

Fertigen Sie sich für jede dieser Erinnerungen begründende Skizzen an.

Nun behandeln wir ausführlich eine Dreiecksaufgabe in der Koordinatenebene über dem Restklassenkörper mod 5:

**Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 0)$  und  $C(4; 2)$ .**

a) Mittelpunkte der Dreiecksseiten:

$$\text{Mitte } C_1 \text{ von AB: } \left( \frac{0+3}{2}; \frac{0+0}{2} \right) = 3 * (3; 0) = (4; 0), \text{ weil 3 der Kehrwert von 2 ist.}$$

$$\text{Analog: Mitte } B_1 \text{ von AC: } (2; 1) \text{ und Mitte } A_1 \text{ von BC: } (1; 1).$$

$$\text{Mittendreieck: } \quad A_1 (1; 1) \quad B_1 (2; 1) \quad C_1 (4; 0).$$

## b) Seitenhalbierende und Schwerpunkt S:

Die Seitenhalbierende  $s_c$  verläuft durch C und  $C_1$  und hat ganz offensichtlich die Gleichung  $x = 4$ , denn C und  $C_1$  haben den gleichen x-Wert, liegen also auf einer Parallelen zur y-Achse.  $s_c \dots x = 4$  (1)

Fast noch einfacher erkennt man die Gleichung der Seitenhalbierenden  $s_a$  durch A und  $A_1$ , weil A der Koordinatenursprung ist:  $s_a \dots y = x$ . (2)

Schließlich berechnen wir die Gleichung von  $s_b = BB_1$  mit Hilfe der oben angegebenen 2-Punkte-Form:

$$y - 0 = \frac{1-0}{2-3} * (x - 3) \text{ und daraus } s_b \dots y = 4 * x + 3. \quad (3)$$

Als Schnittpunkt der beiden ersten Seitenhalbierenden erhalten wir S(4; 4). Dieser Punkt erfüllt auch die Gleichung von  $s_b$  und ist daher der gesuchte Schwerpunkt.

Viel einfacher kann man ihn ermitteln als physikalischen Schwerpunkt dreier gleicher Massepunkte: Seine Koordinaten sind die Mittelwerte der Koordinaten der drei Punkte, also  $S\left(\frac{0+3+4}{3}; \frac{0+0+2}{3}\right) = 2 * (2; 2) = (4; 4)$ .

**Schwerpunkt S(4; 4).** (4)

## c) Mittelsenkrechten und Umkreismitte:

Die Mittelsenkrechte von AB ist leicht zu bestimmen, denn die beiden Achsen stehen aufeinander senkrecht:  $m_c \dots x = 4$  (5)

Nun bemerken wir, dass der Punkt C auf dieser Mittelsenkrechten liegt. Was bedeutet dieser Sonderfall für die Art des Dreiecks ABC?

Mittelsenkrechte von AC:

$$\text{Zuerst berechnen wir die Steigung von AC: } m_{AC} = \frac{2-0}{4-0} = 3 \quad (6)$$

Mit der **Orthogonalitätskonstante 2** erhält man die Steigung der dazu senkrechten Geraden zu  $m_2 = 4$ , denn  $3 * 4 = 2$ .

Damit erhält man die Gleichung der Mittelsenkrechten  $m_b$  mit der Punkt-Steigungs-Form:  $y - 1 = 4 * (x - 2)$  oder  $m_b \dots y = 4 * x + 3$  (7)

Mittelsenkrechte von BC:

$$\text{Wir bestimmen zuerst die Steigung von BC: } m_{BC} = \frac{2-0}{4-3} = 2 \quad (8)$$

Mit der Orthogonalitätskonstante 2 erhält man die Steigung der dazu senkrechten Geraden zu  $m_1 = 1$ , denn  $2 * 1 = 2$ .

Damit hat man die Gleichung der Mittelsenkrechte  $m_a$  nach der Punkt-Steigungs-Form:  $y - 1 = 1 * (x - 1)$  oder  $m_a \dots y = x$  (9)

Wir bemerken, dass die Mittelsenkrechte  $m_a$  durch die Ecke A verläuft. Was bedeutet dies für die spezielle Form des Dreiecks? Warum muss das Dreieck „gleichseitig“ sein?

Als Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ergibt sich als **Umkreismitte** der Punkt **U(4; 4)**. Dieser ist gleich dem Schwerpunkt S. Was heißt das für das spezielle Dreieck? Warum muss nun auch der Höhenschnittpunkt der Punkt **U = S = H(4; 4)** sein? Berechnen Sie zur Übung und zur Kontrolle noch den Schnittpunkt der drei Dreieckshöhen und bestätigen Sie diese Vermutung.

### Alternative:

Wir verändern nun die Aufgabe, indem wir an Stelle der Orthogonalitätskonstante 2, die **Orthogonalitätskonstante 3** wählen. Da sowohl 2 als auch 3 keine Quadratzahl im Restklassenkörper ist, spricht nichts gegen diese Festsetzung.

Der Teil a) über die Seitenmitten und der Teil b) über die Seitenhalbierenden und den Schwerpunkt bleiben davon unberührt.

c') Mittelsenkrechten:

Die Mittelsenkrechte von AB hat nach wie vor die Gleichung  $m_c \dots x = 4$  (10)

Die Mittelsenkrechte von AC erhält nun die Steigung 1, weil  $3 * 1 = 3$  ist. Damit erhält man ihre Gleichung:  $y - 1 = 1 * (x - 2)$  oder

$$m_b \dots y = x + 4 \quad (11)$$

Die Mittelsenkrechte von BC erhält nun die Steigung 4, weil  $2 * 4 = 3$  ist. Damit erhält man ihre Gleichung:  $y - 1 = 4 * (x - 1)$  oder

$$m_a \dots y = 4 * x + 2 \quad (12)$$

Als Schnittpunkte dieser drei Mittelsenkrechten erhält man die

**Umkreismitte U'(4; 3)** (13)

Das Dreieck zwar noch *gleichschenkelig* (warum) aber nicht mehr *gleichseitig* (warum)?

d') Höhen und Höhenschnittpunkt:

Die Höhe  $h_c$  hat die Gleichung  $h_c \dots x = 4$  (14)

Die Höhe  $h_a$  hat die gleiche Steigung wie die Mittelsenkrechte  $m_a$ , geht jedoch durch die Ecke A:  $h_a \dots y = 4 * x$  (15)

Die Höhe  $h_b$  hat die Steigung 1 und geht durch B:

$$y - 0 = 1 * (x - 3) \quad h_b \dots y = x + 2 \quad (16)$$

Damit erhält man den **Höhenschnittpunkt H'(4; 1)** (17).

In der gewöhnlichen reellen Geometrie gilt folgender Satz über Dreiecke:

**Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismitte U liegen stets auf einer Geraden (EULERGERADE) und es gilt:  $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{SU}$ .**

Wir überprüfen, ob dies im vorliegenden alternativen Fall auch gilt:

$$\text{Wir erhalten } \overline{HS} = (0; 3) \quad 2 \cdot \overline{SU} = 2 * (0; 4) = (0; 8) = (0; 3) = \overline{HS}.$$

Welche erstaunliche Übereinstimmung mit der gewöhnlichen reellen Geometrie!

**f) Beispielaufgabe zur Analytischen Geometrie aus der AG(2, 7):**

Wir legen die Koordinatenebene über dem Restklassenkörper mod 7 zu Grunde und wollen als Beispiel ein Dreieck genauer untersuchen. Um unsere Geometrie möglichst reichhaltig zu gestalten, wollen wir eine Orthogonalitätsrelation mit der Orthogonalitätskonstante  $-1 = 6$  (im Körper  $R_7$ ) voraussetzen. Dies ist möglich, weil 6 kein Quadrat in diesem Körper ist. Unter Umständen ist es hilfreich, sich die Additions- und Multiplikationstafel und eine Tabelle der multiplikativen Inversenpaare (Kehrwerte) anzulegen. Aber es geht auch ohne dies mit ein wenig Übung im Kopfrechnen.

**Gegeben ist das Dreieck A(0; 0); B( 2; 4) und C(3; 5).**

a) Wir bestimmen die Mittelpunkte der Seiten, d.h. das Mittendreieck  $A_1B_1C_1$ :

$$C_1 = M_{AB} = (1; 2); \quad A_1 = M_{BC} = (6; 1); \quad B_1 = M_{CA} = (5; 6).$$

b) Bestimmung der Schwerlinien und des Schwerpunkts:

$$\text{Direkte Berechnung nach der Formel } S = \frac{A+B+C}{3} = 5 * (A + B + C) = (4; 3)$$

$$\text{Berechnung der Seitenhalbierenden } AA_1: m_1 = \frac{1}{6} = 6; y = 6 * x$$

$$\text{Berechnung der Seitenhalbierenden } BB_1: m_2 = \frac{2}{3} = 2 * 5 = 3; y = 3 * x + 5.$$

Als Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden ergibt sich der Punkt **S(4; 3)**.

c) Wir bestimmen die Umkreismitte U:

Mittelsenkrechte von AB: Steigung  $m_4$  aus der Gleichung  $m_4 * m_{AB} = -1 = 6$ .

Mit  $m_{AB} = 2$  erhält man  $m_4 = 3$  und damit die Mittelsenkrechte:  $y = 3 * x + c$ .

Weil  $C_1$  auf der Mittelsenkrechte liegen muss, erhält man  $c = 6$ .

$$\text{Mittelsenkrechte von AC: } m_{AC} = \frac{5}{3} = 5 * 5 = 4. \quad m_5 = \frac{6}{4} = 6 * 2 = 5. \quad y = 5 * x + d.$$

Da  $B_1$  auf der Mittelsenkrechte liegen muss, erhält man  $d = 2$ .

Schnitt der beiden Mittelsenkrechten ergibt: **U(2; 5)**

Zur Kontrolle berechnen wir auch die dritte Mittelsenkrechte:  $m_{BC} = 1$ . Damit  $m_6 = 6$  und  $y = 6 * x + e$ . Weil  $A_1$  auf dieser Gerade liegt, erhalten wir  $e = 0$ . Punktprobe mit U zeigt, dass U auch auf dieser Mittelsenkrechten liegt. Da diese Mittelsenkrechte durch den Punkt A verläuft, ist das Dreieck symmetrisch („gleichschenkelig“).

d) Wir bestimmen den Höhenschnittpunkt H:

$$h_c: y = 3 * x + 3 \quad h_a: y = 6 * x \quad h_b: y = 5 * x + 1.$$

Man erhält als Schnittpunkt **H(1; 6)**.

e) Wir zeigen, dass S, M und H kollinear liegen und dass gilt:  $\overrightarrow{SH} = 2 * \overrightarrow{US}$

$$\overrightarrow{US} = (2; 5) \quad 2 * \overrightarrow{US} = (4; 3) \quad \overrightarrow{SH} = (4; 3)$$

Damit gilt der Satz über die Eulergerade genau wie in der gewöhnlichen ebenen Geometrie.

## 2.4 Allgemeines über affine Koordinatenebenen über Körpern

Wir haben eine Reihe von Beispielen für affine Koordinatenebenen über Körpern untersucht, die affinen Ebenen der Ordnungen 2, 3, 4 und 5. Das dabei zu Grunde liegende Vorgehen lässt sich verallgemeinern für beliebige Körper.

Wir machen nun Aussagen über die affine Koordinatenebene über einem beliebigen endlichen Körper  $(K, +, \cdot)$  mit der Elementanzahl  $q = p^n$ , wobei  $p^n$  eine Primzahlpotenz sein muss, weil es zu anderen Anzahlen keine Körper gibt.

**Punkte** sind Koordinatenpaare  $P(x; y)$  also Elemente von  $K \times K$ .  
Deren Anzahl ist  $q^2$  also ist die **Punkteanzahl**  $q^2$ .

**Geraden** sind Koeffiziententripel  $g(a; b; c)$  mit  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

Daher scheiden von den  $q^3$  möglichen Tripeln die  $q$  Stück aus, bei denen  $a = b = 0$  ist. Von den verbleibenden  $q^3 - q$  Stück sind jeweils  $(q - 1)$  untereinander äquivalent, weil man jede Gleichung mit einem der  $(q - 1)$  von 0 verschiedenen Faktoren aus  $K$  durchmultiplizieren kann.

Die **Anzahl der verschiedenen Geraden** ist also  $(q^3 - q) / (q - 1) = q^2 + q$ .

**Inzidenz** des Punktes  $P(x; y)$  mit der Geraden  $(a; b; c)$  liegt genau dann vor, wenn die Gleichung  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$  im Körper  $K$  erfüllt ist.

### **Anzahl der Punkte je Gerade:**

Die Gleichung  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$  liefert für jede der  $q$  möglichen Einsetzungen für die Variable  $x$  jeweils genau einen Wert für  $y$  (falls  $a \neq 0$  ist). Ist  $a = 0$  und daher  $y$  konstant, so ergeben sich alle möglichen Einsetzungen für  $x$ , also ebenfalls  $q$  Werte. Daher liegen genau  **$q$  verschiedene Punkte auf jeder Geraden**.

### **Anzahl der Geraden durch jeden Punkt:**

Zu jeder der  $q$  möglichen Steigungen mit Werten aus  $K$  und außerdem parallel zur  $y$ -Achse (keine Steigung definiert, weil  $b = 0$ ) verläuft je genau eine Gerade durch jeden Punkt  $P$ , also gibt es jeweils **genau  $q + 1$  Geraden durch jeden Punkt**.

### **Anzahl der Richtungen und der Geraden je Parallelbüschel:**

Die verschiedenen Richtungen werden durch die einzelnen Parallelscharen bestimmt. Neben den Scharen mit den  $q$  verschiedenen Steigungswerten des Körpers gibt es noch die zur  $y$ -Achse parallele Schar mit nicht definierter Steigung („ $m = \infty$ “). Es gibt also genau  **$q + 1$  verschiedene Richtungen mit jeweils  $q$  Geraden je Richtung**.

Damit haben wir bisher folgendes Ergebnis:

**Es gibt für jede Primzahlpotenz  $q = p^n$  eine endliche Geometrie dieser Ordnung, nämlich die affine Koordinatenebene über dem Körper  $GF(p^n)$ .**

In dieser affinen Koordinatenebene  $AG(2, q)$  gibt es:

- $q^2$  Punkte mit je  $q + 1$  Geraden durch jeden Punkt.
- $q^2 + q$  Geraden mit je  $q$  Punkten auf jeder Gerade.
- $q + 1$  Parallelscharen zu je  $q$  Geraden.

Wir wollen nun nachweisen, dass für jede Koordinatenebene über einem Körper, die Axiome A1 bis A3 einer affinen Inzidenzebene erfüllt sind:

- *Zum Axiom A1: Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgerade:*

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte  $A(a_1; a_2)$  und  $B(b_1; b_2)$  und o. B. d. A sei  $a_1 \neq b_1$ . Zu zeigen ist nun, dass es genau eine Gerade  $g$  gibt, mit der beide Punkte inzidieren:

Sei  $g \dots a * x + b * y + c = 0$ . Sowohl A als auch B müssen die Gleichung erfüllen:

$$a * a_1 + b * a_2 + c = 0$$

$$a * b_1 + b * b_2 + c = 0$$

Nach Subtraktion erhalten wir:

$$a * (a_1 - b_1) + b * (a_2 - b_2) = 0 \text{ und daraus } \frac{a}{b} = - \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}. \text{ Da } a_1 - b_1 \neq 0 \text{ ist, können wir } b = 1 \text{ wählen und erhalten damit eindeutig } a \text{ und aus einer der beiden ersten Gleichungen } c. \text{ Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Verbindungsgerade gezeigt.}$$

Wir wählen  $b = 1$  und erhalten damit eindeutig  $a$  und aus einer der beiden ersten Gleichungen  $c$ . Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Verbindungsgerade gezeigt.

Hinweis:

Für Kenner der Linearen Algebra geht das kürzer: Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems für die drei Variablen  $a$ ,  $b$  und  $c$  ist  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{pmatrix}$ , also

vom Rang 2. Daher besitzt das System eine vom Nullvektor verschiedene Lösung der Form  $t * (a_0; b_0; c_0)$ , also eine eindeutig bestimmte Gerade.

- *Zum Axiom A2: Parallelenaxiom*

Gegeben sei eine Gerade  $g \dots a * x + b * y + c = 0$  und ein Punkt  $P(x_1; y_1)$ .

Wir setzen eine Parallele  $h$  zu  $g$  an:  $h \dots a * x + b * y + d = 0$ .

Weil  $P$  auf  $h$  liegt, ergibt sich  $d$  eindeutig aus der Gleichung  $a * x_1 + b * y_1 + d = 0$ . Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Parallele zu  $g$  durch  $P$  gezeigt.

- *Zum Axiom A3: Reichhaltigkeitsaxiom*

Es ist leicht, drei nicht kollineare Punkte für jede Koordinatenebene über einem Körper anzugeben, da jeder Körper mindestens die beiden Elemente 0 und 1 enthalten muss:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$  und  $C(0; 1)$ .

Die – nach bereits bewiesenem Axiom A1 – eindeutig bestimmte und existierende Gerade  $AB$  enthält  $C$  nicht, die Gerade  $AC$  enthält  $A$  nicht und die Gerade  $BC$  enthält  $A$  nicht. Damit ist das Erfülltsein von A3 ebenfalls nachgewiesen.

**Zusammenfassung:**

**Die affine Koordinatenebene über einem Körper mit  $q$  Elementen ist stets eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$ .**

In Ebenen mit ungerader Ordnung  $q$  (also gerader Anzahl  $q + 1$  von Richtungen) lässt sich i. Allg. eine passende **Orthogonalitätsrelation** einführen. In Ebenen gerader Ordnung (ungerade Anzahl von Richtungen) dagegen, muss es notwendigerweise isotrope (selbstsenkrechte) Richtungen geben, wenn man partout eine Orthogonalität einführen will, da sich die Richtungen nicht zu jeweils orthogonalen Paaren gruppieren lassen.

In Ebenen *gerader Ordnung*, also solchen mit Körpercharakteristik  $\chi = 2$ , gibt es keine Mittelpunkte, in solchen mit Körpercharakteristik  $\chi = 3$  keinen Dreiecksschwerpunkt.

Wir ergänzen zwei weitere Aussagen ohne Beweis:

- In jeder Koordinatenebene über einem Körper mit der Charakteristik 2, für den also die Ordnung  $q = 2^n$  eine Zweierpotenz ist, sind alle Vierecke Fano-Vierecke, d.h. ihre drei Diagonalepunkte liegen kollinear. Für Parallelogramme bedeutet dies, dass ihre Diagonalen stets zueinander parallel sind.
- In jeder Koordinatenebene über einem Körper mit ungerader Charakteristik gibt es kein Fano-Viereck.

Wir wollen noch einige **Anzahlaussagen** über affine Ebenen der Ordnung  $q$  machen:

**Anzahl aller Strecken:**

Es gibt genau  $\binom{q^2}{2} = \frac{q^2 \cdot (q^2 - 1)}{2} = \frac{q^2 \cdot (q - 1) \cdot (q + 1)}{2}$  verschiedene Strecken.

**Anzahl aller Dreiecke:**

Wir geben hier nur das Ergebnis an, die Abzählstrategie kann auf verschiedene Weisen erfolgen:  $\frac{q^3 \cdot (q + 1) \cdot (q - 1)^2}{6}$

**Anzahl aller Parallelogramme:**  $\frac{q^3 \cdot (q - 1)^2 \cdot (q + 1)}{8}$

**Anzahl der Vierecke:**  $\frac{q^3 \cdot (q - 1)^2 \cdot (q + 1) \cdot (q^2 - 3q + 3)}{8}$

Anzahlen in endlichen affinen Ebenen der Ordnung $q$				
Ordnung $q$	Strecken	Dreiecke	Vierecke	Parallelogramme
2	6	4	3	3
3	36	72	162	54
4	120	480	2520	360
5	300	2000	19500	1500
6	630	6300	99225	4725
7	1176	16464	382788	12348

### Aufgabe 10:

Beweisen Sie die vier oben genannten Zahlaussagen für affine Inzidenzebenen der Ordnung  $q$ .

## 2.5 Affine Räume über endlichen Körpern

### Die dreidimensionalen affine Räume über den Restklassenkörpern $\mathbb{R}_2$ und $\mathbb{R}_3$

Wie im zweidimensionalen Fall kann man selbstverständlich auch im dreidimensionalen Fall analytische Geometrie über endlichen Körpern betreiben. Eine genauere Untersuchung z. B. der  $AG(3, 2)$  mit 8 Punkten oder der  $AG(3, 3)$  mit 27 Punkten überlassen wir dem Leser. Wir wollen nur einige wenige Bemerkungen dazu machen.

Die  $AG(3; 2)$ , also die Analytische Koordinatenebene der Dimension 3 über dem Körper mit 2 Elementen, hat folgende Eigenschaften:

- Es gibt genau 8 Punkte.
- Es gibt genau 7 Richtungsvektoren ( $\neq$  Nullvektor)
- Es gibt 14 Ebenen wobei jede mit genau 4 Punkten inzidiert.
- Es gibt 7 Parallelscharen zu je 2 Ebenen.
- Durch jeden Punkt verlaufen genau 7 Ebenen und genau 7 Geraden.
- Es gibt 7 Parallelbüschel zu je 4 Geraden.
- Auf jeder der insgesamt 28 Geraden liegen genau 2 Punkte.
- Durch jede Gerade gibt es genau 3 Ebenen.

Analoge Überlegungen kann man für den 27-Punkte-Raum, die  $AG(3; 3)$  anstellen.

Man berechne diese Werte und ebenso die im Folgenden allgemein angegebenen Werte durch kombinatorische Überlegungen selbständig (gute Übungsaufgabe!).

### Der affine Raum $AG(3, q)$ über einem Körper $GF(q)$ hat folgende Eigenschaften:

- Es gibt  $q^3$  Punkte.
- Es gibt  $q^2 + q + 1$  Parallelbüschel (Richtungsvektoren) zu je  $q^2$  Geraden
- Es gibt genau  $q \cdot (q^2 + q + 1)$  Ebenen mit je  $q^2$  Punkten.
- Es gibt genau  $q^2 \cdot (q^2 + q + 1)$  Geraden.
- Jede Gerade inzidiert mit genau  $q$  Punkten.
- Jede Gerade liegt in genau  $q + 1$  Ebenen.
- Jede Ebene inzidiert mit genau  $q^2$  Punkten und mit genau  $q^2 + q$  Geraden.
- Durch jeden Punkt gibt es genau  $q^2 + q + 1$  Ebenen und ebenso viele Geraden.

## 2.6 Zur Konstruktion von Erweiterungskörpern

### Problemstellung und Leitbeispiel

In diesem Zusatzabschnitt wollen wir allgemein zeigen, wie man ausgehend von einem gegebenen Körper einen Erweiterungskörper von endlichem Grad konstruieren kann.

Wir lassen uns dabei leiten von dem bekannten Beispiel der Erweiterung des Körpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen zum Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen. Wie geht man dabei vor?

Anlass der Erweiterung ist eine **irreduzible** (unlösbar, nicht in Linearfaktoren zerlegbare) **Polynomgleichung**, in unserem Fall die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ . Keine reelle Zahl, also kein Element aus  $\mathbb{R}$ , löst diese Gleichung.

Zuerst führt man eine **Wurzel dieser Gleichung** – im gegebenen Fall die wohlbekannte imaginäre Zahl  $i$  – formal als neues Körperelement ein und konstruiert einen neuen Körper  $\mathbb{C}$  als **Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper  $\mathbb{R}$** . Basisvektoren dieses Vektorraums sind die „Körpereins“ also die Zahl 1 aus  $\mathbb{R}$  und das Element  $i$ , d. h. die neu eingeführte Wurzel der irreduziblen Gleichung. Alle Vektoren dieses Vektorraums lassen sich eindeutig schreiben in der Form  $z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + i \cdot b$ , also in der Basisdarstellung im Vektorraum mit Koeffizienten aus dem bereits vorhandenen Körper  $\mathbb{R}$ .

Man kann nun ohne Schwierigkeiten nachweisen, dass für diese Elemente des Vektorraums  $\mathbb{C}$  über  $\mathbb{R}$  alle Axiome eines Körpers erfüllt sind. Das Rechnen mit  $i$  wird bestimmt durch die definierende Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ . Die Anzahl der Elemente des Körpers  $\mathbb{C}$  ermittelt man mit Hilfe der eindeutigen Basisdarstellung. Die Menge der möglichen Paare  $(a; b)$  ist genau die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , also gibt es  $|\mathbb{R}|^2$  Elemente im Erweiterungskörper. Damit hat man ein Modell einer Körpererweiterung vom Grad 2.

Gemäß diesem Vorbild wollen wir nun ein Beispiel einer Erweiterung eines *endlichen* Körpers darstellen.

### Erweiterung des Restklassenkörpers mod 3 auf das Galoisfeld $\text{GF}(3^2)$

Wir spielen die Sache durch für eine Erweiterung des Restklassenkörpers  $\mathbb{R}_3 = \{0, 1, 2\}$  der Restklassen modulo 3 und zwar für den Grad 2. Die Rechenregeln setzen wir als bekannt voraus.

Zunächst bestimmen wir ein irreduzibles Polynom vom Grad 2 über diesem Körper.  $x^2 + 1 = 0$  ist ein solches Polynom, wie man durch Einsetzen von 0, 1 und 2 bestätigt. Seine „Wurzel“  $X$ , für die also gilt  $X^2 + 1 = 0$  oder  $X^2 = 2 = -1$  in  $\mathbb{R}_3$  wird nun zum Basisvektor einer Körpererweiterung gemacht, so wie  $i$  im Falle  $\mathbb{C}$ .

Welche neuen Elemente kommen dadurch hinzu? Natürlich die Potenzen von  $X$ , das bringt aber zunächst nicht viel, denn  $X^2$  ist ja sofort gleich 2, also ein bereits bekanntes Element. Erst  $X^3 = 2 \cdot X$  ist ein neues weiteres Element.  $X^4$  ergibt allerdings die 1 und daher bringen weitere Potenzen von  $X$  nichts Neues.

Nun haben wir jedoch folgende neuen Elemente außer 0, 1 und 2:



Gemäß dem hier erläuterten Prinzip kann man nun – ausgehend vom Restklassenkörper mod  $p$  – beliebige endliche Körper mit  $p^k$  Elementen erzeugen (Galoisfelder  $GF(p^k)$ ), wenn man ein entsprechendes irreduzibles Polynom vom Grad  $k$  zu Hilfe nimmt. Damit ist dann auch gezeigt, dass es zu jeder Primzahlpotenz  $p^k$  einen Körper mit dieser Elementanzahl gibt. Dass dies die einzigen endlichen Körper sind, bliebe noch zu zeigen. Wir entnehmen dies Ergebnis der Algebra.

Mit den Restklassenkörpern mod 2, 3, 5, 7, 11 und 13 sowie den Erweiterungen von  $R_2$  vom Grad 2 und 3 und der obigen Erweiterung vom Grad 2 für  $R_3$  kennen wir alle endlichen Körper mit weniger als 16 Elementen. Es gibt keine Körper mit 1, 6, 10, 12, 14, und 15 Elementen, da diese Zahlen keine Primzahlpotenzen sind.

**Als Beispiel einer Körpererweiterung vom Grad 3 folgt nachstehend in Kurzform die Konstruktion des  $GF(2^3)$ :**

Über dem Körper  $R_2$  der Restklassen mod 2 nehmen wir als irreduzibles Polynom das Polynom  $x^3 + x + 1$  vom Grad  $k = 3$  und führen  $z$  formal als Wurzel der Gleichung  $x^3 + x + 1 = 0$  ein. Für  $z$  gilt also stets  $z^3 + z + 1 = 0$  oder  $z^3 = 1 + z$ .

Hinweis: Überprüfen Sie selbst, dass die Gleichung  $x^3 + x + 1 = 0$  in  $R_2$  keine Lösung hat, also wirklich irreduzibel ist.

Zunächst untersuchen wir, welche neuen Elemente die Potenzen von  $z$  erzeugen:

$$\begin{aligned} z; \quad z^2, \quad z^3 = z + 1; \quad z^4 = z^3 * z = (z + 1) * z = z^2 + z \\ z^5 = z^3 + z^2 = z^2 + z + 1 \quad z^6 = z^2 + 1; \quad z^7 = 1 \end{aligned}$$

Mit den Basisvektoren  $1, z$  und  $z^2$  können wir nun alle 8 Elemente des Körpers eindeutig in der Form  $a * 1 + b * z + c * z^2$  mit  $a, b, c$  aus  $R_2$  darstellen:

$$\begin{aligned} 0 \text{ durch } (0, 0, 0) \quad 1 \text{ durch } (1, 0, 0) \quad z \text{ durch } (0, 1, 0) \quad z^2 \text{ durch } (0, 0, 1) \\ z^3 = 1 + z \text{ durch } (1, 1, 0) \quad z^6 = 1 + z^2 \text{ durch } (1, 0, 1) \quad z^4 = z + z^2 \text{ durch } (0, 1, 1) \\ z^5 = 1 + z + z^2 \text{ durch } (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Wir geben nebenstehend die Verknüpfungstafel für die Addition der 8 Elemente  $0, 1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$  des Körpers  $GF(8)$  an.

+	0	1	z	z <sup>3</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>6</sup>
0	0	1	z	z <sup>3</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>6</sup>
1	1	0	z <sup>3</sup>	z	z <sup>6</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>2</sup>
z	z	z <sup>3</sup>	0	1	z <sup>4</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>6</sup>	z <sup>5</sup>
z <sup>3</sup>	z <sup>3</sup>	z	1	0	z <sup>5</sup>	z <sup>6</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>4</sup>
z <sup>2</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>6</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>5</sup>	0	z	z <sup>3</sup>	1
z <sup>4</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>6</sup>	z	0	1	z <sup>3</sup>
z <sup>5</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>4</sup>	z <sup>6</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>3</sup>	1	0	z
z <sup>6</sup>	z <sup>6</sup>	z <sup>2</sup>	z <sup>5</sup>	z <sup>4</sup>	1	z <sup>3</sup>	z	0

Die Verknüpfungstafel der Multiplikation für die Elemente  $1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$  ist die zyklische Gruppe der Ordnung 7 und daher erübrigt sich ihre Darstellung.

## 2.7 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben

### Aufgabe 1:

a) Rechnen mit den Restklassen mod 7 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x = x \oplus x$	0	2	4	6	1	3	5
$x^2 = x \otimes x$	0	1	4	2	2	4	1
$-x$	0	6	5	4	3	2	1
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	Existiert nicht	1	4	5	2	3	6

- b)  $T_1 = 2 * 6 + 5 - 5 = 5$        $T_2 = 3 * 2 + 2 = 1$        $T_3 = 2 * 3 - 3 * 4 + 6 = 0$   
 c)  $G_1: x = 6$        $G_2: x = 5$        $G_3: x_1 = 3, x_2 = 4$   
 d) Herleitung siehe Abschnitt 2.2.  
 $Q_1: x_1 = 1, x_2 = 6$        $Q_2: \text{keine Lösung}$        $Q_3: x_1 = 1; x_2 = 3$

### Aufgabe 2:

a) Körper  $K = \{0, 1, a, b\}$  mit 4 Elementen also GF(4).

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

*	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

- b) Da jedes Element gleich seinem Inversen ist, gilt  $a + a = a + (-a) = 2a = 0$ . Damit erhält man die angegebenen Formeln durch Anwendung des Distributivgesetzes.  
 c) Für jedes Element gilt  $a = -a$ , d. h. man kann jedes negative Vorzeichen durch ein positives ersetzen und umgekehrt.

### Aufgabe 3:

Wir verzichten auf die Angabe der Lösung dieser wirklich sehr leichten Aufgabe.

### Aufgabe 4:

Gegeben ist der Restklassenkörper  $R_3$  mit den Elementen 0, 1 und 2.

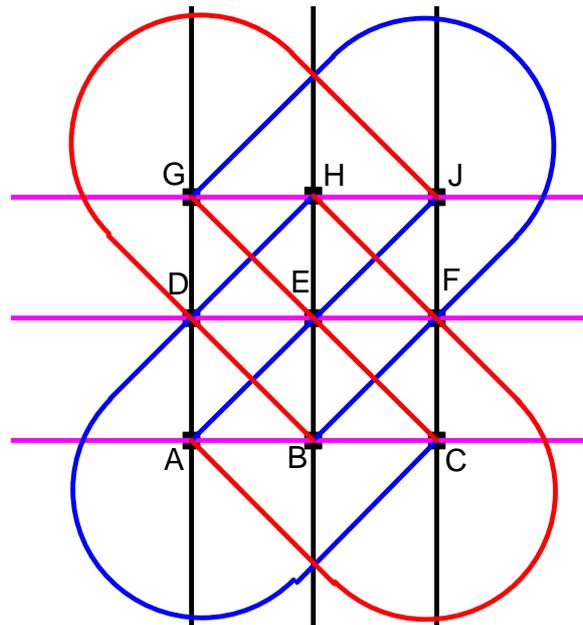
- a) Es gibt genau 9 Punkte (0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), ... , (2; 2).  
 b) Es gibt 12 Geraden, wobei jeweils 3 zueinander parallel sind:  
 (1; 0; 0) (1; 0; 1) (1; 0; 2)      (0; 1; 0) (0; 1; 1) (0; 1; 2)

(1; 1; 0) (1; 1; 1) (1; 1; 2) (1; 2; 0) (1; 2; 1) (1; 2; 2)

- c) Wir verzichten auf die Inzidenztabelle und verweisen auf die Netzdarstellung.
- d) Siehe Abschnitt 1. 4
- e)  $x_M = (x_1 + x_2) : 2 = (1 + 0) * 2 = 2$   $y_M = (y_1 + y_2) : 2 = (2 + 1) * 2 = 0$ .  $M(2; 0) = C$ .  
M lässt sich aus X und Y linear kombinieren, muss also der dritte Punkt der Geraden XY sein. Vektoriell ergibt sich:  $\vec{m} = 2 \cdot (\vec{x} + \vec{y})$
- f) Weil drei der vier Richtungen durch die Seiten eines Dreiecks „verbraucht“ sind, bleibt für die Schwerlinien nur noch die vierte Richtung übrig. Es gilt der übliche Satz von der Mittelparallele im Dreieck.
- g) Man erhält das Ergebnis durch Rechnen mit Vektoren. Über dem Körper  $R_3$  kann man in der üblichen Weise einen Vektorraum aufbauen und in diesem das Ergebnis nachrechnen. Überprüft man nur Beispiele, so kann man die Permutationsdarstellung der Abbildungen verwenden und diese verketteten.
- h) Die Verkettung von drei Punktspiegelungen ist eine Punktspiegelung am vierten Parallelogrammpunkt, die von vier eine Translation.
- i) Der Satz vom Mittenviereck gilt uneingeschränkt. Man führt einen vektoriellen Beweis wie im Reellen.

### Aufgabe 5:

- a) Man erhält zwei Paare jeweils zueinander orthogonaler Richtungen:  
 $AB \perp AD$  und  $AE \perp AF$
- b) Alle 72 Dreiecke sind rechtwinklig. Es gibt 18 Rechtecke. Wie hängt dies mit der Anzahl der (rechtwinkligen) Dreiecke zusammen?
- c) Weil für die drei Richtungen der Dreiecksseiten drei der vier Richtungen verwendet werden, ist auf alle Fälle ein Rechtwinkelpaar dabei. Der Höhenschnittpunkt muss daher in einer Ecke liegen. Beispiele prüfen!
- d) Da man Mittelpunkte und Orthogonalität definiert hat, lassen sich Achsenspiegelungen definieren: Die Achsenspiegelung an  $g$  hat folgende Eigenschaften: Alle Punkte von  $g$  sind Fixpunkte. Für andere Punkte gilt: Die Strecke  $PP'$  steht senkrecht auf  $g$  und wird von  $g$  halbiert.
- e) Wir wissen nach c) dass jedes Dreieck rechtwinklig ist. Sei  $C$  die Ecke mit dem rechten Winkel. Dann bestimmen wir die Seitenhalbierende von  $AB$ . Diese geht erstens durch  $C$  und ist die vierte Richtung d. h. notwendigerweise senkrecht zu  $AB$ . Daher ist diese Gerade eine Achse des Dreiecks.
- f) Man erhält den Höhenschnittpunkt in einer Ecke und die Umkreismitte als Hypotenusenmitte.



- g) Sind die Achsen parallel, so erhält man eine Verschiebung mit dem zweifachen orientierten Abstandsvektor von  $a$  nach  $b$ . Sind die Achsen nicht parallel erhält man eine „affine Drehung“ mit einem Fixpunkt bzw. eine Punktspiegelung bei zueinander senkrechten Achsen. Überprüfen Sie dies an Beispielen.
- h) Überprüfen Sie Ihre Kenntnisse aus der Abbildungsgeometrie an Beispielen.
- i) Man kann Gleitspiegelungen definieren als Produkte aus einer Achsen- und einer Punktspiegelung:  $\underline{a} \circ \underline{P}$  bzw.  $\underline{Q} \circ \underline{b}$ .
- j) Achsenaffinitäten werden in der üblichen Weise definiert: Kollineationen der affinen Ebene in sich mit einer Fixpunktgerade. Man erhält zwei Typen: schiefe Achsenaffinität und Scherung. Die Schrägspiegelung ist eine involutorische (selbstinverse) Achsenaffinität.
- k) Suchen Sie Beispiele bzw. versichern Sie sich, dass es nur Sonderfälle geben kann. Echte symmetrische Trapeze wären also nicht rechteckig und echte symmetrische Drachen nicht rautenförmig. Wie macht man sich leicht klar, dass es weder echte symmetrische Trapeze noch echte symmetrische Drachen geben kann? Zeichnen Sie Skizzen. Probieren Sie Beispiele aus und sammeln Sie Erfahrungen.
- l) Es gibt (einschließlich der Identität) genau 9 Translationen. Es gibt genau 9 Punktspiegelungen. Da außer 1 und  $2 = -1$  keine Streckfaktoren für zentrische Streckungen zur Verfügung stehen, sind dies die einzigen Streckungen. Insgesamt hat man also 18 Dilatationen (einschließlich Identität).
- m) Eine Achsenaffinität ist vollständig bestimmt, wenn man die Achse und ein zugeordnetes Punktepaar vorgibt. Zu einer festen Achse und einem beliebigen Punkt kann man noch 5 mögliche Bildpunkte angeben (nicht die 3 auf der Achse und nicht den Punkt selbst). Damit gibt es insgesamt  $12 \cdot 5 = 60$  Achsenaffinitäten.
- n) Man kann alle Strecken auf zueinander senkrechten Geraden durch Verkettungen von Achsenspiegelungen (= Kongruenzen) aufeinander abbilden, nicht jedoch solche auf nicht zueinander senkrechten Geraden (dafür gibt es keine „Winkelhalbierenden“). Daher gibt es zwei Kongruenzklassen von Strecken. Zeigen Sie dies.

### **Aufgabe 6:**

- a) Es gibt 16 Punkte und 20 Geraden, 5 Parallelbüschel zu je vier Geraden. Mit jeder Geraden inzidieren 4 Punkte, mit jedem Punkt 5 Geraden.
- b) Man erhält eine affine Ebene der Ordnung 4. Sie ist im Text nachfolgend dargestellt.
- c) Besonderheiten: Es gibt keine Mittelpunkte (Charakteristik ist 2). Dementsprechend sind alle Parallelogrammdiagonalen zueinander parallel. Man kann keine sinnvolle Orthogonalität einführen, weil die Anzahl der Richtungen ungerade ist.
- d) Siehe a).
- e) Siehe a)
- f) Es gibt 4 Steigungswerte, die 4 Elemente des Körpers und die Parallelen zur  $y$ -Achse.
- g) Man überprüft leicht, dass die nachfolgenden Grafiken die Ebene darstellen. Es sind jeweils Parallelbüschel von Geraden übersichtlich zusammengefasst.

**Aufgabe 7:**

- Wir verzichten auf die Angabe dieser Verknüpfungstafeln.
- Entscheidend sind die Kehrwerte: 1 und 4 sind selbstinvers, 2 und 3 sind zueinander invers.
- Es gibt 25 Punkte und 30 Geraden, 6 Parallelscharen zu je 5 Geraden. Jeder Punkt inzidiert mit genau 6 Geraden und jede Gerade mit genau 5 Punkten.
- Siehe hierzu die Ergebnisse im Abschnitt 2.4 des Textes bzw. Aufgabe 10.
- Mittelpunkte können algebraisch leicht eingeführt werden, da 2 ein Inverses besitzt.
- Es gelten die von der reellen Geometrie her bekannten Sätze.
- Hier sind die Parallelen jeder Schar jeweils durch verschiedene Farben dargestellt.

**Aufgabe 8:**

- $4 = -1$  ist das Quadrat von 2, daher wären mit  $-1 = 4$  als OK die Geraden mit der Steigung 2 zu sich selbst orthogonal. Dies wollen wir vermeiden.
- Mit 2 als OK sind neben den Achsen folgende Orthogonalpaare vorhanden: Geraden mit den Steigungen 1 und 2, sowie solche mit den Steigungen 3 und 4.
- Man erhält die von der reellen Geometrie her bekannten Ergebnisse.
- Der Satz über die Eulergerade lässt sich an Beispielen bestätigen.
- Anzahl der Rechtecke: Siehe Abschnitt 2.4 im Text bzw. Aufgabe 10.

**Aufgabe 9:**

- Zwar ändern sich die Verhältnisse im Einzelnen, aber mit 3 als OK klappt alles genau so wie mit  $OK = 2$ . Orthogonalpaare sind nun Geraden mit Steigungen 1 und 3 bzw. 2 und 4.
- Man erhält die von der reellen Geometrie her bekannten Ergebnisse.

**Aufgabe 10:**

Jede Teilmenge mit 2 Elementen aus der Menge aller Punkte ist eine Strecke, daher ist

$$\text{deren Anzahl } \binom{q^2}{2} = \frac{q^2 \cdot (q^2 - 1)}{2} = \frac{q^2 \cdot (q - 1) \cdot (q + 1)}{2}$$

Wir wählen nacheinander drei nicht kollineare Punkte A, B und C aus der Ebene aus. Für den ersten Punkt A gibt es  $q^2$  und für den zweiten Punkt B nur noch  $q^2 - 1$  Möglichkeiten. Den dritten Punkt C dürfen wir nicht auf der Geraden AB wählen, also bleiben noch  $q^2 - q$  Möglichkeiten für ihn. Da man jedes Dreieck in 6 verschiedenen Reihenfolgen seiner Ecken aufzählen kann, ist dabei jedes Dreieck 6-fach gezählt. Wir erhalten

$$\text{daher als Anzahl aller Dreiecke } \frac{q^3 \cdot (q + 1) \cdot (q - 1)^2}{6}$$

Man kann jedes Dreieck auf drei verschiedene Arten zu einem Parallelogramm ergänzen. Dabei wird jedes Parallelogramm mit jeder seiner 4 durch die Diagonalen erzeugten Teildreiecke gezählt. Also gilt  $P = (3 \cdot D) / 4$  und man erhält als Anzahl aller Parallelogramme

$$\frac{q^3 \cdot (q - 1)^2 \cdot (q + 1)}{8}.$$

Eine alternative Zählung kann folgendermaßen erfolgen: Man wählt zunächst 2 aus den  $q + 1$  möglichen Richtungen aus. Dafür gibt es  $\binom{q+1}{2}$  Möglichkeiten. Nun wählt man aus jeder der beiden Parallelscharen zwei aus den  $q$  Geraden aus, wofür es jeweils  $\binom{q}{2}$  verschiedene Möglichkeiten gibt. Insgesamt gibt es also  $\binom{q+1}{2} * \binom{q}{2} * \binom{q}{2}$  verschiedene Parallelelogramme.

Die Anzahl der Vierecke bestimmt man analog zur Anzahl der Dreiecke: Für den ersten Punkt gibt es  $q^2$ , für den zweiten noch  $q^2 - 1$  Möglichkeiten und für den dritten nur noch  $q^2 - q$  Möglichkeiten. Der vierte Punkt darf weder auf AB, noch auf BC, noch auf AC liegen, so dass für ihn nur noch  $q^2 - 3q + 3$  Möglichkeiten bleiben. Da man jedes Viereck ABCD auf 8 verschiedene Weisen mit seinen Ecken aufzählen kann, erhält man als Anzahl aller Vierecke  $\frac{q^3 \cdot (q-1)^2 \cdot (q+1) \cdot (q^2 - 3q + 3)}{8}$ .

### Aufgabe 11:

Additive Gruppentafel für den Körper  $GF(3^2)$ .

	0	1	2	X	X+1	X+2	2X	2X+1	2X+2
0	0	1	2	X	X+1	X+2	2X	2X+1	2X+2
1	1	2	0	X+1	X+2	X	2X+1	2X+2	2X
2	2	0	1	X+2	X	X+1	2X+2	2X	2X+1
X	X	X+1	X+2	2X	2X+1	2X+2	0	1	2
X+1	X+1	X+2	X	2X+1	2X+2	2X	1	2	0
X+2	X+2	X	X+2	2X+2	2X	2X+1	2	0	1
2X	2X	2X+1	2X+2	0	1	2	X	X+1	X+2
2X+1	2X+1	2X+2	2X	1	2	0	X+1	X+2	X
2X+2	2X+2	2X	2X+1	2	0	1	X+2	X	X+1

### Aufgabe 12:

Multiplikative Gruppentafel für die von der Null verschiedenen Elemente des Körpers  $GF(3^2)$ .

1	2	X	2X	X+1	2X+2	X+2	2X+1
2	1	2X	X	2X+2	X+1	2X+1	X+2
X	2X	2	1	X+2	2X+1	2X+2	X+1
2X	X	1	2	2X+1	X+2	X+1	2X+2
X+1	2X+2	X+2	2X+1	2X	X	1	2
2X+2	X+1	2X+1	X+2	X	2X	2	1
X+2	2X+1	2X+2	X+1	1	2	X	2X
2X+1	X+2	X+1	2X+2	2	1	2X	X

### 3. Projektive Ebenen

#### 3.1 Von der affinen zur projektiven Ebene

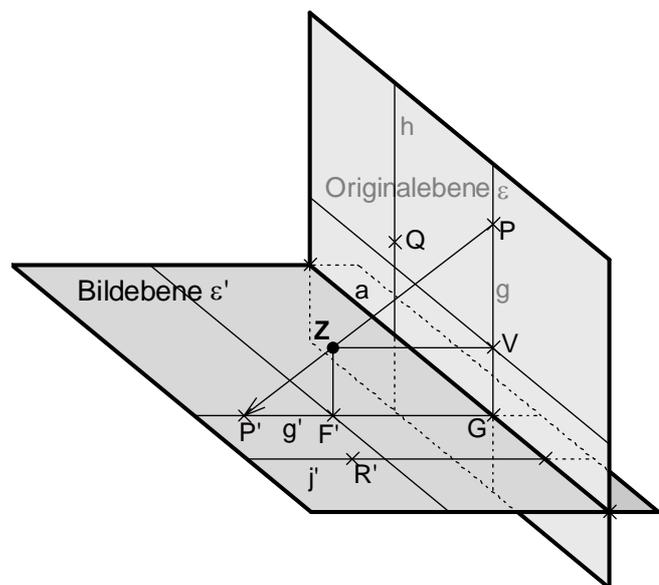
Als **reelle affine Ebene** bezeichnet man die Menge all derjenigen Punkte, die man z. B. durch ein affines oder kartesisches Koordinatensystem mit reellen Koordinaten erfassen kann. In ihr sind die drei Axiome A1 bis A3 der affinen Inzidenzgeometrie selbstverständlich erfüllt, also ist die reelle affine Ebene eine affine Inzidenzebene, aber eben keine endliche sondern eine unendliche Geometrie.

Warum begnügt man sich nicht mit dieser Geometrie, was gibt Anlass, die affine Ebene zu einer projektiven Ebene zu erweitern? Dieser Frage wollen wir zunächst im Fall der uns wohlbekannten reellen Ebene nachgehen.

Wir betrachten **zwei nicht zueinander parallele affine Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$** . Diese bilden wir durch **Zentralprojektion** mit dem Zentrum  $Z$ , das weder in der Ebene  $\varepsilon$  noch in der Ebene  $\varepsilon'$  liegt, aufeinander ab. Am einfachsten stellen wir uns eine vertikale Originalebene  $\varepsilon$  und eine horizontale Bildebene  $\varepsilon'$  vor (siehe nachstehende Figur).

#### Aufgabe 1:

Gegeben sind zwei nicht parallele Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , die sich in der Gerade  $a$  schneiden und außerdem ein Projektionszentrum  $Z$ , das weder in der Originalebene  $\varepsilon$  noch in der Bildebene  $\varepsilon'$  liegt.  $P'$  sei das Bild von  $P$  bei der Zentralprojektion von  $\varepsilon$  auf  $\varepsilon'$  mit dem Zentrum  $Z$ .

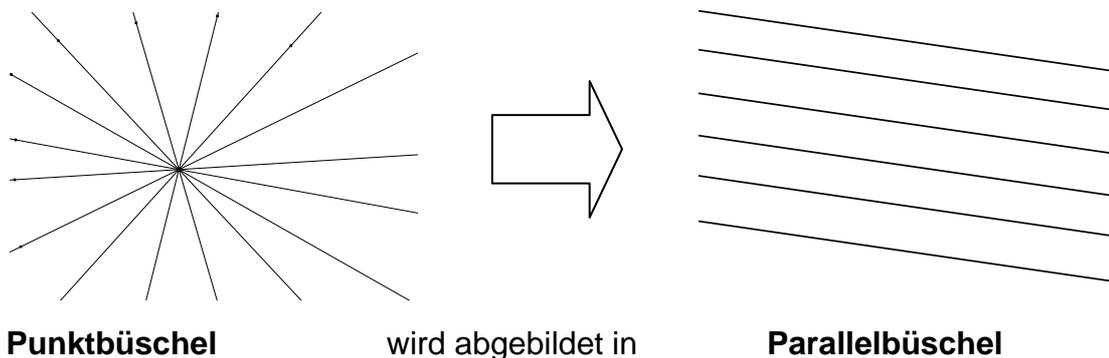


- Konstruieren Sie zum Originalpunkt  $Q$  aus  $\varepsilon$  den Bildpunkt  $Q'$ .
- Konstruieren Sie zu einem gegebenen Punkt  $R'$  aus  $\varepsilon'$  das Urbild  $R$ .
- Konstruieren Sie zu der Gerade  $h$ , die zu  $g$  parallel ist, das Bild  $h'$ . Ist die Abbildung parallelentreu?
- Konstruieren Sie zu einer gegebenen Gerade  $j'$  aus  $\varepsilon'$  das Urbild  $j$ .
- Wie bewegt sich  $P'$ , wenn  $P$  auf  $g$  wandert? Verwenden Sie ein DGS.
- Konstruieren Sie das Bild des Punktes  $V$ . Welche Beobachtung machen Sie?
- Konstruieren Sie das Urbild des Punktes  $F'$ . Welche Beobachtung machen Sie?
- Welche Punkte sind Fixpunkte bei der Abbildung?
- Begründen Sie, dass die Abbildung zwar geradentreu, aber weder parallelentreu noch teilverhältnistreu ist und außerdem die affinen Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  nicht bijektiv aufeinander abbildet.
- In was wird das Bündel aller Geraden durch den Punkt  $V$  abgebildet?

- k) Was ist das Urbild aller Geraden durch  $F'$ ?
- l) In was wird ein Parallelbüschel von Geraden – z.B. alle Parallelen zu  $g$  – abgebildet?
- m) Was ist das Urbild des Parallelbüschels zu  $g'$ ?
- n) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Parallele zu  $a$  durch  $V$  keinen Bildpunkt in der affinen Ebene  $\varepsilon'$  besitzen. Diese Gerade heißt „*Verschwindungsgerade*“.
- o) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Parallelen zu  $a$  durch  $F'$  kein Urbild in der affinen Ebene  $\varepsilon$  besitzen. Diese Gerade heißt „*Fluchtgerade*“.

Bei dieser Abbildung einer Ebene auf eine andere durch Zentralprojektion treten folgende Besonderheiten auf:

**Die Abbildung ist nicht bijektiv.** So hat z.B. der Punkt  $V$  aus Aufgabe 1 keinen Bildpunkt und der Punkt  $F'$  hat kein Urbild. Wir wollen als erstes diesen Mangel beheben. Dazu überlegen wir uns, was aus dem Büschel sämtlicher Geraden durch  $V$  bei der Zentralprojektion wird. Am besten probiert man dies mit Hilfe eines DGS aus. Das *Punktbüschel* der sämtlichen Geraden durch  $V$  wird offenbar abgebildet auf das *Parallelbüschel* der sämtlichen zu  $g'$  parallelen Geraden. Das gilt nicht nur für den Punkt  $V$ , sondern für alle Punkte der „*Verschwindungsgerade*“, also der Parallelen zu  $a$  durch  $V$ . Wir haben also folgende Situation:



Wenn wir der Bildebene  $\varepsilon'$  einen „Fernpunkt“  $V'$  so hinzufügen, dass er „Schnittpunkt“ aller dieser parallelen Bildgeraden sein soll, dann hat der Originalpunkt  $V$  in der so erweiterten Ebene  $\varepsilon'$  ein Bild und der erste Mangel wäre behoben. Da dies für alle Punkte der Verschwindungsgerade gilt, müssen wir dies für alle Parallelbüschel in der Ebene  $\varepsilon'$  machen. Die Bildebene  $\varepsilon'$  wird also wie folgt ergänzt:

Zu jedem *Parallelbüschel* (d.h. zu jeder „*Richtung*“ bzw. zu jeder „*Äquivalenzklasse von parallelen Geraden*“) denken wir uns einen gemeinsamen Schnittpunkt als „*Fernpunkt*“ vorhanden. Es kommen also so viele „*Fernpunkte*“ zu der Ebene hinzu, wie es Parallelbüschel von Geraden gibt. Da die Urbilder aller dieser „*Fernpunkte*“ in der Originalebene sich auf einer Gerade  $v$ , der Verschwindungsgerade, aufreihen, müssen wir auch für diese Gerade eine Bildgerade  $v'$  einführen, indem wir die sämtlichen Fernpunkte durch eine einzige „*Ferngerade*“ verbinden. Durch diesen Prozess (***Adjungieren der Fern-elemente***) haben wir zumindest erreicht, dass jeder Punkt der Originalebene einen Bildpunkt und jede Gerade der Originalebene eine Bildgerade besitzt, also im strengen Sinne eine Abbildung (linkstotal und rechtseindeutig) vorliegt. Dabei ist jedoch die ur-

sprüngliche *affine* Bildebene  $\varepsilon'$  um die beschriebenen Fernelemente zur **projektiven Ebene**  $\pi'$  erweitert worden.

Im nächsten Schritt sorgen wir dafür, dass die Zentralprojektion sogar bijektiv wird:

Zunächst stellen wir fest, dass z.B. der Punkt  $F'$  kein Urbild in der Originalebene  $\varepsilon$  besitzt. Das gilt für alle Punkte, deren Projektionsstrahl parallel zur Originalebene ist, also für alle Punkte der „Fluchtgerade“  $f'$  in der Bildebene  $\varepsilon'$ . Die Situation zeigt sich nun aber ganz analog wie bei der Verschwindungsgerade: Jedes *Punktbuschel* von Geraden in  $\varepsilon'$  mit einem Trägerpunkt auf der Fluchtgerade hat als Urbild in der Originalebene  $\varepsilon$  ein *Parallelbuschel* von Geraden. Deshalb werden wir auch die Originalebene durch **Adjunktion von Fernelementen** zu einer **projektiven Ebene**  $\pi$  erweitern.

Mit diesen beiden Erweiterungen haben wir erreicht, dass die **Zentralprojektion eine bijektive Abbildung zwischen zwei projektiven Ebenen** ist.

**Ergebnis:**

Durch Adjungieren von Fernelementen wird eine affine Ebene  $\varepsilon$  zu einer projektiven Ebene  $\pi$  erweitert. Dabei wird *jeder Parallelenschar ein gemeinsamer Fernpunkt* zugeordnet und die *sämtlichen Fernpunkte liegen auf einer gemeinsamen Ferngerade*.

Umgekehrt gelangt man durch Schlitzen längs einer beliebigen Gerade, also durch Herausnehmen einer Gerade und aller mit ihr inzidierenden Punkte, von einer projektiven Ebene zu einer affinen Ebene.

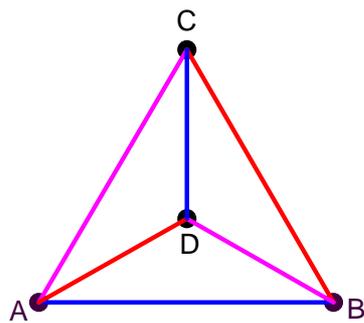


Mit diesem Beispiel wollen wir begründen warum und wie man zur Idee der projektiven Ebene gelangt.

Zur Verdeutlichung wollen wir diesen Prozess an einem überschaubaren endlichen Beispiel durchführen. Wir wollen das Minimalmodell der affinen Inzidenzebenen (Tetraedermodell) durch Adjungieren von Fernelementen zu einer projektiven Ebene erweitern.

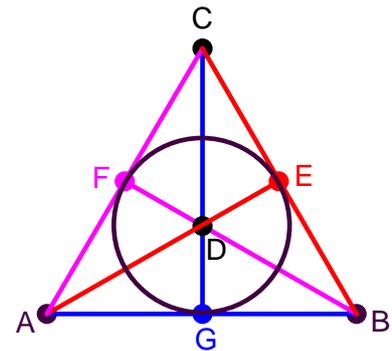
Da es vier Parallelscharen (Richtungen) zu je zwei Geraden gibt, müssen wir vier Fernpunkte zur affinen Ebene adjungieren und außerdem eine weitere Gerade, die Ferngerade, auf der die sämtlichen vier Fernpunkte liegen. Damit besteht die erweiterte Ebene aus insgesamt 7 Geraden und 7 Punkten. Wir stellen dies grafisch dar und gewinnen dadurch ein Modell für die kleinste projektive Ebene.

Den beiden Parallelen  $AD$  und  $BC$  ordnen wir als „Schnittpunkt“ den Fernpunkt  $E$ , den Parallelen  $BD$  und  $CA$  den Fernpunkt  $F$  und den Parallelen  $CD$  und  $AB$  den Fernpunkt  $G$  zu. Damit haben wir die vier Fernpunkte adjungiert und es fehlt nur noch die Ferngerade, auf der diese 3 Fernpunkte liegen. Die Ferngerade stellen wir als Kreislinie durch  $E$ ,  $F$  und  $G$  dar und haben die vollständige projektive Ebene der Ordnung 2 erzeugt.



Affine Inzidenzebene

Durch Adjunktion der Fernelemente gelangt man von der affinen zur projektiven Ebene.



Projektive Inzidenzebene

### Aufgabe 2:

- Zeichnen Sie ein Modell der affinen Ebene der Ordnung 3 (siehe 2.3 b)).
- Ergänzen Sie dieses durch Adjungieren der Fernelemente zu einer projektiven Ebene.
- Wie viele Punkte und wie viele Geraden besitzt diese projektive Ebene der Ordnung 3?
- Wie viele Punkte inzidieren mit jeder Gerade und wie viele Geraden mit jedem Punkt?
- Welche der Axiome einer affinen Inzidenzebene gelten auch in der projektiven Ebene und welche nicht mehr?
- Warum gibt es in einer projektiven Inzidenzebene keine Parallelen mehr?

Die Ergebnisse unseres ersten Einblicks in die Geometrie projektiver Ebenen lassen vermuten, dass Punkte und Geraden dabei völlig gleichberechtigt vorkommen, im Gegensatz zur affinen Geometrie. Wir werden dies im nächsten Abschnitt durch Formulierung des *Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie* streng beweisen.

## 3.2 Das Axiomensystem für projektive Inzidenzebenen

Wir formulieren nun die Axiome für projektive Inzidenzebenen:

### **Definition:**

**Eine Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$  heißt eine projektive Inzidenzebene, wenn folgende Axiome erfüllt sind:**

**P1: Axiom von der Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgerade:**

**Zu zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  existiert genau eine Gerade  $g$ , mit der die beiden Punkte inzidieren.**

$$\forall_{A, B \in P} \exists_{g \in G} [(A, g) \in I \wedge (B, g) \in I]$$

**P2: Axiom von der Existenz und Eindeutigkeit des Schnittpunkts:**

**Zu zwei verschiedenen Geraden  $g$  und  $h$  gibt es genau einen Punkt  $S$ , der mit beiden Geraden inzidiert.**

$$\forall_{g, h \in G} \exists_{S \in P} [(X, g) \in I \wedge (X, h) \in I]$$

**A3: Reichhaltigkeitsaxiom:**

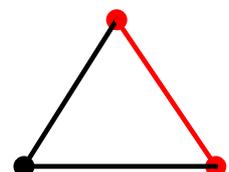
**Es gibt mindestens vier verschiedene Punkte, von denen keine drei mit einer gemeinsamen Gerade inzidieren. Es gibt also ein echtes Viereck.**

### **Aufgabe 3:**

- Weisen Sie nach, dass das Modell einer projektiven Ebene aus Abschnitt 3.1 (Minimalmodell) die drei Axiome P1 bis P3 erfüllt. Inwiefern ist damit die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems nachgewiesen?
- Beweisen Sie, dass jedes der drei Axiome P1 bis P3 von den beiden anderen unabhängig ist.
- Beweisen Sie, dass das Axiomensystem P1 bis P3 weder kategorisch (monomorph) noch gar vollständig ist.

Bemerkungen zum Axiomensystem für projektive Inzidenzebenen:

- P3 behauptet nicht, dass irgendwelche beliebigen vier Punkte stets so liegen, dass keine drei davon mit einer gemeinsamen Gerade inzidieren. P3 behauptet nur, dass es mindestens ein derartiges Quadrupel von vier Punkten gibt.
- Warum haben wir als Axiom P3 nicht genau das Axiom A3 gewählt? Dies wird in der Tat gelegentlich gemacht, hat aber einen kleinen Schönheitsfehler. Wenn man P3 genau wie A3 formuliert, dann ist das nebenstehende Modell eines Dreiecks auch eine projektive Ebene. Nun wäre das ja nicht weiter schlimm. Wird jedoch diese Ebene durch „Schlitzen“ einer Gerade (rot) verändert, so bleibt ein Rest übrig, der leider *keine* affine Inzidenzebene mehr ist. Aus



diesem Grund will man dies Modell ausschließen und formuliert das Reichhaltigkeitsaxiom P3 anders als A3.

- Die Axiome P1 und P2 entsprechen sich völlig und das Verhalten von Punkten und Geraden ist absolut gleichwertig: „Zu je zwei verschiedenen X gibt es genau ein Y, das mit beiden inzidiert.“ Dabei kann X Geraden und Y Punkte bedeuten oder umgekehrt. Zum Axiom P3 jedoch fehlt das entsprechende Gegenstück. Wäre auch das als Axiom vorhanden, so wären die Rollen von Punkten und Geraden absolut gleichwertig und es würde das Dualitätsprinzip gelten. Das zu P3 duale Axiom für Geraden an Stelle von Punkten lässt sich jedoch als Satz beweisen.

### Satz 1:

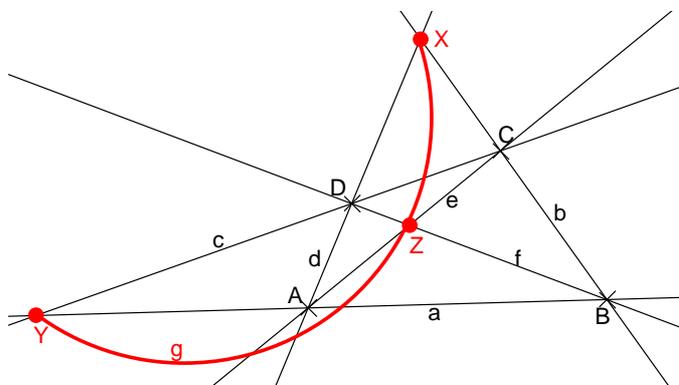
**In jeder projektiven Inzidenzebene gibt es mindestens vier Geraden, von denen keine drei mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren.**

Beweis:

Nach P3 gibt es vier Punkte A, B, C und D, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Gerade liegen.

Nach P1 existieren daher die 6 Geraden  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = e$  und  $BD = f$  und sind alle voneinander verschieden.

Die Geraden a und c haben weder A noch B noch C noch D gemeinsam, es muss also wegen P2 einen neuen Punkt Y geben, der mit beiden inzidiert. Analog schließen wir für die Geraden AD und CB auf den Punkt X und mit AC und BD auf den Punkt Z. Wir haben nun mit den Geraden a, b, c und d die vier nach Satz 1 behaupteten Geraden, von denen keine drei mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren. Damit ist der Satz 1 bewiesen.



Wir wollen noch eine Ergänzung anbringen: Die drei Punkte X, Y und Z müssen alle voneinander und von den vier bisherigen verschieden sein (was wäre, wenn dies nicht so wäre?). Damit haben wir auf alle Fälle 7 verschiedene Punkte und bisher 6 verschiedene Geraden. Wegen P2 muss es jedoch noch eine Gerade g geben, mit der sowohl X als auch Y inzidieren. Auf dieser kann auch noch Z liegen. Damit haben wir als Ergebnis eine Minimalaussage über projektive Ebenen:

### Minimalsatz für projektive Ebenen (projektives Minimalmodell):

**Jede projektive Inzidenzebene besteht aus mindestens 7 Punkten und 7 Geraden. Das Minimalmodell enthält genau 7 Punkte und 7 Geraden. In ihm inzidiert jeder Punkt mit genau 3 Geraden und jede Gerade mit genau 3 Punkten.**

Wir kehren zurück zu unseren Überlegungen zur Gleichwertigkeit von Punkten und Geraden. Die Aussage, die P3 für Punkte fordert, haben wir als Satz 1 ganz entsprechend für Geraden bewiesen. Daher sind Punkte und Geraden in der projektiven Geometrie völlig gleichberechtigt und es gilt das so genannte Dualitätsprinzip:

### Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie:

Aus jedem gültigen Satz der projektiven Inzidenzgeometrie kann man durch Dualisieren einen weiteren gültigen dualen Satz folgern. Man muss dazu nur „Gerade“ durch „Punkt“ und „Verbindungsgerade“ durch „Schnittpunkt“ ersetzen und umgekehrt. Inzidenz bleibt jeweils erhalten.

Wir formulieren als Beispiel einen Satz der reellen projektiven Ebene und dualisieren ihn:

#### Satz von Desargues:

**Inzidieren die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke mit einem gemeinsamen Punkt, so inzidieren die Schnittpunkte ihrer Seitengeraden mit einer gemeinsamen Gerade.**

Beweis:

Wir beweisen diesen Satz für die reelle projektive Geometrie, wobei wir die Zeichnung dreidimensional deuten.

Wir betrachten  $A_1B_1C_1$  als Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $S$ . Die von  $A_1B_1C_1$  gebildete Ebene sei  $E_1$ . Die Pyramide wird durch eine Ebene  $E_2$  geschnitten, in der das Dreieck  $A_2B_2C_2$  liegt.

Nun treffen sich die Geraden  $a_1$  und  $a_2$  im Punkt  $A$ , da beide in der gemeinsamen Ebene  $SB_1C_1$  bzw.  $SB_2C_2$  liegen. Andererseits liegt die Gerade  $a_1 = B_1C_1$  ganz in der

Grundebene  $E_1$  und  $a_2 = B_2C_2$  ganz in der Ebene  $E_2$ . Folglich muss der Schnittpunkt  $A$  von  $a_1$  und  $a_2$  in der Schnittgerade der beiden Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  liegen. Dies gilt analog für die Geraden  $b_1$  und  $b_2$  mit Schnittpunkt  $B$  sowie für  $c_1$  und  $c_2$  mit Schnittpunkt  $C$ . Daher müssen die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  alle drei auf der gemeinsamen Schnittgerade  $s$  der beiden Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  liegen. Daher sind die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  kollinear. Damit ist der Satz für die reelle projektive Ebene bewiesen. Ein Beweis für den Fall endlicher projektiver Ebenen muss in anderer Weise geführt werden. Wir setzen die Gültigkeit dieses Satzes in endlichen projektiven Ebenen (ohne Beweis) voraus.

Es ist nun sehr einfach, aus dem Satz von Desargues durch Dualisierung einen weiteren gültigen Satz zu gewinnen:

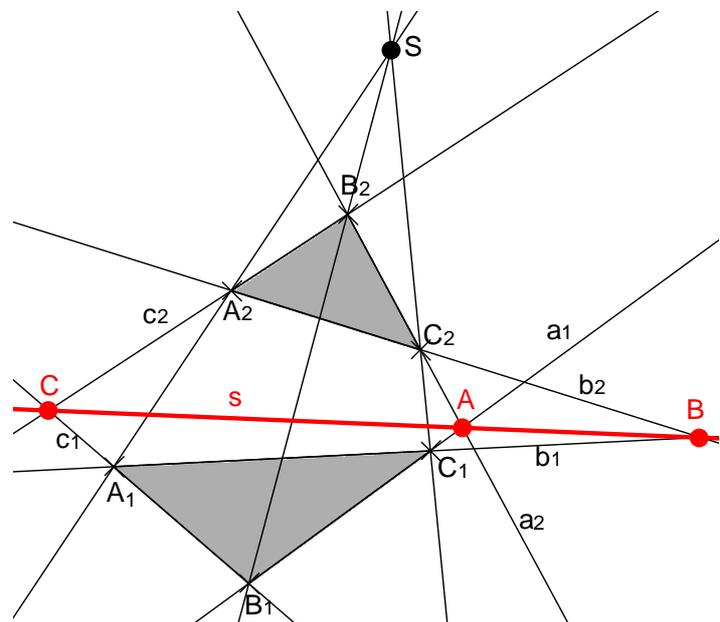
Wir formulieren den Satz kurz und prägnant um ihn formal einfach dualisieren zu können:

Wenn **Verbindungsgeraden** der **Ecken kopunktal**, dann **Schnittpunkte** der **Seiten kollinear**.

Dual dazu:

Wenn **Schnittpunkte** der **Seiten kollinear**, dann **Verbindungsgeraden** der **Ecken kopunktal**.

Wir haben diese Kurzform gewählt, um das formale Vorgehen der gegenseitigen Ersetzung deutlich zu machen.



**Aufgabe 4:**

- a) Überprüfen Sie an Hand einer Zeichnung die Gültigkeit der Dualisierung des Satzes von Desargues.
- b) Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes von Desargues. Vergleichen Sie mit seiner Dualisierung.

Hinweis: Üblicherweise stimmen Umkehrung und Dualisierung eines Satzes nicht überein. Der Satz von Desargues ist eine seltene Ausnahme.

**Aufgabe 5:**

- a) Welche Figur erhält man, wenn man beim Satz von Desargues z. B.  $S$  als Fernpunkt wählt oder  $s$  als Ferngerade wählt? Zeichnen Sie.
- b) Welche Figur ergibt sich, wenn  $S$  Fernpunkt und  $s$  Ferngerade ist, also  $S$  mit  $s$  inzidiert. Zeichnen Sie.

**Aufgabe 6:**

Beweisen Sie an Hand der Axiome: Durch Wegnahme (Schlitzen) einer beliebigen Gerade und aller mit ihre inzidierenden Punkte aus einer projektiven Ebene entsteht mit dem verbleibenden Rest stets eine affine Inzidenzebene.

**Aufgabe 7:**

Zeigen Sie an Hand eines Beispiels in der projektiven Ebene der Ordnung 3 die Gültigkeit des Satzes von Desargues und seiner Umkehrung. Wählen Sie geeignete Punkte. Benutzen Sie die bei Aufgabe 2 erhaltene Darstellung der projektiven Ebene der Ordnung 3.

### 3.3 Minimalsätze und Struktursätze über projektive Inzidenzebenen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir bereits einen einfachen Minimalsatz über projektive Ebenen bewiesen, den wir hier noch einmal formulieren:

**Minimalsatz über projektive Ebenen:**

**Jede projektive Inzidenzebene enthält mindestens 7 Punkte und 7 Geraden.**

**Es gibt eine projektive Inzidenzebene mit genau 7 Punkten und 7 Geraden (projektives Minimalmodell).**

Analog zu den Minimalsätzen der affinen Geometrie können wir nun solche für die projektive Geometrie formulieren. Wir verzichten im Einzelnen auf die Beweise:

**Existenzsatz für projektive Inzidenzebenen:**

- a) Zu jeder Gerade gibt es mindestens einen Punkt, der nicht mit ihr inzidiert.
- b) Zu jedem Punkt gibt es mindestens eine Gerade, die nicht mit ihm inzidiert.
- c) Mit jedem Punkt inzidieren mindestens drei Geraden.
- d) Mit jeder Gerade inzidieren mindestens drei Punkte.

Wesentlich für die Einsicht in die Struktur endlicher projektiver Inzidenzebenen ist der entsprechende Struktursatz, den wir sofort in vollständiger Form formulieren:

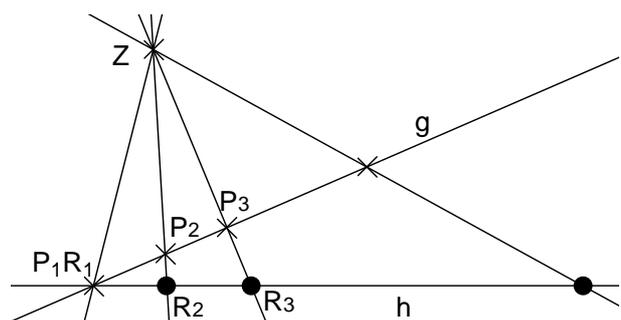
**Struktursatz für endliche projektive Inzidenzebenen:**

- a) Inzidiert eine Gerade mit genau  $(q + 1)$  Punkten, so inzidiert jede Gerade mit genau  $(q + 1)$  Punkten und jeder Punkt inzidiert mit genau  $(q + 1)$  Geraden.
- b) Inzidiert ein Punkt mit genau  $(q + 1)$  Geraden, so inzidiert jeder Punkt mit genau  $(q + 1)$  Geraden und jede Gerade inzidiert mit genau  $(q + 1)$  Punkten.

Wir bemerken, dass Teil b) die Dualisierung von Teil a) ist. Es genügt daher, einen der beiden Sätze zu beweisen, der andere folgt dann von selbst auf Grund des Dualitätsprinzips.

Beweis für Teil a):

Gegeben sei eine projektive Inzidenzebene und in ihr eine Gerade  $g$ , die mit genau  $(q + 1)$  Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_{q+1}$  inzidiert. Nun sei  $h$  eine beliebige weitere Gerade dieser Ebene. Nach  $P_2$  haben  $h$  und  $g$  einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt. Diesen wollen wir o. B. d. A. mit  $P_1$  bezeichnen. Wir wählen nun einen Punkt  $Z$ ,



der weder mit  $g$  noch mit  $h$  inzidiert (beweisen Sie, dass ein solcher existiert!) und wählen ihn zum Zentrum einer Zentralprojektion zwischen  $g$  und  $h$ .

Wir verbinden jeden der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{q+1}$  von  $g$  mit  $Z$  und bestimmen die jeweiligen Schnittpunkte  $R_1 = P_1, R_2, R_3, \dots, R_{q+1}$  mit  $h$ . Diese sind alle voneinander verschieden. Damit haben wir nachgewiesen, dass auf  $h$  mindestens eben so viele Punkte liegen wie auf  $g$ . Läge nun ein weiterer Punkt  $X$  auf  $h$ , so würde die Verbindungsgerade  $ZX$  auf  $g$  einen weiteren Punkt erzeugen, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass genau  $(q + 1)$  Punkte mit  $g$  inzidieren. Daher inzidieren auch mit  $h$  genau  $(q + 1)$  Punkte und der Beweis ist erbracht.

### **Aufgabe 8:**

- a) Beweisen Sie nun, dass jeder Punkt mit genau  $q + 1$  Geraden inzidiert.
- b) Beweisen Sie zur Übung Teil b) des Struktursatzes direkt ohne Benützung des Dualitätsprinzips.

### **Definition:**

**Die Zahl  $q$  heißt Ordnung einer projektiven Inzidenzebene, wenn jede Gerade mit genau  $(q + 1)$  Punkten inzidiert.**

Hinweis:

Natürlich hätte man auch die Anzahl  $r = (q + 1)$  der mit jeder Gerade inzidierenden Punkte als Ordnung einer projektiven Ebene definieren können wie bei einer affinen Ebene auch. Dann hätte man jedoch den Schönheitsfehler gehabt, dass man durch Adjungieren von einer affinen Ebene der Ordnung  $q$  zu einer projektiven Ebene der Ordnung  $(q + 1)$  kommt. Durch die hier gewählte Definition bleiben die Ordnungen der durch Adjungieren oder Schlitzen ineinander überführbaren Ebenen jedoch gleich.

### **Anzahlsatz:**

**Eine projektive Inzidenzebene der Ordnung  $q$  besitzt genau  $q^2 + q + 1$  Punkte und ebenso viele Geraden.**

Beweis:

Der Beweis ist fast selbstverständlich, wenn man die Kenntnis der affinen Ebenen voraussetzt und das Ergebnis der Aufgabe 6 benützt.

### **Aufgabe 9:**

- a) Ergänzen Sie das Netz der affinen Ebene der Ordnung 3 zum Netz der projektiven Ebene der Ordnung 3. Wie viele Punkte und Geraden besitzt diese Geometrie?
- b) Leiten Sie die Anzahl der Punkte bzw. Geraden einer projektiven Ebene der Ordnung  $q$  durch direkte Überlegungen her, ohne Rückgriff auf die affine Ebene.

### 3.4 Die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal

Sätze der Inzidenzgeometrie können nur Aussagen über Punkte, Geraden und Inzidenz enthalten. Solche Sätze sind zwar fundamental für die Geometrie, aber nicht sehr zahlreich in der Elementargeometrie vertreten, weil dort meist Kongruenzgeometrie betrieben wird, die auch noch Mitten und Orthogonalität voraussetzt, meist sogar auch noch Winkel- und Längenmessung. Mit dem Satz von Desargues haben wir bereits ein einfaches Beispiel für einen Satz der projektiven Inzidenzgeometrie kennen gelernt. Wir formulieren ihn noch einmal:

#### **Satz von Desargues:**

**Liegen zwei Dreiecke so, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken kopunktal sind, so sind die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten kollinear.**

Wir haben festgestellt, dass die Umkehrung dieses Satzes mit seiner Dualisierung übereinstimmt, diese also auf Grund des Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie von selbst ein gültiger Satz ist.

Wir wollen noch einige Spezialfälle des Satzes kennen lernen. Dazu bezeichnen wir den Punkt, in dem sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken treffen mit  $S$  und die Verbindungsgerade, auf der sich die Schnittpunkte entsprechender Seiten befinden mit  $s$ .

Nun unterscheidet man in der Literatur zwei Fälle des Satzes von Desargues:

- *Beim „großen“ Satz von Desargues inzidiert  $S$  nicht mit  $s$ .*
- *Beim „kleinen“ Satz von Desargues inzidiert  $S$  mit  $s$ .*

Um mit diesem Satz noch ein wenig vertrauter zu werden, wollen wir einige Sonderfälle in der affinen Geometrie betrachten. Bitte beachten Sie, wie man von einer projektiven Ebene zu einer affinen kommt: Man muss nur längs einer beliebigen Gerade „schlitzen“. Dann wird diese zur „Ferngerade“ und verschwindet in der affinen Ebene.

Aus dem allgemeinen Fall 1 („großer projektiver Desargues“) entwickeln wir Sonderfälle.

Fall 2: großer Satz, aber  $S$  wird Fernpunkt.

Fall 3: großer Satz, aber  $s$  wird Ferngerade.

Fall 4: kleiner Satz, projektiv

Fall 5: kleiner Satz, aber  $s$  wird Ferngerade (und damit auch  $S$  Fernpunkt).

#### **Aufgabe 10:**

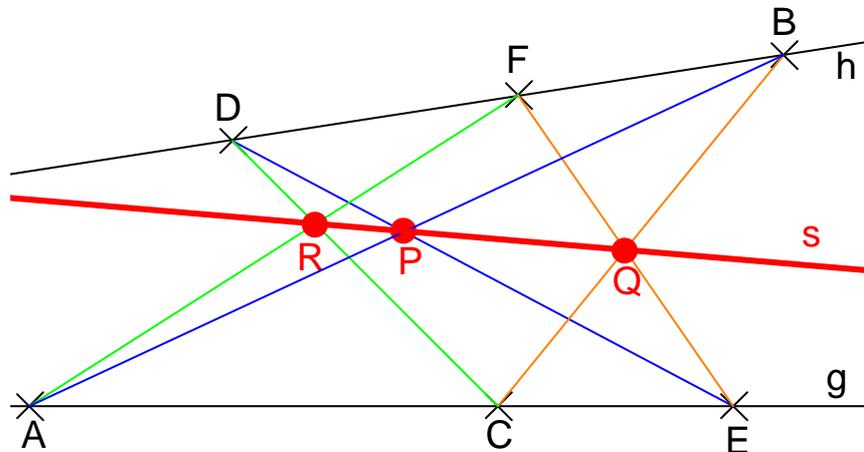
Zeichnen Sie für jeden Fall eine entsprechende Figur.

Welche Art von Abbildung zwischen den beiden Dreiecken ist jeweils im Spiel?

Neben dem Satz von Desargues ist noch mindestens ein weiterer Satz der projektiven Geometrie von Bedeutung, der Satz von Pappus-Pascal:

**Satz von Pappos-Pascal:**

Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei verschiedenen Geraden, so liegen die Schnittpunkte von Gegenseiten des Sechsecks kollinear.

**Aufgabe 11:**

Zeichnen Sie einige Sonderfälle für den Satz von Pappos-Pascal:

- P ist Fernpunkt, d.h. AB und DE sind zueinander parallel.
- Alle drei Punkte P, Q und R sind Fernpunkte.  
Welcher Typ von Sechseck ABCDEF entsteht?
- Weisen Sie durch eine Zeichnung nach, dass der Satz sogar auch für ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF in der reellen Ebene gilt. Wo liegen in diesem Fall die Punkte P, Q und R? Welche Rolle spielt dabei die Gerade s?

Hinweis:

Der Satz in der obigen Form wurde von Pappus von Alexandria (bzw. Pappos in der griechischen Form) etwa um das Jahr 300 n. Chr. entdeckt. Der französische Mathematiker, Theologe und Philosoph Blaise Pascal (1623 – 1662) hat im Alter von 16 Jahren einen Satz über Kegelschnitte entdeckt, der den Satz von Pappos als Spezialfall enthält. Aus diesem Grund gilt der Satz natürlich auch für ein regelmäßiges Sechseck, dessen Ecken auf einem Kegelschnitt (hier einem Kreis) liegen.

Historische Anmerkung:

**Pappus (auch Pappos) von Alexandria (ca. 300 p. Chr.):**

Griechischer Mathematiker, lebte um 300 nach Christus in Alexandria. Neben dem nach ihm benannten grundlegenden Satz der projektiven Geometrie entdeckte er u. a. die Schwerpunktsregeln für physikalische Körper (GULDIN-sche Regeln). Er schrieb ein Sammelwerk, das die griechische Mathematik des Altertums enthielt.

**Blaise Pascal (1623 – 1662; frz. Mathematiker, Physiker, Philosoph, Theologe):**

Mit 16 Jahren fand er eine Verallgemeinerung des Satzes von Pappos: Liegen die Ecken eines Sechsecks auf einem Kegelschnitt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Gegenseiten kollinear. Der Satz von Pappos ist ein Spezialfall dieses Satzes. Mit 17

Jahren veröffentlichte er ein bedeutendes Werk über Kegelschnitte. Zusammen mit P. Fermat gilt er als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bedeutende Beiträge zur Kombinatorik (Pascalsches Zahlendreieck) und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er fand bei Untersuchungen am Mt. Ventoux die barometrische Höhenformel, nach der moderne Höhenmesser (bevor die Satellitenfunknavigation mit GPS aufgenommen wurde) funktionierten. Er konstruierte u. a. die erste funktionierende Rechenmaschine mit Zehnerübertrag. Nach einer Vision im Jahr 1654 zog er sich vollständig vom weltlichen Leben in ein Kloster zurück. Seine bedeutendste theologisch-philosophische Schrift sind die „Pensées sur la religion“.

**Aufgabe 12:**

- a) Formulieren Sie den zum Satz von Pappus-Pascal dualen Satz (Satz von Brianchon).
- b) Überprüfen Sie seine Gültigkeit durch eine entsprechende Zeichnung.
- c) Weisen Sie nach, dass in diesem Fall die Dualisierung nicht die Umkehrung des Satzes ergibt.

### 3.5 Die projektive Koordinatenebene über einem Körper

Wir haben die affinen Ebenen sowohl auf axiomatischem Weg wie auch auf analytischem Weg erschlossen. Wir wollen nun andeuten, wie man auf analytischem Weg von einem Körper zu einer projektiven Ebene kommt. Wir beschränken uns dabei auf einfache konkrete Beispiele, die leicht verallgemeinert werden können und begnügen uns mit diesem kleinen Ausblick.

Ausgangspunkt und Motivation für unsere analytische Konstruktion ist ein **anschauliches Modell**:

Als **Punkte** unserer (unendlichen) projektiven Ebene wählen wir die sämtlichen Ursprungsgeraden des reellen dreidimensionalen Anschauungsraumes  $\mathbb{R}^3$ . Jede solche Gerade kann man beschreiben durch einen einzigen, vom Ursprung verschiedenen, Punkt  $\mathbf{P}(x; y; z)$ , der auf dieser Gerade liegt. Dabei beschreiben zwei Punkte  $P(x; y; z)$  und  $Q(r; s; t)$  genau dann dieselbe Gerade, wenn es ein  $k \neq 0$  gibt, so dass  $x = k \cdot r$  und  $y = k \cdot s$  und  $z = k \cdot t$  gilt. Allerdings müssen wir das Tripel  $(0; 0; 0)$  dabei ausschließen.

Als **Geraden** wählen wir die sämtlichen Ursprungsebenen des dreidimensionalen Anschauungsraumes. Jede dieser Ebenen kann beschrieben werden durch die 3 Koeffizienten  $(a; b; c)$  ihrer Gleichung  $ax + by + cz = 0$ . Wieder ist das Tripel  $(0; 0; 0)$  ausgeschlossen und wieder beschreiben  $(a; b; c)$  und  $(k \cdot a; k \cdot b; k \cdot c)$  für jedes  $k \neq 0$  dieselbe Ebene.

**Inzidenz** zwischen Punkt und Gerade liegt genau dann vor, wenn die Ursprungsgerade in der betreffenden Ebene liegt, d.h. genau dann, wenn für den „Punkt“  $P(x; y; z)$  und die „Gerade“  $(a; b; c)$  die Gleichung  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}$  erfüllt ist.

Man macht sich nun leicht klar, dass alle drei Axiome P1 bis P3 einer projektiven Inzidenzebene durch dieses Modell erfüllt sind.

P1 ist deshalb erfüllt, weil zwei verschiedene Ursprungsgeraden genau eine gemeinsame Ursprungsebene aufspannen, in der beide liegen.

Analog ist P2 deshalb erfüllt, weil sich zwei verschiedene Ursprungsebenen in genau einer Ursprungsgerade schneiden.

P3 wird z.B. durch folgende vier „Punkte“ erfüllt:  $(0; 0; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$  und  $(1; 1; 1)$ .

Legt man nun einen endlichen Körper mit  $q$  verschiedenen Elementen zu Grunde, so kann man die Anzahl der möglichen Punkte und Geraden leicht abzählen, es sind die Klassen zugelassener äquivalenter Tripel. Wir erhalten sie wie folgt:

Es gibt insgesamt  $q^3$  Tripel, wobei das Tripel aus lauter Nullen nicht zugelassen ist, also  $q^3 - 1$  zugelassene. Von diesen sind jeweils  $(q - 1)$  untereinander äquivalent, weil man ein bestimmtes mit allen  $q - 1$  von 0 verschiedenen Körperelementen  $k$  durchmultiplizieren kann. Daher haben wir  $(q^3 - 1) : (q - 1) = q^2 + q + 1$  verschiedene Punkte in exakter Übereinstimmung mit unseren bisherigen Ergebnissen.

Ergebnis:

**Die projektive Koordinatenebene über einem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$  mit  $q$  Elementen besteht aus genau  $q^2 + q + 1$  verschiedenen Punkten und ebenso vielen Geraden. Jede Gerade inzidiert mit genau  $(q + 1)$  Punkten und umgekehrt.**

Jeder Punkt dieser Ebene wird durch drei Koordinaten beschrieben. Man kann z. B. die Fernpunkte dadurch charakterisieren, dass diese als letzte Koordinate die Null des Körpers haben, also der Gleichung  $z = 0$  gehorchen. Die Ferngerade ist in diesem Falle also das Tripel  $(a; b; c) = (0; 0; 1)$ . Alle Punkte der affinen Ebene, die man durch Schlitzsen längs dieser Ferngerade erhält, haben also eine Koordinatendarstellung der Form  $(x; y; 1)$ . Lässt man die bei allen gleiche dritte Koordinate weg, so gelangt man zu den üblichen affinen Koordinaten. Analoges gilt für die Geraden: Die Ferngerade mit dem Tripel  $(0; 0; 1)$  entfällt und übrig bleiben alle Gleichungen der Form  $(a; b; c)$  wobei  $a$  und  $b$  nicht beide 0 sein dürfen. Das sind aber genau die uns bekannten Geraden der affinen Ebene.

Wir wählen als Beispiel den **Restklassenkörper modulo 3** mit den Elementen 0, 1, 2 und konstruieren dazu die projektive Koordinatenebene:

**Punkte:**

Von den 27 Tripeln scheidet  $(0; 0; 0)$  aus. Von den verbleibenden 26 sind je zwei zueinander äquivalent, nämlich  $(x; y; z)$  und  $(2x; 2y; 2z)$ . Damit hat man genau 13 verschiedene Punkte.

**Geraden:**

Genau wie bei den Geraden (vgl. das Dualitätsprinzip) hat man genau 13 Tripel, die unterschiedliche Geraden darstellen.

**Aufgabe 13:**

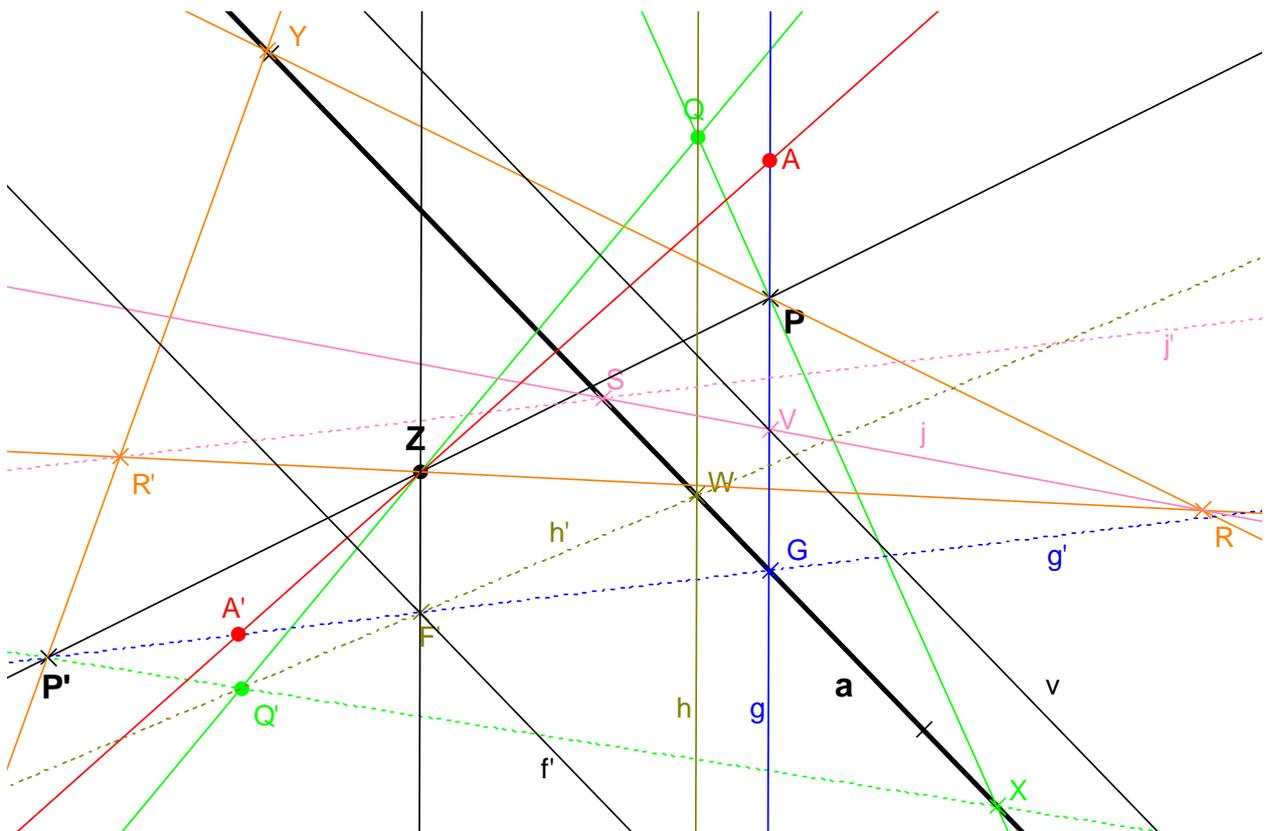
- a) Stellen Sie die Punkte und Geraden des projektiven Minimalmodells analytisch dar.
- b) Zeigen Sie die Isomorphie dieses Modells mit dem bekannten Minimalmodell der projektiven Geometrie (Dreieck-Inkreis-Modell).
- c) Untersuchen Sie rechnerisch in der projektiven Koordinatenebene über dem Körper mit 3, bzw. 4 bzw. 5 Elementen entsprechende Figuren und bestätigen Sie die Gültigkeit der Sätze von Desargues und Pappos-Pascal durch Rechnung.

Wir teilen ohne Beweis mit, dass **in allen projektiven Koordinatenebenen über Körpern die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal gelten**, dass es jedoch durchaus noch andere endliche projektive Inzidenzebenen gibt, in denen diese Sätze nicht gelten. Deren Koordinatisierungen ergeben allerdings auch keine Körper, sondern allgemeinere algebraische Gebilde wie Schiefkörper oder Veblen-Wedderburn-Systeme.

### 3.6 Hinweise und Lösungen zu den Aufgaben

#### Aufgabe 1:

- a) Die Abbildung durch Zentralprojektion ist geradentreu (begründen Sie dies). Wir verbinden  $P$  mit  $Q$  und schneiden  $PQ$  mit  $a$  in  $X$ . Da  $X$  Fixpunkt ist, wird  $PX = PQ$  abgebildet in  $P'X$ . Auf dieser Geraden muss  $Q'$  liegen und außerdem auf dem Projektionsstrahl  $QZ$ .



- b) Die Konstruktion verläuft analog zu a):  $P'R'$  schneidet  $a$  in  $Y$ .  $R$  liegt auf  $YP$  und  $ZR'$ .
- c) Wir konstruieren  $h'$  mit Hilfe des Fixpunktes  $W$  auf  $a$  und mit Hilfe von  $Q'$ . Die Geraden  $h'$  und  $g'$  schneiden sich in einem Punkt  $F'$  der Bildebene. Die Abbildung ist also nicht parallelentreu.
- d) Wir wählen  $j'$  parallel zu  $g'$  durch  $R'$ . Mit Hilfe des Fixpunktes  $S$  und des Punktes  $R$  konstruieren wir  $j$ . Die Geraden  $j$  und  $g$  schneiden sich in  $V$ .
- e) Mit einem DGS konstruieren wir (Punkt auf Linie)  $A$  auf  $g$  und dazu den Bildpunkt  $A'$  als Schnittpunkt von  $g'$  mit  $AZ$ . Dann kann man  $A$  auf  $g$  ziehen. Beobachten Sie insbesondere was passiert, wenn sich  $A$  dem Punkt  $V$  nähert. Wo müsste  $A$  liegen, damit man als Bildpunkt  $A'$  den Punkt  $U'$  auf  $g'$  erwischt? Wandert  $A$  auf  $g$  von oben her auf  $V$  zu, so wandert  $A'$  auf  $g'$  von  $F'$  weg nach rechts und verschwindet ins Unendliche, falls  $A = V$  wird („Verschwindungspunkt“). Wandert nun  $A$  von  $V$  aus weiter auf  $g$  abwärts, so wandert  $A'$  von rechts her auf

der Geraden  $g'$ . Strebt  $A$  nach unten auf  $g$  ins Unendliche, so strebt  $A'$  auf  $F'$  zu. Demonstrieren Sie dies mit einem geeigneten DGS.

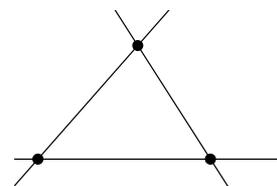
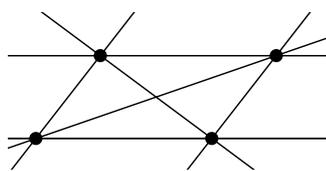
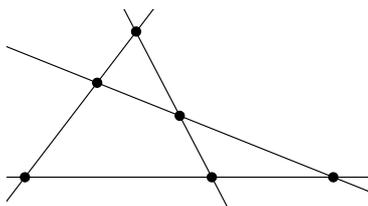
- f)  $VZ$  ist parallel zu  $g'$ , sie schneiden sich also nicht, d.h.  $V$  hat keinen Bildpunkt.
- g)  $F'Z$  ist parallel  $g$ , sie schneiden sich also nicht, d.h.  $F'$  hat keinen Urbunkt.
- h) Genau die Punkte der Achse  $a$  sowie der Punkt  $Z$  sind Fixpunkte der Abbildung.
- i) Geradentreue: Verbindet man jeden Punkt einer Geraden  $g$  mit  $Z$  so entsteht eine „projizierende Ebene“. Diese schneidet die Bildebene in einer Geraden  $g'$ , der Bildgeraden von  $g$ . Damit ist die Geradentreue der Abbildung gezeigt. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bisherigen Beobachtungen.
- j) Verbinden Sie  $A$  mit  $Y$ ,  $S$ ,  $W$  und  $X$  und konstruieren Sie dazu die Bildgeraden durch  $A'$ . Ziehen Sie nun  $A$  auf  $V$ . Wie verlaufen die Bildgeraden nun? Das Punktbüschel durch  $V$  wird abgebildet auf das Parallelbüschel zu  $g'$ .
- k) Verfahren Sie analog zu j) und experimentieren Sie mit einem DGS. Das Punktbüschel durch  $F'$  hat als Urbild das Parallelbüschel zu  $g$ .
- l) Jedes Parallelbüschel (außer den Parallelen zu  $a$ ) wird abgebildet in ein Punktbüschel der Bildebene mit dem Trägerpunkt auf der Parallelen  $f'$  zu  $a$  durch  $F'$ . Jedes Punktbüschel mit einem Trägerpunkt auf der Parallelen  $v$  durch  $V$  zu  $a$  wird abgebildet in ein Parallelbüschel der Bildebene.
- m) Die Verhältnisse aus l) gelten entsprechend.
- n) Die „Verschwindungsgerade“  $v$  in der Originalebene enthält genau die Punkte („Verschwindungspunkte“), die bei der Abbildung ins Unendliche verschwinden.
- o) Die „Fluchtgerade“  $f'$  der Bildebene enthält genau die Punkte („Fluchtpunkte“), durch die alle Bildgeraden eines Parallelbüschels der Originalebene verlaufen.

### Aufgabe 2:

- a) Wir verzichten auf die Wiedergabe dieses inzwischen wohlbekannten Modells.
- b) In Kap. 1.1 in Aufgabe 10 findet sich eine solche Darstellung
- c) Es gibt 13 Punkte und 13 Geraden.
- d) Jeder Punkt inzidiert mit genau 4 Geraden und umgekehrt.
- e)  $A1$  und  $A3$  gelten weiter, nicht mehr jedoch  $A2$ , das Parallelenaxiom.
- f) Entsprechend  $P2$  schneidet jede Gerade jede andere.

### Aufgabe 3:

- a) Man überprüft leicht, dass jedes der drei Axiome  $P1$ ,  $P2$  und  $P3$  erfüllt ist. Damit hat man ein Modell und das System kann nicht widersprüchlich sein.
- b) Unabhängigkeit für  $P1$ :      Unabhängigkeit für  $P2$ :      Unabhängigkeit für  $P3$ :



- c) Da wir bereits zwei nichtisomorphe Modelle kennen (Ordnung 2 und 3) ist das System weder monomorph und erst recht nicht vollständig. So lässt sich z. B. die Aussage „Jede Gerade inzidiert mit mehr als drei Punkten“ weder widerlegen noch bestätigen. Sie gilt z. B. bei Ordnung drei, nicht jedoch bei Ordnung 2.

#### **Aufgabe 4:**

- a) Eine Zeichnung in der reellen Ebene bestätigt die Gültigkeit dieser Aussage.  
 b) Umkehrung und Dualisierung stimmen genau überein (Ausnahmenfall).

#### **Aufgabe 5:**

- a) Mit  $S$  als Fernpunkt erhält man statt einer Pyramide eine Dreieckssäule.  
 Mit  $s$  als Ferngerade und  $S$  als eigentlichem Punkt erhält man die Figur einer zentrischen Streckung. Die Pyramide wird von zwei zueinander ähnlichen Dreiecken geschnitten, denn die Schnittebenen sind parallel und ihre „Schnittgerade“ die Ferngerade  $s$ .  
 b) Ist  $s$  Ferngerade und liegt  $S$  auf  $s$ , so erhält man zwei kongruente Dreiecke, die durch Verschiebung ineinander übergehen. Die Dreieckssäule (statt Pyramide) wird von zwei parallelen Ebenen in kongruenten Schnittdreiecken geschnitten.

#### **Aufgabe 6:**

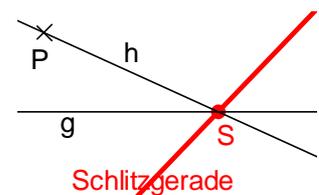
Wir verzichten auf den Nachweis von A3, dies haben wir bei den Hinweisen zum Axiom P3 bereits dargelegt.

Nachweis von A1:

Sind  $P$  und  $Q$  zwei Punkte, die beim Schlitzeln übrig geblieben sind, so können sie nicht auf der Schlitzgeraden liegen. Daher ist ihre nach P1 existierende Verbindungsgerade nicht gelöscht und daher noch vorhanden. Also ist A1 erfüllt.

Nachweis von A2:

Sei  $g$  eine Gerade und  $P$  ein nicht mit  $g$  inzidierender Punkt, die beide nach dem Schlitzeln noch vorhanden sind. Dann ist der Schnittpunkt  $S$  von  $g$  mit der Schlitzgeraden gelöscht worden, jedoch nicht die nach P1 existierende Gerade  $h = PS$ . Diese ist nun – da ja  $S$  nicht mehr existiert – eine Parallele zu  $g$  und mit  $P$  inzident. Für alle anderen Geraden durch  $P$  ist der Schnittpunkt mit  $g$  noch vorhanden, also ist die Parallele eindeutig.



#### **Aufgabe 7:**

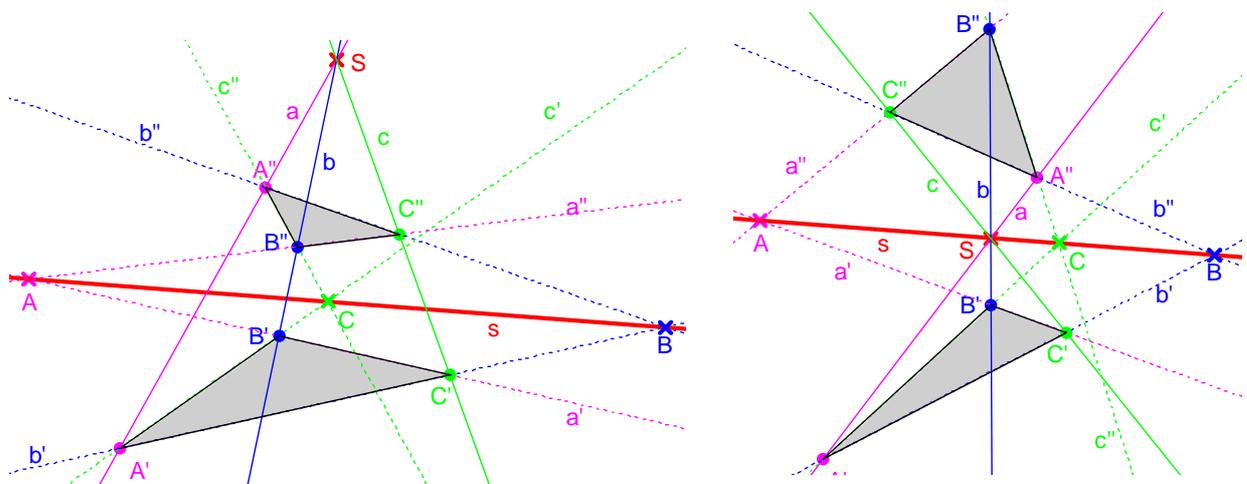
Unter Benutzung der Zeichnung aus Aufgabe 2 wählt man ein geeignetes Demonstrationsbeispiel für beide Fälle und bestätigt die Aussagen.

**Aufgabe 8:**

- a) Man verbindet  $P$  mit den sämtlichen  $(q + 1)$  Punkten einer nicht mit  $P$  inzidierenden Geraden  $g$  und erhält damit  $q + 1$  verschiedene Geraden durch  $P$ . Gäbe es eine weitere, so würde diese auf  $g$  einen weiteren Punkt erzeugen im Gegensatz zur Voraussetzung, dass mit  $g$  genau  $q + 1$  Punkte inzidieren.
- b) Sei  $P$  der Punkt, der mit genau  $q + 1$  Geraden inzidiert. Nun gibt es eine Gerade  $h$ , die nicht mit  $P$  inzidiert (Minimalsatz). Jede der  $q + 1$  Geraden durch  $P$  schneidet  $h$  in genau einem Punkt, also gibt es auf  $h$  genau  $q + 1$  Punkte (auch nicht mehr!). Nun verbindet man einen beliebigen Punkt  $Q$  mit diesen  $q + 1$  Punkten auf  $h$  und erhält das gewünschte Ergebnis. Warum können nicht mehr als diese  $h$  Geraden durch  $Q$  verlaufen?

**Aufgabe 9:**

- a) Es gibt 13 Punkte und 13 Geraden.
- b) Wir setzen den Struktursatz als bewiesen voraus. Sei  $P$  ein beliebiger Punkt. Durch ihn verlaufen genau  $q + 1$  Geraden mit jeweils noch  $q$  weiteren Punkten außer  $P$ . Damit haben wir insgesamt  $(q + 1) \cdot q + 1 = q^2 + q + 1$  Punkte.

**Aufgabe 10:**

Große Form des Satzes v. Desargues:

$S$  inzidiert nicht mit  $s$

Kleine Form des Satzes v. Desargues:

$S$  inzidiert mit  $s$ .

Wir diskutieren die Sonderfälle an Hand der beiden vorstehenden Zeichnungen.

A: Großer Satz, d. h.  $S$  nicht inzident mit  $s$ .

- A1: projektiver Fall (siehe Zeichnung).
- A2: affiner Fall mit  $S$  als Fernpunkt (dann ist  $s$  nicht Ferngerade):  
In diesem Fall wird die Pyramide zur Säule und die Geraden durch  $S$  sind parallel. Ein Dreieck geht aus dem andern durch eine **Achsenaffinität** mit  $s$  als Achse und den Parallelen  $a$ ,  $b$  und  $c$  als Affinitätsstrahlen hervor.

- A3: affiner Fall mit  $s$  als Ferngerade (dann ist  $S$  nicht Fernpunkt): Entsprechende Seiten der beiden Dreiecke sind zueinander parallel. Ein Dreieck geht aus dem anderen durch eine **zentrische Streckung** mit Zentrum  $S$  hervor. Man nennt diese Form auch „Streckungsdesargues“.

B: Kleiner Satz, d.h.  $S$  inzident mit  $s$ .

- B1: projektiver Fall (siehe Zeichnung)
- B2: affiner Fall mit  $s$  als Ferngerade (und damit zugleich mit  $S$  als Fernpunkt): Die beiden Dreiecke gehen durch eine Translation (Verschiebung) ineinander über. Man diese Form auch „Translationsdesargues“.

### **Aufgabe 11:**

Wir verzichten auf die Wiedergabe der einzelnen Zeichnungen und empfehlen dem Leser die selbständige Durchführung und Bestätigung.

Im Fall b) erhalten wir ein Sechseck mit jeweils zueinander parallelen Gegenseiten. Dies muss nicht unbedingt regelmäßig sein. Zeigen Sie die Existenz solcher Sechsecke.

Für den Fall c) haben wir folgende Situation: Jedes Paar von Gegenseiten sind zwei Parallelen und diese haben (in der projektiven Ebene!) ihren Schnittpunkt in einem Fernpunkt. Diese drei Schnittpunkte sind also allesamt Fernpunkte und liegen daher kollinear auf der Ferngeraden.

### **Aufgabe 12:**

a) Pascal:

*Wenn Ecken abwechselnd auf zwei Geraden, dann Gegenseitenschnittpunkte kollinear.*

Dualisierung:

*Wenn Seiten abwechselnd durch zwei Punkte, dann Gegeneckenverbindungen kopunktal.*

Diese Dualisierung ist der Satz von Brianchon (Charles Julien Brianchon, 1785 – 1864, frz. Mathematiker), den dieser jedoch für Kegelschnitte, entsprechend der Verallgemeinerung des Papposschen Satzes durch Pascal formuliert hat.

b) Bestätigen Sie den Satz von Brianchon zumindest für Sonderfälle.

c) Umkehrung des Satzes von Pascal:

Wenn die drei Schnittpunkte von Gegenseitenpaaren eines Sechsecks kollinear liegen, dann liegen die Ecken des Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden.

Überprüfen Sie selbstständig, ob diese Umkehrung ein gültiger Satz ist oder nicht.

### **Aufgabe 13:**

a) Punkte bzw. Geraden sind die folgenden 7 Tripel:  $(0; 0; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 1; 1)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(1; 0; 1)$ ,  $(1; 1; 0)$ ,  $(1; 1; 1)$ .

b) Man zeigt leicht die Isomorphie mit dem bekannten Minimalmodell.

c) Wir überlassen die Durchführung eines Beispiels der Neugier der Leser.

## 4. Ergänzungen

### 4.1 Orthogonalisierbarkeit endlicher affiner Ebenen

#### a) Kontext und Fragestellung

Die affine Inzidenzgeometrie mit den Axiomen A1 bis A3 ist relativ arm an Struktur. Man hat nur Punkte, Geraden und Inzidenz zur Verfügung. Aussagen über Verbindungsgeraden, Schnittpunkte, Parallelen, Dreiecke, Vierecke, die Minimalsätze und Struktursätze, evtl. noch die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal lassen sich gewinnen oder man kann in den Koordinatenebenen über endlichen Körpern Berechnungen zu Inzidenzen anstellen. Eine Relation zwischen Geraden wie etwa die Orthogonalität (nach Möglichkeit noch zusammen mit einer Mittelpunktseigenschaft) würde diese strukturarme Geometrie erheblich bereichern. Dann könnte man sogar Geradenspiegelungen definieren, diese verketteten und auf diese Weise Kongruenzgeometrie betreiben. Wir wollen nun untersuchen, ob sich in endlichen Ebenen eine vernünftige Orthogonalitätsrelation für Geraden einführen lässt.

#### b) Zugänge zur Orthogonalität in affinen Ebenen

Da wir in endlichen Ebenen keine Maßbegriffe (Streckenlängen, Winkelgrößen) zur Verfügung haben, müssen wir nach anderen Möglichkeiten suchen, wie man Orthogonalität einführen könnte. In Koordinatenebenen über Körpern bieten sich dazu Vektoren mit einem Skalarprodukt an oder Geradensteigungen mit einer Orthogonalitätskonstante wie etwa der Wert  $-1$  im Fall der reellen Geometrie, also ein analytischer Zugang:

Zwei Geraden mit den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt  $m_1 * m_2 = -1$ . Da die Zahl  $-1$  kein Quadrat ist, ist keine Gerade zu sich selbst senkrecht. Diese Definition hängt eng mit der über das Skalarprodukt von Vektoren zusammen:

Es seien  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$  die Richtungsvektoren zweier Geraden mit den Stei-

gungen  $m_1$  und  $m_2$ . Dann ist ihr Skalarprodukt  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 + m_1 * m_2$ . Dieses ist genau dann gleich 0, wenn gilt  $m_1 * m_2 = -1$ , und damit ist der Zusammenhang aufgedeckt.

Will man eine beliebige Zahl  $k$  (an Stelle von  $-1$ ) als Orthogonalitätskonstante (OK) haben, so muss man das Skalarprodukt zweier Vektoren etwas anders definieren:

Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  soll gelten  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -k * a_1 * b_1 + a_2 * b_2$ . Dann ist für die Rich-

tungsvektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  das Skalarprodukt genau dann 0, wenn gilt  $m_1 * m_2 = k$ .

Dieser analytische Weg zur Einführung einer OR ist also in Koordinatenebenen über Körpern gangbar. Man darf nur für die OK  $k$  kein Quadrat des Körpers wählen.

Ein zweiter synthetischer Zugang ist dagegen von allgemeinerer Natur:

Welche Forderungen wollen wir in vernünftiger Weise an eine OR zwischen Geraden stellen?

### Axiomatische Forderungen an eine Orthogonalitätsrelation $\perp$ :

- (O1) Zu jeder Geraden  $g$  gibt es eine Gerade  $h$  mit  $g \perp h$ .
- (O2) Die Relation  $\perp$  ist symmetrisch, d.h. wenn  $g \perp h$ , dann auch  $h \perp g$ .
- (O3) Die Relation  $\perp$  ist mit der Parallelität ( $\parallel$ ) verträglich:  
 Falls  $g \perp h$  und  $h \parallel i$ , dann ist stets auch  $g \perp i$ .

Diese Minimalforderungen reichen für eine vernünftige OR jedoch nicht aus. Man zeigt nämlich leicht, dass die Parallelität bereits alle drei Forderungen O1 bis O3 ebenfalls erfüllt. Um diesen Trivialfall auszuschließen fordert man noch:

### (O4) Keine Gerade ist zu sich selbst orthogonal.

Die letzte Forderung kann man billigerweise nur für Ebenen mit gerader Anzahl von Richtungen fordern, in der sich die Richtungen zu orthogonalen Paaren sortieren lassen und keine Richtung übrig bleibt. In Ebenen mit ungerader Anzahl von Richtungen muss man zulassen, dass mindestens eine Richtung zu sich selbst orthogonal (isotrop) sein darf. Aus diesem Grund schwächen wir O4 im Falle einer ungeraden Anzahl von Richtungen ab zu folgender Form:

### (O4\*) Es gibt höchstens eine Richtung, die zu sich selbst orthogonal ist.

Hinweis:

Genau genommen handelt es sich bei einer OR um eine Relation zwischen Richtungen, also Äquivalenzklassen paralleler Geraden. Man kann das auch so sagen:

*Die Orthogonalität ist eine fixpunktfreie involutorische Permutation der Richtungen.*

Im Falle einer ungeraden Anzahl von Richtungen besitzt sie höchstens einen Fixpunkt.

Wir haben oben Forderungen an eine Orthogonalitätsrelation zwischen Geraden aufgestellt. Wir wollen nun überprüfen, ob eine solche Orthogonalitätsrelation auch die von uns gewohnten Eigenschaften besitzt:

### Satz 1: Existenz und Eindeutigkeit des Lots

**Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem Punkt  $P$  gibt es genau eine Gerade  $h$ , die mit  $P$  inzidiert und orthogonal zu  $g$  ist.**

Beweis:

Nach O1 gibt es eine Gerade  $h$  mit  $g \perp h$ . Auf Grund des Axioms A2 gibt es eine Parallele  $j$  zu  $h$  durch  $P$ . Diese hat die gewünschten beiden Eigenschaften. Auf Grund des Parallelenaxioms ist sie eindeutig, denn sonst gäbe es zu  $h$  zwei Parallelen durch  $P$ .

### Satz 2: Existenz und Eindeutigkeit des Lotfußpunktes

**Zu jeder Geraden  $g$  und zu jeder zu  $g$  orthogonalen Geraden  $h \neq g$  gibt es eindeutig einen Punkt  $P$ , der sowohl mit  $g$  als auch mit  $h$  inzidiert.**

Beweis:

Sei  $h$  orthogonal zu  $g$ . Wegen (O4) ist  $h$  nicht parallel zu  $g$ . Daher haben  $h$  und  $g$  einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $P$ , der die Forderung von Satz 2 erfüllt.

Bitte beachten Sie, dass wir in diesem Fall die Forderung (O4) benutzen mussten und nicht schon mit (O4\*) auskommen.

### c) Beispiele für Orthogonalitätsrelationen in endlichen affinen Ebenen

Liegt uns eine affine Koordinatenebene über einem Körper vor, so können wir auf analytischem Weg wie üblich mit Hilfe einer Orthogonalitätskonstanten  $k$  eine OR einführen:

Neben den beiden Achsen sind zwei Geraden mit den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  genau dann zueinander parallel, wenn gilt  $m_1 * m_2 = k$ . Dabei ist  $k$  ein Körperelement, das kein Quadrat ist, denn dann sind wir sicher, dass keine isotropen Richtungen auftreten.

Da in Körpern der Charakteristik 2 jedes Körperelement ein Quadrat ist, führt das genannte Vorgehen **nur in affinen Ebenen ungerader Ordnung** zum Erfolg.

In der Ebene von Ordnung  $q = 3$  kann man  $2 = -1 \pmod{3}$  als OK wählen und erhält die bereits bekannte OR, bei der alles normal verläuft: Alle Dreiecke sind rechtwinklig und sie besitzen einen Höhenschnittpunkt, der in der Ecke mit dem orthogonalen Seitenpaar liegt. Es bleibt die Frage, ob es auch nicht rechtwinklige Parallelogramme gibt. Der Leser möge diese Frage selbst untersuchen und entscheiden.

In der Ebene von Ordnung  $q = 5$  kann man  $-1 = 4$  nicht als OK wählen (ebenso nicht die 1 des Körpers), da dieses Körperelement ein Quadrat ist. Als OK kommen die beiden Nichtquadrate 2 und 3 in Frage. Mit diesen beiden OK verläuft alles normal: Zwar sind nicht mehr alle Dreiecke rechtwinklig, jedoch besitzt jedes Dreieck einen Höhenschnittpunkt. Zeigen Sie dies an Beispielen.

### d) Die Rolle des Höhenschnittpunktssatzes für Dreiecke

Sieht man sich unter den fundamentalen Sätzen der Geometrie um, bei denen nur Inzidenz und Orthogonalität eine Rolle spielen, so kommt man unweigerlich auf den Höhenschnittpunktssatz für Dreiecke. Insofern ist dieser fundamental für affine Inzidenzebenen mit Orthogonalitätsrelation. Wir wollen sehen, ob dieser für alle möglichen OR gilt, die unseren Bedingungen (O1) bis (O4) genügen.

Wir untersuchen zu diesem Zweck ein Beispiel in der affinen Koordinatenebene über dem Restklassenkörper mod 5. In diesem sei eine OR definiert mit folgenden Paaren orthogonaler Parallelscharen: Die beiden Achsenrichtungen sowie die Parallelscharen mit den Steigungen 1 und 4 bzw. 2 und 3 sollen jeweils orthogonal zueinander sein. Wegen  $1 * 4 \neq 2 * 3$  gibt es in diesem Fall keine OK, obwohl – wie man leicht selbst nachprüft – die Forderungen (O1) bis (O4) erfüllt sind.

Gegeben sei nun das Dreieck  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 0)$  und  $C(1; 2)$ . Wir bestimmen die drei Höhen: Die Höhe durch C ist einfach zu erkennen:  $x = 1$ . Die Höhe durch A hat die Steigung 1, also die Gleichung  $y = x$ . Die Höhe durch B hat die Steigung 3 und daher die Gleichung  $y = 3x + 1$ . Der Schnittpunkt  $S(1; 1)$  der beiden ersten Höhen liegt nicht auf der dritten Höhe. **Es gibt für dieses Dreieck keinen Höhenschnittpunkt.**

Wählen wir dagegen eine OR mit der  $OK = 2$  oder mit der  $OK = 3$  in dieser Ebene, so besitzt genau dieses Dreieck in beiden Fällen einen Höhenschnittpunkt. Prüfen Sie dies durch selbstständige Rechnung nach.

Ganz anders liegen die Verhältnisse etwa für das Dreieck  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 0)$  und  $D(0; 3)$ . Dieses ist bei allen drei zu Grunde gelegten OR rechtwinklig bei A und besitzt diesen Punkt als Höhenschnittpunkt. Offenbar ist also die Existenz einer OK eine Garantie für die Existenz des Höhenschnittpunkts bei allen Dreiecken. Dies wollen wir nun beweisen.

**Satz:**

**In einer affinen Koordinatenebene über einem Körper gilt der Höhenschnittpunktssatz genau dann für alle Dreiecke, wenn es eine Orthogonalitätskonstante  $k$  des Körpers gibt, die kein Quadrat ist.**

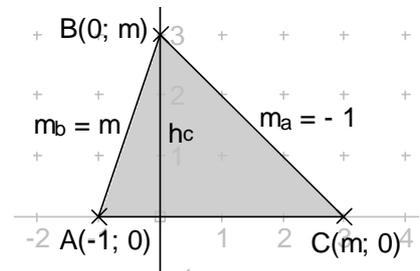
Wir beweisen den Satz in beiden Richtungen:

- a) Gegeben sei eine affine Koordinatenebene über einem Körper mit  $OK = k$ , wobei  $k$  kein Quadrat ist. Wir zeigen, dass für jedes Dreieck der Höhenschnittpunktssatz gilt:

O. B. d. A. können wir die Ecken des Dreiecks zur Vereinfachung der Rechnung wie folgt wählen:  $A(0; 0)$ ,  $B(r; 0)$  und  $C(s; t)$ . Durch einfaches Nachrechnen kann man nun zeigen, dass sich die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Führen Sie diese Rechnung selbstständig durch.

- b) Gegeben sei eine affine Koordinatenebene über einem Körper und für jedes Dreieck dieser Ebene existiere der Höhenschnittpunkt. Wir zeigen, dass dann eine OR mit einer OK vorliegt:

Wir wählen für ein beliebiges Element  $m$  des Körpers die Punkte  $A(-1; 0)$ ,  $B(m; 0)$  und  $C(0; m)$  als Dreieck. (Hinweis: Warum darf  $m$  weder  $0$  noch  $-1$  sein?).



Bezeichnen wir mit  $m'$  die Steigung der Geraden, die zu den Geraden mit der Steigung  $m$  senkrecht sind, so erhält man die Gleichungen der drei Höhen:

$$h_c \dots x = 0; \quad h_b \dots y = m' * x - m * m' \quad h_a \dots y = (-1)' * x + (-1)'$$

Der Schnittpunkt von  $h_c$  und  $h_b$  ergibt  $H(0; -m * m')$ . Soll dieser auch auf  $h_a$  liegen, so muss gelten:  $-m * m' = (-1)'$ . Nun ist die Zahl  $-(-1)' = k$  eine Konstante des Körpers und, da  $m$  beliebig war, gilt für alle zueinander senkrechten Geraden mit Steigungen  $m$  bzw.  $m'$  die Beziehung  $m * m' = k = \text{const}$ . Das heißt aber nichts anderes, als dass eine OR mit der Konstanten  $k$  vorliegt.

Wir müssen noch den Fall  $m = 0$  und  $m = -1$  untersuchen. Für  $m = 0$  ist die Sache klar, da wir die Achsrichtungen als zueinander orthogonal vorausgesetzt haben. Für  $m = -1$  erhalten wir jedoch die dazu senkrechte Richtung mit der Steigung  $m' = (-1)'$  und damit gilt in diesem Fall ebenfalls  $m * m' = -(-1)' = k$ .

Mit diesem bemerkenswerten Ergebnis wollen wir unsere Betrachtungen zu diesem Thema beenden und dem Leser für die Untersuchung von endlichen affinen Ebenen mit OR freien Raum lassen. So kann man z. B. leicht in entsprechenden Ebenen den **Satz über die Eulergerade eines Dreiecks** bestätigen:

**Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismitte M eines Dreiecks liegen stets kopunktal und es gilt:  $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{SM}$ .**

Selbstverständlich gilt dieser Satz immer vorbehaltlich der Existenz der entsprechenden Punkte. So existiert z. B. in Ebenen mit Charakteristik 3 kein Schwerpunkt und in Ebenen von gerader Ordnung existieren nicht einmal Mittelpunkte und damit erst recht keine Seitenhalbierenden.

## 4.2 Abbildungen in affinen Ebenen

### a) Kollineationen in affinen Inzidenzebenen

Vorbemerkung:

Die aus der Schulgeometrie bekannte reelle Ebene ist ebenfalls eine affine Inzidenzebene, deshalb gelten die folgenden Überlegungen auch in der gewöhnlichen ebenen Geometrie also z.B. für die in der Schule behandelte Elementargeometrie.

**Definition:**

Eine **Kollineation** einer affinen Inzidenzebene ist eine bijektive und geradentreue Abbildung der Menge der Punkte der Ebene auf sich selbst.

Wohlbekannte Beispiele für solche Kollineationen aus der Elementargeometrie sind etwa alle Kongruenzabbildungen (Geradenspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen, Gleitspiegelungen) und die Ähnlichkeitsabbildungen (zentrische Streckungen, Klappstreckungen und Drehstreckungen). Alle diese Abbildungen haben die im folgenden Satz ausgesprochene Eigenschaft:

**Satz 1:**

Jede Kollineation einer affinen Inzidenzebene ist **paralleltreue**, d.h. für alle Geraden  $g, h$  gilt: Wenn  $g$  parallel zu  $h$  ist, dann ist  $g'$  parallel zu  $h'$ .

Beweis:

Sei  $g$  parallel  $h$  und  $g \neq h$ . Nehmen wir nun an es sei  $g'$  nicht parallel  $h'$ , also es existiere  $S'$  mit  $S'$  inzident mit  $g'$  und  $S'$  inzident mit  $h'$ . Dann müsste es wegen der Bijektivität und Inzidenztreue ein Urbild  $S$  zu  $S'$  geben mit  $S \mid g$  und  $S \mid h$  im Widerspruch zur Parallelität von  $g$  und  $h$ .

### b) Dilatationen

Unter den sämtlichen Kollineationen einer affinen Inzidenzebene interessieren unter anderen diejenigen, die jede Gerade in eine dazu parallele Gerade abbilden, wie etwa die Verschiebungen oder die zentrischen Streckungen.

**Definition:**

Eine Kollineation heißt eine **Dilatation** wenn gilt: Für jede Gerade  $g$  der Ebene ist die Bildgerade  $g'$  parallel zum Urbild  $g$ .

Selbstverständlich ist jede Dilatation auch paralleltreue. Man verwechsle jedoch nicht die Bedeutung dieser beiden Begriffe. Eine *paralleltreue* Abbildung muss *noch lange nicht dilatatorisch* sein. Letzteres ist eine viel stärkere Forderung als die Paralleltreue.

Wir wollen nun nach Typen von Dilatationen suchen. Es wird sich zeigen, dass es genau zwei verschiedene Typen von Dilatationen gibt, solche mit einem Fixpunkt (zentrische Streckungen) und solche ohne Fixpunkt (Translationen).

**Satz 2:**

- a) Jede Gerade durch einen Fixpunkt einer Dilatation ist eine Fixgerade. Der Fixpunkt ist daher ein „Fixgeradenpunkt“. Man nennt einen solchen Punkt ein **Zentrum**.
- b) Jede echte Dilatation ( $\neq$  Identität) besitzt *höchstens einen Fixpunkt*.

Beweis:

- a) Sei  $F$  fix und  $F \in g$ .  
Dann ist  $g'$  die Parallele (weil dilatorisch) zu  $g$  durch  $F' = F$ . Wegen der Eindeutigkeit der Parallelen (A2) ist also  $g' = g$ . Daher ist jede Gerade durch  $F$  Fixgerade, also  $F$  ein Zentrum.
- b) Seien  $F$  und  $G$  zwei verschiedene Zentren einer Dilatation.  
Wir werden zeigen, dass dann  $A' = A$  ist für jeden beliebigen Punkt  $A$ .  
Wir betrachten dazu  $g = AF$  und  $h = AG$ . Beide Geraden sind Fixgeraden, da sie ja durch die Zentren  $F$  bzw.  $G$  verlaufen. Daher ist  $A'$  Schnittpunkt von  $g' = g$  mit  $h' = h$  also  $A' = A$ .  
Hinweis: Liegt  $A$  ausnahmsweise auf  $FG$ , so gehe man über einen Hilfspunkt  $B$ , der nicht mit  $FG$  inzidiert.

**Satz 3:**

Genau die Verbindungsgeraden jedes Punktes mit seinem zugeordneten Bildpunkt (**Spurgeraden**) einer Dilatation sind Fixgeraden.

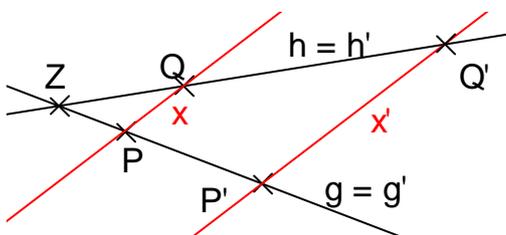
Beweis:

- a) Sei  $g = g'$ . Dann liegt für jeden Punkt  $P$  mit  $P \in g$  der Bildpunkt  $P'$  ebenfalls auf  $g$  und daher ist  $g$  Spurgerade. Also ist jede Fixgerade auch Spurgerade.
- b) Umgekehrt sei nun  $g$  Spurgerade, d.h. es gibt  $P$  mit  $P \in g$  und  $P' \in g$ . Dann ist aber  $g'$  die Parallele zu  $g$  durch  $P'$ , also  $g' = g$  und daher Fixgerade.

Wir werden nun zeigen, dass eine Dilatation mit Fixpunkt die uns wohlbekannte zentrische Streckung und eine Dilatation ohne Fixpunkt eine Translation ist. Dazu konstruieren wir zu einem gegebenen Punktepaar das Bild eines beliebigen Punktes  $Q$ :

**Dilatation mit Fixpunkt**

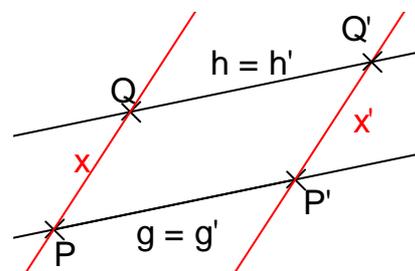
Zentrum  $F$  und zugeordnetes Paar  $P, P'$ .



Zunächst ist  $ZQ = h$  eine Fixgerade, auf der der Punkt  $Q'$  liegen muss. Die Bildgerade  $x'$  zur Geraden  $x = PQ$  verläuft parallel zu  $x$  durch den Punkt  $P'$ . Damit ist  $Q'$  Schnittpunkt von  $h = h'$  mit  $x'$ .

**Dilatation ohne Fixpunkt**

Zugeordnetes Punktepaar  $P, P'$



Die Bildgerade  $x'$  zu  $x = PQ$  ist die Parallele zu  $x$  durch  $P'$ .  $QQ'$  ist parallel zu  $PP'$ . Würden sich  $QQ'$  und  $PP'$  schneiden, so wäre dies ein Fixpunkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir wissen nun, dass es genau zwei verschiedene Typen von Dilatationen gibt:

- **Dilatationen mit genau einem Fixpunkt**, das sind die zentrischen **Streckungen**
- **Dilatationen ohne Fixpunkt**, das sind die **Translationen (Verschiebungen)**.

#### Satz 4:

Die sämtlichen Spurgeraden einer echten **Translation** sind zueinander parallel, sie bilden ein Parallelbüschel von Fixgeraden.

Beweis:

Gäbe es zwei nicht parallele Fixgeraden, so wäre ihr Schnittpunkt ein Fixpunkt, es läge also keine echte Translation vor. Widerspruch.

#### Satz 5:

Genau die Geraden durch das Zentrum sind die Fixgeraden und damit Spurgeraden einer echten **Streckung**.

Beweis:

Klar ist, dass jede Gerade durch das Zentrum  $F$  fix ist. Es kann keine weiteren geben. Sei nämlich  $g$  fix und  $F$  nicht inzident mit  $g$ . Dann existiert ein Punkt  $P \in g$ , der von  $F$  verschieden ist. Die Verbindungsgerade  $BF$  ist jedoch Fixgerade. Daher muss auch  $B$  Fixpunkt sein im Widerspruch zu Satz 2b.

#### Aufgabe 1:

- Zeigen Sie für endliche affine Ebenen von ungerader Ordnung  $q > 3$ : Jedes Dreieck wird durch eine zentrische Streckung am Schwerpunkt mit dem Faktor  $-\frac{1}{2} = -(2^{-1})$  in sein Mittendreieck abgebildet. Dabei geht der Höhenschnittpunkt in die Umkreismitte über.
- Wie ist dies in Ebenen von Ordnung 3 bzw. mit gerader Ordnung?

Hinweis:

Eine involutorische Streckung, also eine Streckung  $\sigma$  mit der Eigenschaft  $\sigma^2 = \text{Id}$  bzw.  $\sigma = \sigma^{-1}$  nennen wir eine **Punktspiegelung**.

Gibt es in einer affinen Ebene Punktspiegelungen, so kann man damit den Begriff der Mitte zweier Punkte definieren:  $M$  ist **Mitte** von  $A$  und  $B$ , wenn  $M$  Fixpunkt einer Punktspiegelung ist, bei der  $A' = B$  und  $B' = A$  ist.

Eine Verallgemeinerung bei beliebigen Streckungen führt auf den Begriff des *Teilverhältnisses* oder *Streckungsfaktors*.

#### c) Achsenaffinitäten

Wir wollen nun solche Affinitäten untersuchen, die eine „Fixpunktgerade“ oder „**Achse**“ besitzen. Beispiele dafür sind etwa die Geradenspiegelungen, Schrägspiegelungen oder Scherungen. Gegenbeispiele sind etwa echte Gleitspiegelungen, die zwar eine Fixgerade jedoch keine „Fixpunktgerade“ besitzen. Wir werden zeigen, dass es genau

zwei Typen von Achsenaffinitäten gibt, die Scherungen und die schiefen Achsenaffinitäten. Letztere nennt man manchmal auch Achsenaffinitäten im engeren Sinne.

**Definition:**

Eine *Kollineation einer affinen Inzidenzebene mit einer Achse*, nennen wir eine **Achsenaffinität**.

**Satz 6:**

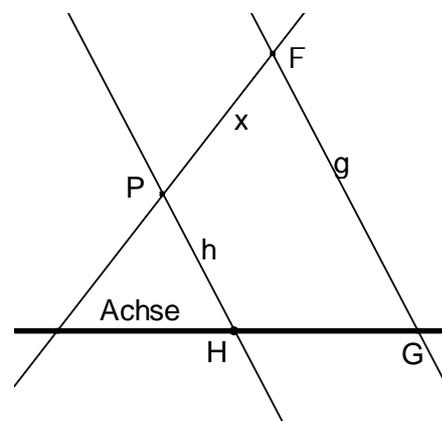
Eine *echte Achsenaffinität* ( $\neq \text{Id.}$ ) besitzt *keinen Fixpunkt außerhalb der Achse*.

In Kontraposition formuliert besagt Satz 6: Besitzt eine Achsenaffinität einen Fixpunkt  $F$  außerhalb der Achse, so ist es die Identität.

Beweis:

Angenommen es gäbe einen solchen Fixpunkt  $F$ . Dann ist jede Gerade durch  $F$  fix, denn sie besitzt zwei Fixpunkte, den Punkt  $F$  und den Schnittpunkt  $G$  mit der Achse. (Wie ist es mit der Parallele zur Achse durch  $F$ ? Warum ist diese fix?). Dann liegt aber mit  $F$  ein Zentrum vor. Nun können wir zeigen, dass jeder Punkt  $P$  fix ist, also die Identität vorliegt:

Wir betrachten einen Punkt  $P$ . Die Verbindung  $x$  von  $P$  mit  $F$  ist Fixgerade, auf ihr muss  $P'$  liegen. Wir verbinden  $F$  mit irgendeinem Punkt  $G$  der Achse. Diese Gerade  $g$  ist Fixgerade. Nun zeichnen wir die Parallele  $h$  zu  $g$  durch  $P$ , sie schneidet die Achse in  $H$ .  $h'$  ist die Parallele (Parallelentreue nach Satz 1) zu  $g' = g$  durch  $H$  also  $h' = h$  und damit  $P' = P$ .



**Satz 7:**

- Jede Spurgerade einer echten ( $\neq$  Identität) Achsenaffinität ist Fixgerade.
- Alle Spurgeraden einer echten Achsenaffinität sind zueinander parallel.

Beweis:

- Wir unterscheiden zwei Fälle:

Entweder es gibt eine Spurgerade  $s$  parallel zur Achse oder es gibt keine solche Spurgerade.

- Fall 1: Es  $s = AA'$  eine Spurgerade, die die Achse in  $S$  trifft, also  $s = SA' = SA$ . Da  $S$  Fixpunkt ist, muss die Bildgerade  $s'$  sowohl durch  $S$  als auch durch  $A'$  verlaufen, also die Verbindungsgerade von  $A'$  mit  $S$  darstellen. Daher ist  $s = s'$ .
- Fall 2: Es sei  $s = AA'$  parallel zur Achse. Dann ist wegen Satz 1 und der Inzidenztreue das Bild von  $s$  die Parallele zu  $a$  durch  $A'$ , also  $s = s'$  und daher ist  $s$  Fixgerade.

- Wieder unterscheiden wir die beiden Fälle wie in a):

- Fall 1: Keine Spurgerade ist parallel zur Achse.  
Annahme: Zwei Spurgeraden  $g = GG'$  und  $h = HH'$  schneiden sich in  $S$ . Da  $g = g'$  und  $h = h'$  (nach a)) ist  $S$  Fixpunkt. Dies widerspricht Satz 6, wenn  $S$  außerhalb der Achse liegt.
- Liegt jedoch  $S$  auf der Achse, so ist jeder weitere Punkt  $P$  fix: Denn die Parallele zu  $g$  durch  $P$  und die Parallele zu  $h$  durch  $P$  schneiden die Achse und sie sind Fixgeraden (wegen der Parallelentreue müssen sie zu  $g' = g$  bzw.  $h' = h$  parallel

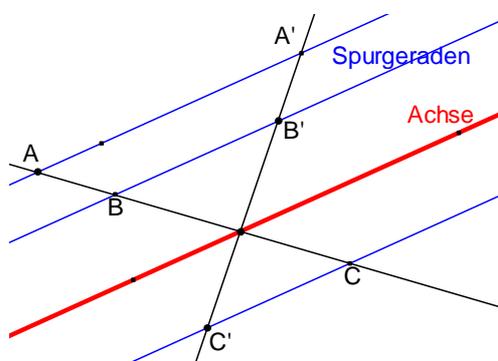
sein und durch den Fixpunkt auf der Achse verlaufen). Daher ist ihr Schnittpunkt  $P$  Fixpunkt also die Abbildung die Identität.

- Fall 2: Eine Spurgerade  $g$  ist parallel zur Achse und von dieser verschieden. Gäbe es eine dazu nicht parallele Spurgerade  $h$  so wären nach a) beide Fixgeraden und ihr Schnittpunkt ein Fixpunkt außerhalb der Achse im Widerspruch zu Satz 6.

Ergebnis: Es gibt zwei Typen von Achsenaffinitäten:

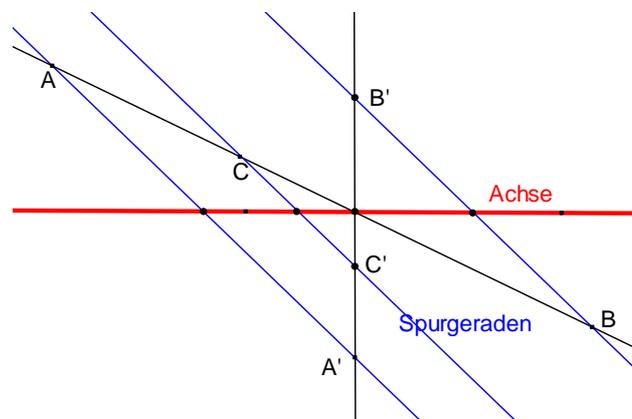
### Typ 1: Scherung

*Spurgeraden sind parallel zur Achse.*



### Typ 2: Schiefe Achsenaffinität

*Spurgeraden nicht parallel zur Achse.*



Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse noch einmal übersichtlich zusammen:

- **Alle Kollineationen einer affinen Ebene sind paralleleentreu.**
- **Es gibt genau zwei Typen von Achsenaffinitäten: Scherungen und (schiefe) Achsenaffinitäten i. e. S.**
- **Es gibt genau zwei Typen von Dilatationen: Translationen (ohne Fixpunkt) und zentrische Streckungen (mit Fixpunkt).**

### Aufgabe 2:

- Bilden Sie in der reellen Zeichenebene ein Quadrat mit seinem Mittenviereck, den Diagonalen und den Mittelparallelen sowie seinem Inkreis durch eine schiefe Achsenaffinität bzw. durch eine Scherung ab. Wählen Sie eine Quadratseite auf der Affinitätsachse.
- Bestätigen Sie dabei, dass die Abbildungen teilverhältnistreu sind, dass also insbesondere gilt: Mitte bleibt Mitte.

### d) Existenzbedingungen für Kollineationen in affinen Inzidenzebenen

Alle bisher über Kollineationen formulierten Sätze sind Aussagen, die *vorbehaltlich der Existenz* solcher Kollineationen gelten. Unsere bisherigen Ergebnisse besagen also:

Wenn es Kollineationen gibt, dann gelten die Sätze 1 bis 7. Ob solche wirklich existieren, ist noch zu klären. Wir formulieren nun die Bedingungen, die die Existenz von Kollineationen sichern.

#### Satz A:

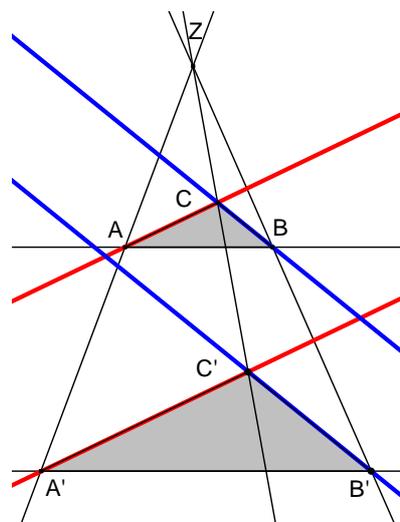
In einer affinen Inzidenzebene gibt es zu vorgegebenen kollinearen Punkten  $A, A', Z$  genau dann eindeutig eine **echte zentrische Streckung** mit Zentrum  $Z$  und zugeordnetem Paar  $A, A'$ , wenn der **große affine Satz von Desargues** gilt.

Beweis:

Es seien  $Z, A$  und  $A'$  gegeben.

Wir konstruieren zu  $B$  den Bildpunkt  $B'$ .

Sei nun  $C$  ein beliebiger weiterer Punkt, so können wir  $C'$  entweder mit Hilfe von  $A$  und  $A'$  oder mit Hilfe von  $B$  und  $B'$  konstruieren. Nur wenn beide zum selben Ergebnis führen, ist die Abbildung eindeutig bestimmt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn der große affine Satz von Desargues erfüllt ist, d.h. wenn die rote und die blaue Konstruktion zum selben Punkt  $C'$  führen.



Zusatzbemerkung:

Man kann sich an Hand einer einfachen Zeichnung leicht überlegen, dass für die Existenz einer **schiefen Achsenaffinität** dieselbe Bedingung, nämlich die Gültigkeit des großen affinen Satzes von Desargues, erfüllt sein muss.

#### Satz B:

In einer affinen Inzidenzebene gibt es zu vorgegebenen Punkten  $A$  und  $A'$  genau dann eindeutig eine **echte Translation** mit zugeordnetem Paar  $A, A'$ , wenn der **kleine affine Satz von Desargues** gilt.

Der Beweis verläuft genau analog zu dem von Satz A mit Hilfe des Translationsdesargues.

Zusatzbemerkung:

Man kann sich an Hand einer einfachen Zeichnung leicht überlegen, dass für die Existenz einer **Scherung** dieselbe Bedingung (kleiner affiner Desargues) gelten muss.

Hinweis:

Sowohl in projektiven als auch in affinen Ebenen folgt der kleine Satz von Desargues aus dem jeweiligen großen Satz (nicht umgekehrt!). Also ist Satz A jeweils der weiter-

greifende. Wenn der große Desargues gilt, dann gibt es Streckungen, Translationen und beide Sorten von Achsenaffinitäten.

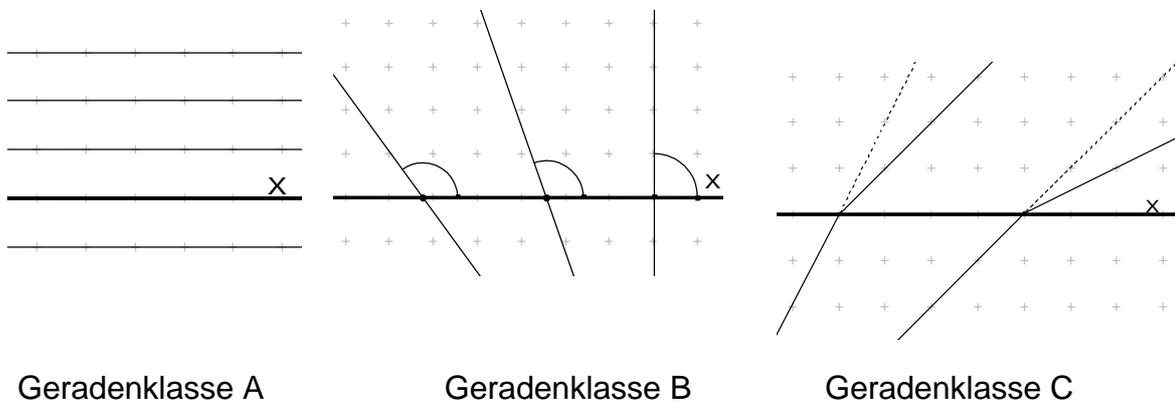
### e) Nichtdesargues'sche Inzidenzebenen

Es erhebt sich nun die Frage, ob der **Satz von Desargues** in allen affinen Inzidenzebenen gilt, oder ob es tatsächlich nichtdesarguessche affine Ebenen gibt. Jedenfalls kann man durch rechnerischen Beweis zeigen, dass er in allen affinen Koordinatenebenen über Körpern gilt, d.h. alle affinen Koordinatenebenen über Körpern sind desarguessch. Erstmals im Jahr 1902 hat Moulton eine **nichtdesarguessche** – allerdings unendliche – **affine Ebene** konstruiert und so deren Existenz nachgewiesen. Wir wollen im Folgenden das MOULTON-MODELL kurz beschreiben:

Als Ebene benützen wir die reelle affine Ebene und ihre sämtlichen Punkte. Als Geraden jedoch benutzen wir drei verschiedene Typen:

- Alle Parallelen zur x-Achse sind auch Moultongeraden.
- Alle Geraden mit negativer Steigung, also einem Richtungswinkel  $\geq 90^\circ$ , sind ebenfalls Moulton-Geraden.
- Anders die Geraden mit positiver Steigung. Diese werden an der x-Achse geknickt, so dass sie oberhalb der x-Achse nur noch mit der halben Steigung wie unterhalb der x-Achse verlaufen.

Wir haben also drei verschiedene Klassen von Geraden in der MOULTON-Ebene:



Man überlegt sich leicht, dass die Axiome A1 bis A3 einer affinen Inzidenzebene für dieses Moulton-Modell erfüllt sind, also eine affine Inzidenzebene vorliegt.

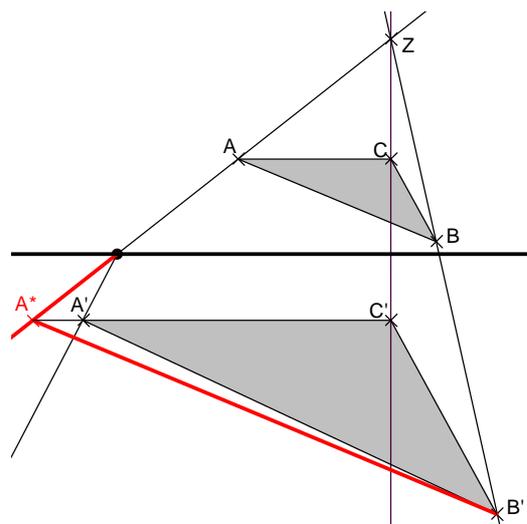
Nun lässt sich jedoch leicht eine Figur in dieser Moulton-Ebene angeben, für die der Satz von Desargues nicht erfüllt ist:

In der gewöhnlichen reellen affinen Ebene sind die Voraussetzungen des kleinen affinen Satzes von Desargues erfüllt für die gezeichneten Dreiecke  $ABC$  und  $A^*B^*C^*$ .

In der Moulton-Ebene liegen die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  ebenfalls so, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken kopunktal in  $Z$  sind (man sagt: sie liegen perspektiv). Weiter ist  $AC$  parallel zu  $A'C'$  und  $BC$  parallel zu  $B'C'$ . Aber es ist nicht  $A'B'$  parallel zu  $AB$  im Widerspruch zur Forderung des Satzes von Desargues.

Damit hat man ein Modell einer affinen Ebene gefunden, in der der Satz von Desargues nicht immer gilt.

Man kann übrigens die Moulton-Ebene leicht in der üblichen Weise zu einer projektiven Ebene erweitern und erhält so ein Modell einer nicht-desarguesschen *projektiven* Inzidenzebene.



Man wird nun fragen, ob es auch **endliche nicht-desarguessche Ebenen** gibt. Die Antwort ist ja, aber erst ab Ordnung 9. Man hat in den 1960-er Jahren erstmals bei der Ordnung 9 nichtisomorphe Ebenen konstruieren können. Es gibt zur Ordnung 9 einmal die bekannte desarguessche affine Koordinatenebene über dem Galoisfeld  $GF(3^2)$  und es gibt darüber hinaus eine weitere nichtdesarguessche Ebene der Ordnung 9.

## f) Anzahlfragen bei Kollineationen

Gegeben sei eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$ , in der der große Satz von Desargues gilt, in der also Kollineationen existieren (z.B. in den Koordinatenebenen über Körpern). Wir fragen nach der jeweils möglichen Anzahl von bestimmten Kollineationen:

### Translationen:

Man kann einen bestimmten Punkt der Ebene in jeden anderen verschieben, also gibt es **genau  $q^2$  Translationen (einschl. Identität)**.

Translationen in einer festen Richtung gibt es so viele, wie es Punkte auf einer Gerade gibt, nämlich  $q$  (einschließlich Identität).

### Streckungen:

Zunächst bestimmen wir die Anzahl der Streckungen mit festem Zentrum  $Z$ :

Ein beliebiger Punkt  $P \neq Z$  kann auf alle Punkte der Gerade  $PZ$  außer auf  $Z$  selbst abgebildet werden, das sind  $(q - 1)$  Möglichkeiten (einschließlich der Identität). Es gibt also genau  $(q - 2)$  *echte* Streckungen mit festem Zentrum  $Z$ .

Hinweis: Das ist analytisch klar. Von den  $q$  Elementen des Körpers können für echte Streckungen alle außer 0 und 1 als Streckfaktoren verwendet werden. Die 0 als Streckfaktor ergibt keine Bijektion und die 1 ergibt die Identität.

Da wir insgesamt  $q^2$  Punkte haben und zu jedem Punkt als Zentrum  $(q - 2)$  Streckungen existieren, gibt es genau  $q^2 * (q - 2)$  **echte Streckungen**.

Die  $q^2$  **Translationen** (einschl. Id.) bilden mit der Verkettung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe, die **Translationsgruppe**.

Die sämtlichen  $q^2 * (q - 1)$  **Dilatationen** (Streckungen und Translationen) bilden ebenfalls eine - jedoch nicht kommutative - Gruppe, die sogenannte **Dilatationsgruppe**.

### Scherungen:

a) Mit fester Achse:

Ist P ein beliebiger Punkt außerhalb der Achse, so kann P auf jeden anderen Punkt der Parallele zur Achse durch P abgebildet werden, also gibt es  $(q - 1)$  Möglichkeiten für eine echte Scherung mit der festen Achse a.

b) Da wir  $q * (q + 1)$  verschiedene Geraden haben, gibt es genau  $q * (q + 1) * (q - 1) = q * (q^2 - 1)$  **verschiedene echte Scherungen**.

### Schiefe Achsenaffinitäten (Achsenaffinitäten i. e. S.)

a) Mit fester Achse:

Ist P ein beliebiger Punkt außerhalb der Achse, so kann P auf irgend einen anderen Punkt P' abgebildet werden, wobei P' nicht auf der Achse und nicht auf der Parallelen zur Achse durch P liegen darf. Von den insgesamt  $q^2$  Punkten kommen für P' also die q Punkte auf der Achse und die q Punkte auf der Parallelen nicht in Frage, folglich bleiben  $q^2 - 2q = q * (q - 2)$  Möglichkeiten für eine echte Achsenaffinität mit fester Achse.

b) Da es  $q * (q + 1)$  verschiedene Geraden gibt, die als Achse in Frage kommen, erhalten wir insgesamt  $q^2 * (q + 1) * (q - 2)$  **verschiedene echte Achsenaffinitäten i. e. S.**

Ohne Herleitung sei noch die Gesamtzahl aller möglichen Kollineationen mitgeteilt:

**Anzahl aller Kollineationen in einer affinen Inzidenzebene der Ordnung q:**

$$|\text{Koll}| = q^3 * (q - 1)^2 * (q + 1).$$

Man kann sich diese Zahl leicht durch einfache kombinatorische Überlegungen herleiten, wenn man beachtet, dass eine Kollineation eindeutig bestimmt ist, wenn zu drei nichtkollinearen Punkten A, B und C drei nichtkollineare Bildpunkte A', B' und C' vorgegeben sind. Die nichtkollinearen Tripel von Punkten lassen sich leicht abzählen.

Nach einem Satz von Lagrange müssen die Ordnungen der Untergruppen (z.B. der Translationsgruppe oder der Dilatationsgruppe) Teiler dieser Gesamtzahl aller Kollineationen sein.

### 4.3 Abbildungen in projektiven Inzidenzebenen

Wir untersuchen **Kollineationen** (d.h. bijektive und geradentreue Abbildungen) einer projektiven Ebene in sich. Dabei beschränken wir uns auf Abbildungen mit einem **Zentrum** und einer **Achse**, die sogenannten **Perspektivitäten** oder **Zentralkollineationen**. Es sei nochmals daran erinnert, dass in projektiven Ebenen das Dualitätsprinzip gilt und daher viele Aussagen von Geraden auf Punkte und umgekehrt übertragen werden können.

#### Satz 1

Die **Spurgeraden** (Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte) jeder echten Perspektivität **sind Fixgeraden**.

Die **Spurpunkte** (Schnittpunkte zugeordneter Geraden) jeder echten Perspektivität **sind Fixpunkte**.

Beweis:

Eine Spurgerade  $g = AA'$  schneidet die Achse in einem Fixpunkt  $F$ . Die Gerade  $g = FA$  geht bei der Abbildung über in die Gerade  $g' = F'A' = FA' = g$ , also ist  $g$  Fixgerade.

Man beweise analog die duale Aussage.

#### Satz 2

Das **Zentrum** (die **Achse**) jeder *echten* Perspektivität ist **eindeutig**, d.h. es gibt kein zweites.

Beweis:

Annahme: Es gibt außer  $F$  noch ein zweites Zentrum  $E$ . Sei nun  $P$  ein beliebiger Punkt. Die Verbindungsgeraden  $PF$  und  $PE$  sind Fixgeraden, also ist  $P$  Fixpunkt. Da  $P$  beliebig war, ist jeder Punkt  $P$  Fixpunkt und die Abbildung die Identität im Widerspruch zur Voraussetzung einer *echten*, also von der Identität verschiedenen, Perspektivität.

Man beweise analog die duale Aussage.

#### Satz 3:

Die **Spurgeraden** einer echten Perspektivität sind **genau die Geraden durch das Zentrum**.

Die **Spurpunkte** einer echten Perspektivität sind **genau die Punkte der Achse**.

Beweis:

Diesmal beweisen wir Teil 2 des Satzes und überlassen dem Leser Teil 1:

Jeder Punkt der Achse ist Fixpunkt und daher notwendigerweise Spurpunkt.

Sei nun umgekehrt irgendein Spurpunkt  $S = g \cap g'$  gegeben. Wir zeigen, dass  $S$  auf der Achse liegen muss. Angenommen  $S$  liege nicht auf der Achse. Dann ist  $S$  ein Fixpunkt, der gleichzeitig ein Zentrum ist (alle Verbindungsgeraden mit Achspunkten sind Fixgeraden). Dies ist ein Widerspruch zu Satz 2, nach dem das Zentrum eindeutig ist.

Man beweise analog die duale Aussage.

#### Satz 4:

Es sei  $a$  die Achse und  $A, A'$  und  $B, B'$  zugeordnete Punktpaare, deren Verbindungsgeraden sich auf der Achse  $a$  schneiden. Dann ist dadurch eindeutig eine **echte Perspektivität** mit Achse  $a$  bestimmt (falls eine solche existiert).

Beweis: Zeichnen Sie dazu ein Beispiel durch.

Man formuliere die dazu duale Aussage und beweise diese.

Man unterscheidet Perspektivitäten danach, ob das Zentrum mit der Achse inzidiert oder nicht. Inzidiert das Zentrum mit der Achse, so spricht man von einer **Elation**. Ist dies nicht der Fall, so nennt man die Perspektivität eine **Homologie**.

**Satz 5:**

Eine Achse  $a$  und ein zugeordnetes Punktepaar  $P, P'$ , das nicht mit der Achse inzidiert, bestimmen eine **echte Elation** eindeutig.

Beweis:

Überzeugen Sie sich davon, indem Sie ein Beispiel durchzeichnen.

Man formuliere die dazu duale Aussage und beweise diese.

**Satz 6:**

Eine Achse  $a$ , ein nicht mit  $a$  inzidierendes Zentrum  $Z$  und ein zugeordnetes Punktepaar  $A, A'$ , das mit  $Z$  kollinear liegt, bestimmen eine **echte Homologie** eindeutig.

Beweis:

Überzeugen Sie sich davon, indem Sie ein Beispiel durchzeichnen.

Man formuliere die dazu duale Aussage und beweise diese.

Mit diesen Sätzen sind die Perspektivitäten i. W. beschrieben und wir fragen nun nach Bedingungen, die die Existenz solcher Abbildungen in projektiven Ebenen regeln. Wie bei den affinen Ebenen ist auch hier der Satz von Desargues die zentrale Eigenschaft.

**Satz A: (Vgl. Satz 5)**

Zu gegebenem Paar von Zentrum  $Z$  und Achse  $a$  mit  $Z \notin a$  und einem beliebigen Punktepaar  $A, A'$ , das mit  $Z$  kollinear liegt, gibt es eine (eindeutig bestimmte s. o.) **echte Elation**, wenn der **kleine projektive Satz von Desargues** gilt.

Beweis: Man zeichne eine entsprechende Figur.

**Satz B: (Vgl. Satz 6)**

Zu gegebenem Paar von Zentrum  $Z$  und Achse  $a$  mit  $Z$  nicht inzident mit  $a$  und einem beliebigen Punktepaar  $A, A'$ , das mit  $Z$  kollinear liegt, gibt es eine (eindeutig bestimmte s. o.) **echte Homologie**, wenn der **große projektive Satz von Desargues** gilt.

Beweis: Man zeichne eine entsprechende Figur.

Wir wollen als Beispiel eine große **Desargues-Figur** in der projektiven Ebene der Ordnung 3 betrachten:

Wir erweitern die affine Neunpunkteebene zur projektiven Ebene.

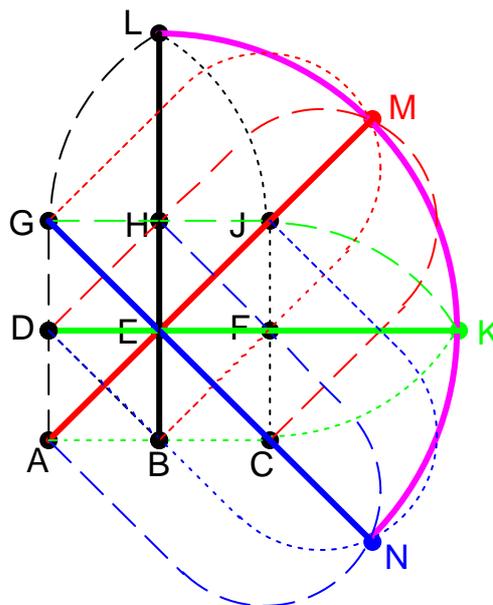
Nun wählen wir  $A$  als Zentrum.

Die Punkte EDN wählen wir als Dreieck PQR und die Punkte MGH als Dreieck P'Q'R'.

Dann liegen die beiden Dreiecke perspektiv mit Zentrum  $A$ .

Die Geraden ED und MG schneiden sich in  $F$ , DN und GH schneiden sich in  $J$  und NE und HM schneiden sich in  $C$ .

Die drei Schnittpunkte  $F$ ,  $J$  und  $C$  liegen kollinear.



### Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass es in einer projektiven Ebene der Ordnung  $q$  genau

- $(q^2 + q + 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 1)$  verschiedene Elationen und
- $(q^2 + q + 1) \cdot q^2 \cdot (q - 2)$  verschiedene Homologien gibt.

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir zeigen, dass viele affine Abbildungen Sonderfälle von projektiven Perspektivitäten sind.

Dazu machen wir folgende Vorbemerkung: Schlitzten wir eine projektive Ebene längs einer Fixgeraden einer Zentralkollineation, so wird durch die gegebene Abbildung in der übrig bleibenden affinen Ebene eine Affinität bestimmt. Die Punkte auf der Schlitzgeraden werden nämlich nicht mit den übrigen Punkten vermischt, denn die Schlitzgerade soll ja Fixgerade der Perspektivität sein. Wir betrachten nun verschiedene Fälle. Verfolgen Sie jeden Fall an Hand einer entsprechenden Zeichnung:

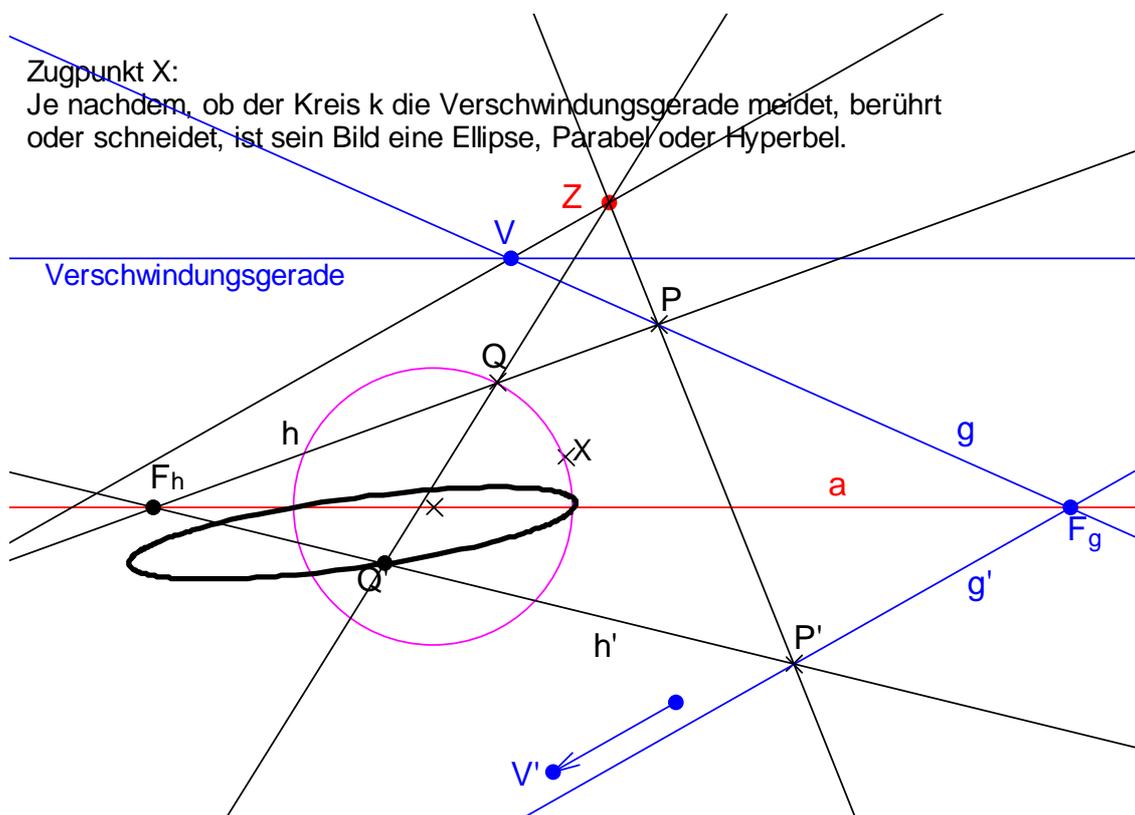
- Fall 1: Homologie.  
Schlitzgerade ist eine durch das Zentrum verlaufende Fixgerade.  
In diesem Fall hat die Affinität eine Achse und alle Spurgeraden (= Fixgeraden) der Affinität sind zueinander parallel (mit  $Z$  als Fernpunkt) jedoch nicht zur Achse  $a$  parallel. Die Affinität ist also eine **schiefe Achsenaffinität**. Sonderfälle davon sind die Schrägspiegelungen, die senkrechten Achsenaffinitäten und die Geradenspiegelungen.
- Fall 2: Homologie.  
Schlitzgerade ist die Achse.  
In diesem Fall hat die Affinität ein Zentrum und ist eine Dilatation, weil alle Fernpunkte (d. h. Richtungen) Fixpunkte der Perspektivität sind. Daher ist die Abbildung eine **zentrische Streckung** mit der Punktspiegelung als Sonderfall.
- Fall 3: Elation.  
Schlitzgerade ist eine von der Achse verschiedene Gerade durch das Zentrum.  
In diesem Fall hat die Affinität eine Achse und alle Spurgeraden sind parallel und zwar parallel zur Achse (das Zentrum  $Z$  ist der Fernpunkt der Achse). Die Abbildung ist eine **Scherung**.

- Fall 4: Elation.  
Schlitzgerade ist die Achse.

In diesem Fall hat die Affinität weder ein Zentrum noch eine Achse. Allerdings ist sie eine Dilatation, denn alle Fernpunkte (die Punkte der Schlitzgerade) sind ja Fixpunkte. Außerdem sind alle Spurgeraden untereinander parallel, da sie den gemeinsamen Fernpunkt  $Z$  besitzen. Es handelt sich offenbar um eine **Translation**.

Wir zeigen im Folgenden eine mit einem DGS (DYNAGEO) erstellte Zeichnung, bei der das projektive Bild eines Kreises bei Abbildung durch die Zentralkollineation mit Zentrum  $Z$  und Achse  $a$  und dem Punktepaar  $P$  und  $P'$  dargestellt ist. Durch Ziehen am Zugpunkt  $X$  kann man den Kreis verändern. Sein Bild ist jeweils ein Kegelschnitt:

**Das projektive Bild eines Kreises ist stets ein Kegelschnitt. Je nachdem dieses keinen, einen oder zwei Fernpunkte besitzt, ist es in affiner Sicht eine Ellipse, eine Parabel bzw. eine Hyperbel.**



#### **Aufgabe 4:**

Zeigen Sie mit einem DGS: Als projektives Bild eines Quadrats kann jede Vierecksform entstehen. Alle Vierecke sind also zueinander projektiv.

## 4.4 Ovale in endlichen Ebenen

### a) Zum Begriff des Ovals

Wir haben in unseren endlichen Ebenen bisher nur die Geometrie von Punkten und Geraden untersucht. Es läge nahe, die Fragestellung dahin zu erweitern, ob es auch andere, nichtlineare Gebilde in diesen Ebenen gibt. Lassen sich z. B. Figuren wie „Kreise“ in irgendeiner Weise in diesen Geometrien darstellen? Wir wollen erste Erfahrungen sammeln.

Welche Punktmenge erfüllt z. B. die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  (bzw.  $= 2$ ) in der affinen Koordinatenebene der Ordnung 3? Es ist die Menge  $k = \{(0; 1), (1; 0), (0; 2), (2; 0)\}$  mit genau vier Punkten. Von den 4 Geraden, die mit dem Punkt  $D(0; 1)$  dieser Menge inzidieren, gehen drei durch die drei anderen Punkte, sind also „Sekanten“ und eine trifft keinen weiteren Punkt des „Kreises“  $k$  ist also so etwas wie eine „Tangente“ dieses Kreises. Dies gilt für alle vier Punkte unseres „Kreises“  $k$ . Dieser hat also in allen seinen vier Punkten genau eine „Tangente“ und alle anderen Geraden durch diese Punkte sind „Sekanten“. Wie steht es nun mit den Punkten, die nicht zu unserem Kreis  $k$  gehören? Betrachten wir den Punkt  $A(0; 0)$ . Zwei der 4 durch ihn verlaufenden Geraden sind Sekanten ( $x = 0$  und  $y = 0$ ) und die beiden anderen ( $y = x$  und  $y = -x$ ) sind Passanten, denn sie enthalten gar keinen Punkt von  $k$ . Ein solcher Punkt, durch den es keine Tangenten an  $k$  gibt ist ein „innerer Punkt“ von  $k$ . Ganz anders etwa der Punkt  $B(1; 1)$ . Zwei der durch ihn verlaufenden Geraden sind Tangenten, eine ist eine Sekante und eine ist eine Passante. Man überprüft leicht, dass dies auch für alle anderen Punkte der Ebene gilt und man hat für diesen Kreis  $k$  genau einen „inneren“ Punkt, durch den keine Tangente geht, 4 äußere Punkte, durch die je zwei Tangenten, eine Sekante und eine Passante verlaufen und 4 Kreispunkte, durch die je eine Tangente und 3 Sekanten verlaufen. Wir wollen in folgender Aufgabe eine sehr anschauliche Vorstellung eines derartigen Gebildes erarbeiten.

### Aufgabe 1:

- Bestimmen Sie in der affinen Koordinatenebene über dem Restklassenkörper modulo 3 die Menge  $k$  aller Punkte, die die Gleichung  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$  erfüllen.
- Zeichnen Sie in der Netzdarstellung dieser Ebene alle *Sekanten* von  $k$  (das sind Geraden, die mit *genau zwei* Punkten von  $k$  inzidieren) blau ein.
- Zeichnen Sie in der Netzdarstellung dieser Ebene alle *Tangenten* von  $k$  (das sind Geraden, die mit *genau einem* Punkt von  $k$  inzidieren) rot ein.
- Zeichnen Sie in der Netzdarstellung dieser Ebene alle *Passanten* von  $k$  (das sind Geraden, die mit *keinem* Punkt von  $k$  inzidieren) grün ein.
- Markieren Sie die Punkte der Ebene, durch die *keine* bzw. *genau eine* bzw. *genau zwei* Tangenten von  $k$  gehen mit verschiedenen Farben oder Symbolen.
- Wie viele Tangenten, Passanten, Sekanten, wie viele *Ovalpunkte*, wie viele „äußere Punkte“ und wie viele „innere Punkte“ (durch diese verläuft keine Tangente) besitzt das Oval?
- Fassen Sie Ihre Ergebnisse aus dieser Aufgabe übersichtlich zusammen.

Wir wollen uns weiter von anschaulichen Vorstellungen leiten lassen und den Begriff des **Ovals** (Eikurve) in endlichen Ebenen definieren.

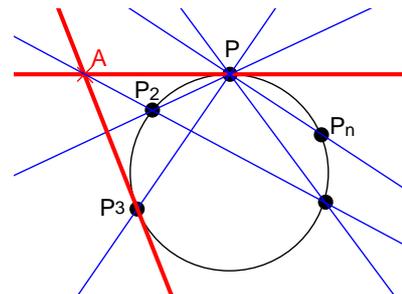
Als erstes wollen wir fordern, dass keine drei Punkte eines Ovals kollinear liegen. Jede Gerade soll also das Oval in höchstens zwei Punkten treffen.

### Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass in einer affinen Inzidenzebene der Ordnung  $q$ , eine Menge  $M$  von Punkten, bei der keine drei Punkte kollinear liegen, höchstens  $(q + 2)$  Punkte enthält. Hinweis: Betrachten Sie die sämtlichen  $q + 1$  Geraden durch einen der Punkte.

Wir wissen jetzt, dass ein Oval in einer Ebene der Ordnung  $q$  höchstens  $(q + 2)$  Punkte enthalten kann. Wir wollen nun noch eine weitere Anlehnung aus der Anschauung machen. Verbindet man einen Punkt  $P$  eines Ovals mit den übrigen Ovalpunkten, so erhält man Sekanten des Ovals.

Nun verlangen wir noch, dass eine der Geraden durch den Punkt  $P$  eine Tangente des Ovals sein soll, also keinen weiteren Punkt des Ovals enthalten darf. Dann reduziert sich die Anzahl der möglichen Ovalpunkte wegen der Anzahl  $q + 1$  der Geraden durch  $P$  auf insgesamt  $n = q + 1$  Punkte.



Wir haben unsere einführenden Überlegungen aus anschaulichen Gründen bisher in **affinen** Inzidenzebenen durchgeführt. Wir wollen nun aus systematischen Gründen Ovale in **projektiven** Ebenen untersuchen. Die dort erhaltenen Ergebnisse lassen sich leicht in affine Ebenen übertragen, wenn man die durch Schlitzten längs einer Passante des Ovals eintretenden Veränderungen berücksichtigt.

### Definition:

Eine Menge von  $n = q + 1$  Punkten einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung  $q$  nennen wir ein **Oval**, falls keine drei dieser  $n$  Punkte kollinear sind.

Eine Gerade  $g$  der Ebene heißt **Passante**, **Tangente** bzw. **Sekante** bezüglich eines Ovals, falls kein, bzw. genau ein, bzw. genau zwei Ovalpunkte mit dieser Geraden inzidieren.

Ein von den Ovalpunkten verschiedener Punkt  $P$  heißt **innerer Punkt** bzw. **äußerer Punkt** bezüglich des Ovals, falls er mit keiner bzw. mindestens einer Tangente inzidiert.

Als unmittelbare Folgerung aus der Definition und der Anzahl  $q + 1$  der Geraden durch jeden Punkt der Ebene erhält man:

### Satz 1:

Mit jedem Punkt eines Ovals inzidieren genau  $q$  Sekanten und genau eine Tangente.

Es gibt bezüglich eines Ovals genau  $q + 1$  Tangenten und  $\binom{q+1}{2} = \frac{(q+1) \cdot q}{2}$  Sekanten.

## b) Ovale in projektiven Inzidenzebenen ungerader Ordnung.

Wir haben bei unseren einführenden Beispielen immer die Ordnung 3, also eine ungerade Ordnung betrachtet. Es zeigt sich nun, dass Ovale in Ebenen ungerader Ordnung sich relativ „normal“ verhalten, während in Ebenen gerader Ordnung ganz neue und unerwartete Erscheinungen auftreten. Wir werden uns deshalb zunächst nur auf Ebenen ungerader Ordnung beschränken.

Wir betrachten die Tangente  $t$  in einem Ovalpunkt  $P$ . Es sei  $A$  ein weiterer von  $P$  verschiedener Punkt auf  $t$ . Jede Sekante durch  $A$  trifft genau zwei Punkte des Ovals. Da  $q$  ungerade und daher  $n = q + 1$  gerade ist, bleibt neben  $P$  ein einzelner Punkt des Ovals übrig nachdem man alle Sekanten durch  $A$  gezogen hat (siehe oben stehende Figur). Daher muss es durch  $A$  außer  $t$  noch eine zweite Tangente  $u$  geben. Da dies für jeden der  $q$  von  $P$  verschiedenen Punkte der Tangente  $t$  gilt, gehen durch jeden dieser Punkte genau zwei Tangenten des Ovals und wir erhalten:

### Satz 2:

In einer projektiven Ebene ungerader Ordnung  $q$  verlaufen durch jeden äußeren Punkt eines Ovals genau 2 Tangenten, genau  $(q - 1) / 2$  Sekanten und damit genau  $(q - 1) / 2$  Passanten.

Für  $q = 3$  erhalten wir für jeden äußeren Punkt 2 Tangenten, 1 Sekante und 1 Passante in Übereinstimmung mit unseren in Abschnitt a) untersuchten Beispielen.

Wir können nun die Anzahl sämtlicher äußeren und inneren Punkte bestimmen. Es gibt genau  $n = q + 1$  Ovalpunkte und zu jedem dieser genau eine Tangente. Auf jeder dieser Tangenten gibt es außer dem Ovalpunkt noch genau  $q$  äußere Punkte. Insgesamt also  $(q + 1) \cdot q$  solcher Punkte. Dabei wurde jedoch jeder Punkt doppelt gezählt, weil jeder ja mit genau zwei Tangenten inzidiert. Wir erhalten somit das folgende Ergebnis:

### Satz 3:

In einer projektiven Ebene ungerader Ordnung  $q$  gibt es zu jedem Oval genau  $q + 1$  Ovalpunkte, genau  $\frac{q \cdot (q + 1)}{2}$  äußere und damit genau  $\frac{q \cdot (q - 1)}{2}$  innere Punkte.

Für  $q = 3$  erhalten wir 4 Ovalpunkte, 6 äußere und 3 innere Punkte. Da die 3 inneren Punkte nicht kollinear sein können (Begründung?) entfallen beim Schlitzen 2 innere und 2 äußere Punkte und man erhält neben 4 Ovalpunkten noch 4 äußere und 1 inneren Punkt in der affinen Ebene von Ordnung 3, in Übereinstimmung mit unseren Beispielen aus Abschnitt a).

### Aufgabe 3:

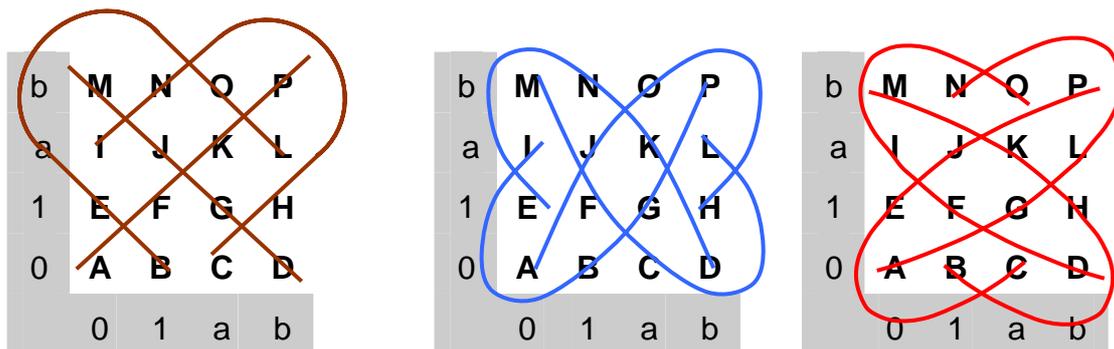
Gegeben ist die affine Koordinatenebene der Ordnung 7.

- a) Bestimmen Sie die Menge  $k$  der Punkte, welche die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  erfüllen. Wie viele Punkte sind dies?

- Zeigen Sie, dass keine drei der Punkte von  $k$  kollinear auf einer Geraden liegen.
- Wie viele der 8 Geraden durch den Punkt  $P(0; 1)$  von  $k$  sind Tangenten, wie viele Sekanten?
- Wie viele der 8 Geraden durch den nicht zu  $k$  gehörenden Punkt  $U(0; 0)$  sind Tangenten, wie viele Sekanten, wie viele Passanten?
- Gibt es auch nicht zu  $k$  gehörige Punkte, durch die keine Tangenten gehen, die also „innere Punkte“ von  $k$  sind? Bestimmen Sie diese.
- Bestimmen Sie für das erhaltene Oval die Anzahl der inneren Punkte, der äußeren Punkte, der Tangenten, der Sekanten und der Passanten.
- Lassen sich die Ergebnisse in Übereinstimmung mit den für die projektive Ebene erhaltenen bringen?

### c) Ovale in projektiven Ebenen gerader Ordnung

Bevor wir allgemeine Ergebnisse ableiten, wollen wir wieder ein Beispiel studieren. Dazu wählen wir die affine Ebene der Ordnung 4, die wir noch einmal grafisch darstellen, wobei wir auf die achsenparallelen Geradenscharen verzichten.



Wir wählen als Oval  $V$  die folgende Menge von 5 Punkten  $V = \{A, C, I, L, O\}$ .  
Wir bestimmen die Tangenten in den einzelnen Ovalpunkten:

in A: A-F-K-P    in C: C-E-J-P    in I: I-B-G-P    in L: D-H-L-P    in O: M-N-O-P

Es fällt sofort auf, dass sämtliche 5 Tangenten durch einen gemeinsamen Punkt, hier den Punkt  $P$ , gehen. Man nennt diesen den Knoten des Ovals.

Außerdem kommt jeder Punkt der Ebene in der obigen Aufzählung vor, es gibt also keine inneren Punkte, durch jeden Punkt verläuft mindestens eine Tangente.

Nun betrachten wir einen von A und vom Knoten P verschiedenen Punkt auf der Tangente von A, z. B. den Punkt F. Wir stellen fest, dass keine weitere Tangente durch F verläuft. Man bestätigt dies sofort für alle entsprechenden Punkte auf sämtlichen Tangenten.

#### Aufgabe 4:

Bestimmen Sie für das angegebene Beispiel die Anzahl aller inneren und äußeren Punkte des Ovals sowie die Anzahl aller Tangenten, Sekanten und Passanten.

Nach diesem einführenden Beispiel wollen wir allgemeine Sätze beweisen.

**Satz 4:**

In einer projektiven Ebene gerader Ordnung gibt es durch jeden Punkt auf einer Sekante genau eine Tangente des Ovals.

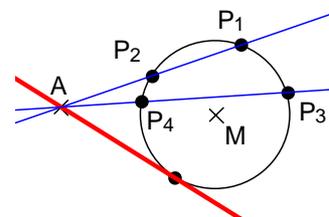
Beweis:

Zunächst ist die Behauptung für Ovalpunkte selbst richtig.

Nun betrachten wir einen von den Ovalpunkten  $P_1$  und  $P_2$  verschiedenen Punkt  $A$  auf einer Sekante des Ovals.

Da die Anzahl der Ovalpunkte ungerade ist, muss durch diesen Punkt  $A$  *mindestens eine* Tangente des Ovals verlaufen, denn auf den Sekanten liegen die Ovalpunkte immer paarweise.

Da dies für jeden der  $q - 1$  von  $P_1$  und  $P_2$  verschiedenen Punkte der Sekante gilt, das Oval jedoch nur  $q - 1$  Tangenten (mit Ausnahme derer durch  $P_1$  und  $P_2$ ) besitzt, bedeutet dies, dass durch jeden solchen Punkt  $A$  *genau eine* Tangente verläuft.



Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun die besondere Eigenschaft des Knotenpunktes beweisen:

**Satz 5:**

In einer projektiven Ebene gerader Ordnung  $q$  inzidieren sämtliche  $q + 1$  Tangenten eines Ovals mit einem gemeinsamen Punkt  $K$ .

Diesen nennt man den **Knoten** des Ovals.

Beweis:

Sei  $K$  der Schnittpunkt zweier Tangenten des Ovals. Dann kann  $K$  gemäß Satz 4 nicht auf einer Sekante liegen. Daher ist jede Verbindungsgerade von  $K$  mit einem Ovalpunkt eine Tangente und der Satz ist bewiesen.

Der zu Satz 2 analoge Satz für Ebenen gerader Ordnung lautet also wie folgt:

**Satz 6:**

In einer projektiven Ebene gerader Ordnung  $q$  verlaufen durch jeden äußeren vom Knoten verschiedenen Punkt eines Ovals genau eine Tangente, genau  $q/2$  Sekanten und damit genau  $q/2$  Passanten.

Für  $q = 4$  erhalten wir für jeden vom Knoten verschiedenen äußeren Punkt 1 Tangente, 2 Sekanten und 2 Passanten in Übereinstimmung mit unserem eingangs untersuchten Beispiel.

Wir können nun die Anzahl der inneren und äußeren Punkte ermitteln. Da auf jeder Tangente außer dem Berührungspunkt und dem Knoten noch  $q - 1$  weitere Punkte liegen und es  $q + 1$  Tangenten gibt, finden wir  $(q - 1) * (q + 1) = q^2 - 1$  solcher Punkte, also mit dem Knoten zusammen genau  $q^2$  äußere Punkte. Damit erhalten wir die Anzahl der inneren Punkte, wenn wir von der Gesamtzahl aller Punkte, die der Ovalpunkte und der äußeren abziehen. Wir erhalten  $q^2 + q + 1 - q^2 - q - 1 = 0$  innere Punkte. Damit ergibt sich das zum Satz 3 analoge Ergebnis für Ebenen gerader Ordnung:

**Satz 7:**

In einer projektiven Ebene gerader Ordnung  $q$  gibt es zu jedem Oval genau  $q + 1$  Ovalpunkte und genau  $q^2$  äußere aber keinen inneren Punkt.

**d) Ovale in affinen Ebenen**

Wir wollen abschließend noch überlegen, wie sich die Aussagen über Ovale ändern, wenn wir die affine Inzidenzebene an Stelle der projektiven Inzidenzebene zu Grunde legen. Wir behalten die in a) gemachten Definitionen bei und müssen nur *längs einer Passante in der projektiven Ebene schlitzen*, damit kein Ovalpunkt verloren geht.

Ebenen von ungerader Ordnung  $q$ :

Jede der  $q + 1$  Tangenten schneidet die zu schlitzende Gerade in einem Punkt. Allerdings gehen von jedem dieser Punkte 2 Tangenten aus. Also liegen auf der Schlitzgerade genau  $(q + 1)/2$  äußere Punkte und die restlichen  $(q + 1)/2$  sind innere Punkte. Beim Übergang vermindert sich also die Zahl der Passanten um 1, die Zahl der äußeren sowie der inneren Punkte nimmt jeweils um  $(q + 1)/2$  gegenüber der projektiven Ebene ab. Damit können wir die Anzahl der Punkte jeder Klasse leicht bestimmen. Wir fassen alle Ergebnisse im Folgenden in einer Tabelle zusammen.

Ebenen von gerader Ordnung  $q$ :

Die Schlitzgerade muss eine Passante sein, die den Knoten nicht enthält. Da wieder jede Tangente die Schlitzgerade trifft, durch jeden dieser Punkte jedoch genau eine Tangente verläuft, sind sämtliche  $q + 1$  Punkte der Schlitzgerade äußere Punkte. Damit vermindert sich deren Anzahl gegenüber der projektiven Ebene um  $q + 1$ .

Folgende Tabelle gibt die Verhältnisse wieder:

	Projektive Ebene		Affine Ebene	
	$q$ ungerade	$q$ gerade	$q$ ungerade	$q$ gerade
<b>Ovalpunkte</b>	$q + 1$	$q + 1$	$q + 1$	$q + 1$
<b>Äußere Punkte</b>	$\frac{q \cdot (q + 1)}{2}$	$q^2$	$\frac{q^2 - 1}{2}$	$q^2 - q - 1$
<b>Innere Punkte</b>	$\frac{q \cdot (q - 1)}{2}$	0	$\frac{q^2 - 2q - 1}{2}$	0
<b>Summe</b>	$q^2 + q + 1$	$q^2 + q + 1$	$q^2$	$q^2$

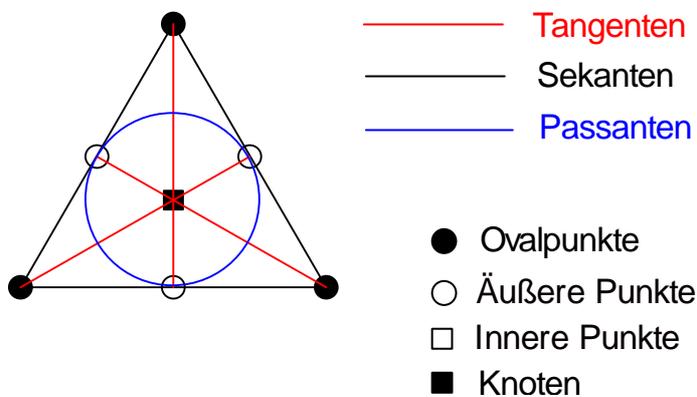
Wir schließen das Kapitel ab, indem wir im Rahmen von Aufgaben verschiedene weiterführende Fragestellungen im Umfeld der Ovale anreißen und so zu eigenem Forschen anregen.

**Aufgabe 5:**

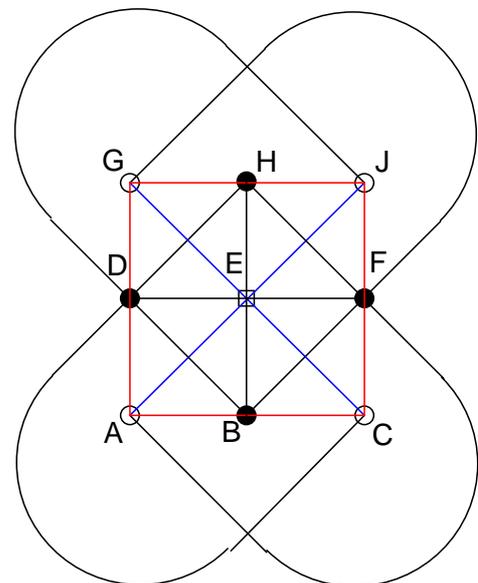
- a) Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Punkte der verschiedenen Sorten (innere, äußere, Ovalpunkte), die auf den verschiedenen Sorten von Geraden (Tangente,

- Sekante, Passante) liegen sowohl für affine als auch für projektive Ebenen von Ordnung  $q$ . Unterscheiden Sie ungerades und gerades  $q$ .
- Bestimmen Sie umgekehrt zu jeder Sorte von Punkten die Anzahl der Geraden jeder Sorte, die mit ihm inzidieren. Unterscheiden Sie wieder verschiedene Fälle. Fassen Sie Ihre Ergebnisse jeweils in geeigneten Tabellen zusammen.
  - Geben Sie ausgehend von Satz 1 die Anzahl aller Passanten eines gegebenen Ovals in einer affinen und in einer projektiven Ebene an.
  - Zeigen Sie: In der affinen Ebene ungerader Ordnung gibt es zu jeder Tangente eine dazu parallele Tangente.
  - Zeigen Sie, dass es in den projektiven Ebenen der Ordnungen 2 bzw. 3 bzw. 4 genau 28 bzw. 234 bzw. 1008 verschiedene Ovale gibt.
  - Zeigen Sie nun allgemein, dass die Anzahl der verschiedenen Ovale in einer projektiven Ebene der Ordnung  $q$  genau  $(q^2 + q + 1) \cdot (q - 1) \cdot q^2$  beträgt.
  - Bestimmen Sie ebenso die Anzahl aller verschiedenen Ovale in einer affinen Ebene der Ordnung  $q$ .

Bevor wir dieses Kapitel mit zwei auch ästhetisch ansprechenden Figuren – Ovalen in den Ebenen der Ordnungen 2 und 3 – abschließen, wollen wir noch die Bemerkung machen, dass in den affinen Koordinatenebenen ungerader Ordnung jedes Oval eine algebraische Kurve zweiter Ordnung (also eine Verallgemeinerung eines „Kegelschnitts“) ist.



**Oval in der projektiven Minimalebene**



**Oval in der affinen Minimalebene**

## 4.5 Algebraisierbarkeit endlicher affiner Inzidenzebenen: Wie kommen die Zahlen in die Geometrie?

### a) Problemstellung

In der analytischen Geometrie geht man aus von einem Körper als Zahlbereich und baut darüber die affine Koordinatenebene auf: Punkte  $P$  sind Zahlenpaare  $(x; y)$ , Geraden  $g$  sind Tripel  $(a; b; c)$  jeweils mit Werten aus dem Körper. Inzidenz zwischen  $P$  und  $g$  liegt vor, wenn die Gleichung  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$  im Körper erfüllt ist. Man kann nun leicht zeigen, dass die so definierte Struktur (affine Koordinatenebene über dem Körper) die Axiome A1 bis A3 einer affinen Inzidenzebene erfüllt. Auf diese Weise kommt man ausgehend von einem algebraischen Gebilde (Körper) zu einer geometrischen Struktur (affine Inzidenzebene).

Man kann nun die Fragestellung umkehren:

*Kann man ausgehend von einer affinen Inzidenzebene durch geometrische Konstruktionen zu einem algebraischen Gebilde z.B. einem Körper gelangen?*

Dieser Frage soll im Folgenden nachgegangen werden.

Vorausgesetzt sei für das Folgende stets das Vorliegen einer affinen Inzidenzebene, in der die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal gelten. Welche Rolle diese selbst spielen und was passiert, wenn diese nicht gelten, soll im Verlauf der Untersuchungen herausgearbeitet werden.

Zur Erinnerung formulieren wir diese beiden fundamentalen Sätze der projektiven Geometrie noch einmal:

Satz von Desargues:

Liegen zwei Dreiecke so, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken kopunktal sind, so sind die Schnittpunkte entsprechender Seitengeraden der Dreiecke kollinear.

Satz von Pappus-Pascal:

Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich Gegenseitenpaare des Sechsecks in drei kollinearen Punkten.

### b) Addieren und Multiplizieren von Punkten in affinen Ebenen

Wie kann man von der Geometrie zum Rechnen kommen? Wir lassen uns von einfachen Vorstellungen in der reellen euklidischen Ebene leiten. Angenommen wir haben Punkte auf einer Geraden (z.B. der  $x$ -Achse) mit Koordinaten versehen. Wie können wir dann zwei Koordinaten bzw. die diesen entsprechenden Punkte addieren? Wir setzen einfach die entsprechenden Strecken aneinander:

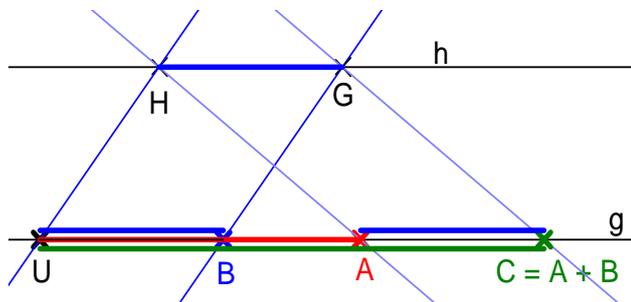


Wie kann man das aber in einer affinen Inzidenzebene bewerkstelligen, in der es keine Längenmessung gibt? Die Benutzung geeigneter Translationen macht die entsprechende Konstruktion möglich wie wir im Folgenden zeigen werden:

**Definition einer Addition für Punkte einer Geraden:**

Gegeben seien in einer affinen Inzidenzebene auf einer Geraden  $g$  die Punkte  $U$  (Ursprung oder Nullpunkt) sowie  $A$  und  $B$ . Wir wollen analog zu obigem Beispiel die Summe  $C = A + B$  konstruieren.

Dazu benötigen wir einen nicht auf dieser Geraden  $g$  liegenden Hilfspunkt  $H$  (dieser existiert nach A3 in jeder affinen Inzidenzebene). Wir zeichnen  $UH$  (existiert nach A1) und die Parallele  $h$  zu  $g$  durch  $H$  (existiert nach A2). Die Parallele zu  $UH$  durch  $B$  schneidet  $h$  in  $G$ . Damit haben wir  $HG$  durch Translation aus  $UB$  erhalten. Nun verschieben wir  $HG$  (als Repräsentant für die Koordinate  $B$ ) an das Ende von  $A$ . Dazu wird  $H$  mit  $A$  verbunden und die Parallele zu  $HA$  durch  $G$  gezeichnet. Diese schneidet  $g$  im Punkt  $C$ , den wir als die Summe von  $A$  und  $B$  festsetzen wollen:  $C = A + B$ .



Wir haben an die Strecke  $a$  (rot) die Strecke  $b$  (blau) angesetzt, d.h.  $b$  zu  $a$  hinzuaddiert, der aktive Summand ist also  $b$ .

Damit ist für die Punkte auf der Geraden  $g$  eine Addition definiert und wir müssen nur noch zeigen, dass sie die Eigenschaften hat, die man von der Addition in einem Körper erwartet. Wir stellen dies zunächst zurück und wenden uns der Multiplikation zu.

**Definition einer Multiplikation für Punkte einer Geraden:**

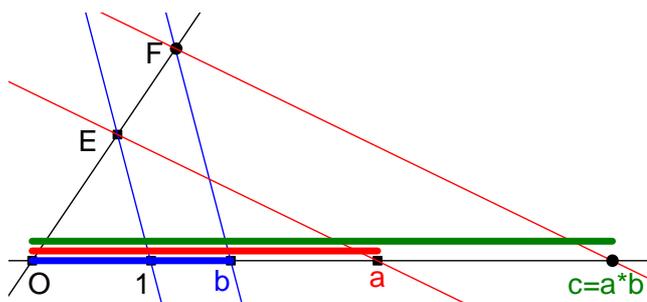
Wie lässt sich die Multiplikation geometrisch darstellen? Natürlich denkt man dabei sofort an zentrische Streckungen, bei denen Streckenlängen ver- $k$ -facht werden. Wir wollen  $a$  mit  $b$  als Multiplikator vervielfachen, d.h.  $b$  ist der aktive (Streck-) Faktor und  $a$  der, der gestreckt wird.

Nach den Strahlensätzen (blaue Parallelen) gilt

$$OE : OF = O1 : Ob = 1 : b.$$

Daher gilt wieder nach den Strahlensätzen mit den roten Parallelen:

$$Oa : Oc = a : c = 1 : b$$



und daraus erhalten wir  $c = a * b$ , wie gewünscht.

Genau die hier angegebene Konstruktion verwenden wir, um auf einer beliebigen Geraden  $g$  einer affinen Inzidenzebene, auf der allerdings der Nullpunkt  $0$  und der Einspunkt  $1$  gegeben sein müssen, eine Multiplikation einzuführen.

Alle angegebenen Konstruktionen sind in einer beliebigen affinen Ebene, in der es Translationen und Streckungen gibt, durchführbar, und wir müssen nur noch zeigen, dass diese Multiplikation die in einem Körper geforderten Eigenschaften hat: Die Elemente ohne die  $0$  müssen bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe mit Neutralelement  $1$  bilden, wobei die  $0$  absorbierendes Element ist und die Multiplikation muss mit der Addition verträglich sein, d.h. dass das Distributivgesetz gilt.

Bevor wir alle genannten notwendigen Eigenschaften nachweisen, wollen wir uns mit den Konstruktionen selbst vertraut machen und sie in affinen Ebenen durchführen:

### Aufgabe 1:

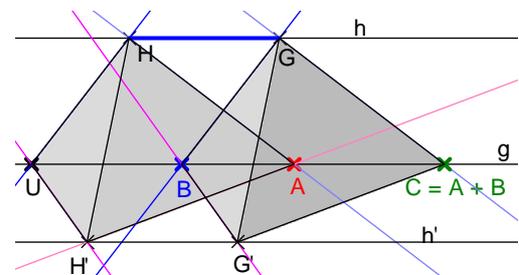
- Addieren Sie in der affinen Ebene der Ordnung 4 mit den Punkten  $O$ ,  $1$ ,  $A$  und  $B$  auf der  $x$ -Achse die Punkte  $A$  und  $B$ ,  $A$  und  $A$  (man wird über das Ergebnis staunen!) sowie  $1$  und  $A$  und  $O$  und  $A$  entsprechend der oben angegebenen Definition. Verwenden Sie je individuell irgendeinen beliebigen Hilfspunkt  $H$  (ob das gleichgültig ist, welchen man verwendet?). Ergebnisse? Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für diese Addition auf.
- Addieren Sie analog dazu in der Ebene der Ordnung 5 auf der  $x$ -Achse mit den Punkten  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  die Punkte  $C$  und  $D$ ,  $C$  und  $C$  sowie  $A$  und  $C$ . Kommentieren Sie die Ergebnisse. Stellen Sie eine Verknüpfungstafel auf.
- Multiplizieren Sie in den Ebenen der Ordnung 4 und der Ordnung 5 geeignete Punktpaare entsprechend obiger Konstruktion. Was besagen jeweils die Ergebnisse? Stellen Sie Verknüpfungstafeln für diese Multiplikation auf.

### c) Nachweis der Körpereigenschaften der Verknüpfungen

Wir haben geometrische Methoden zum Verknüpfen von Punkten eingeführt, die wir gerne als Addieren bzw. Multiplizieren bezeichnen würden. Dazu müssen wir jedoch noch einige Eigenschaften nachweisen.

Als erstes muss das Ergebnis einer Addition selbstverständlich unabhängig vom gewählten Hilfspunkt  $H$  sein bzw. anders ausgedrückt: Ein von  $H$  verschiedener anderer Hilfspunkt  $H'$  muss zum selben Ergebnis  $C = A + B$  führen. Wir untersuchen, ob diese Bedingung erfüllt ist an Hand der nachfolgenden Zeichnung:

Die Dreiecke  $UHH'$  und  $BGG'$  erfüllen nach Konstruktion die Voraussetzungen des Satzes von Desargues:  $UB$ ,  $HG$  und  $H'G'$  sind kopunktal im Fernpunkt von  $h$ , also in affiner Sicht zueinander parallel. Dann müssen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf Grund des Satzes von Desargues kollinear liegen. Da nach Konstruktion  $UH$  parallel  $BG$  und  $UH'$  parallel  $BG'$  ist, liegen die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten kollinear auf der Ferngeraden, d.h. es ist  $HH'$  parallel zu  $GG'$ .

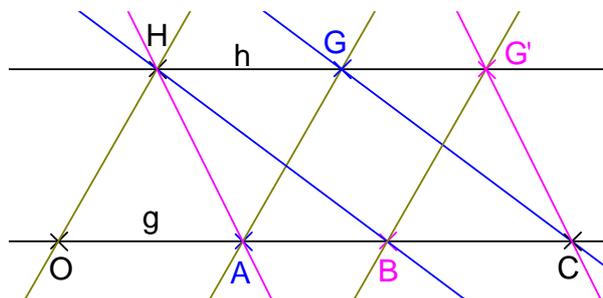


Nun verwenden wir den Satz von Desargues ein zweites Mal für die Dreiecke  $AHH'$  und  $CGG'$ .  $AC$ ,  $HG$  und  $H'G'$  sind parallel (kopunktal im Fernpunkt von  $h$ ). Weil sowohl  $HA$  und  $GC$  als auch  $HH'$  und  $GG'$  jeweils zueinander parallel sind, müssen auch  $H'A$  und  $CG'$  zueinander parallel sein, d.h. die Parallele zu  $H'A$  durch  $G'$  geht durch den Punkt  $C$  und damit ist die Unabhängigkeit vom Hilfspunkt gezeigt. Was wir dazu benötigen haben ist der **kleine Satz von Desargues in affiner Form**.

Als nächste Eigenschaft müssen wir die Assoziativität der Addition nachweisen, also die Eigenschaft  $(A + B) + C = A + (B + C)$  für beliebige  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf  $g$ . Dies gelingt ebenfalls mit Hilfe des kleinen Satzes von Desargues (siehe nachfolgende Aufgabe).

Wir zeigen als nächstes die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für die von uns definierte Addition von Punkten. Hierzu konstruieren wir unter Verwendung desselben Hilfspunktes  $H$  sowohl  $A + B$  als auch  $B + A$ .

Wir betrachten das Sechseck  $AHBG'CG$ . Es erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Pappus-Pascal, denn  $A, B$  und  $C$  liegen ebenso kollinear wie  $H, G'$  und  $G$  nach Konstruktion. Nun sind die Gegenseitenpaare  $HB$  und  $CG$  (blau) sowie  $BG'$  und  $AG$  (oliv) jeweils zueinander parallel, schneiden sich also jeweils in Fernpunkten. Daher müssen auch die Gegenseiten  $AH$  und  $G'C$  zueinander parallel sein und das heißt nichts anderes, als dass die Parallele zu  $AH$  durch  $G'$  ebenfalls durch den Punkt  $C$  verlaufen muss, also die beiden Konstruktionen zum selben Ergebnis  $C$  führen. Damit ist  $A + B = B + A$  und das **Kommutativgesetz für die Addition mit Hilfe der affinen Form des Satzes von Pappus-Pascal bewiesen.**



### Aufgabe 2:

Bestätigen Sie durch eine Zeichnung an einem Beispiel

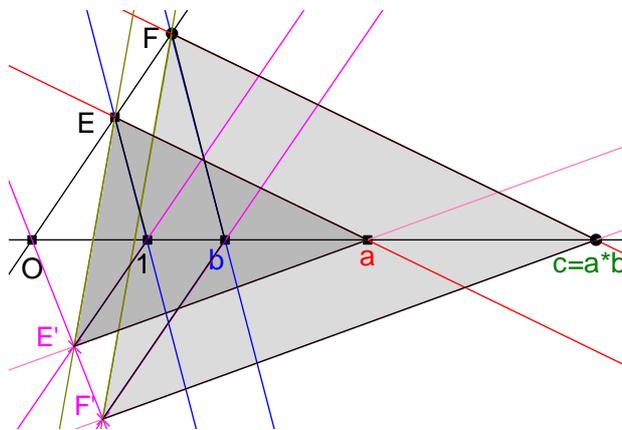
- die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Addition (zum Beweis benötigt man den kleinen Satz von Desargues),
- die Rolle der Null als Neutralelement sowie
- die Existenz eines inversen Elements zu einem gegebenen Element.

Damit haben wir alle notwendigen Eigenschaften gezeigt und wir können zu Recht behaupten, dass die von uns definierte Konstruktion eine Addition in einem Körper ist.

Wir wenden uns nun der Multiplikation zu und zeigen als erstes die Unabhängigkeit vom Hilfspunkt. Dazu brauchen wir den **großen Satz von Desargues**:

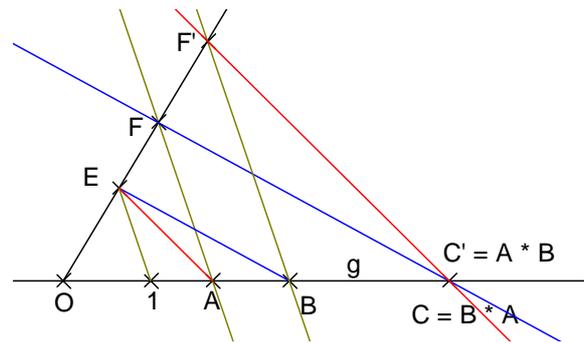
Die Dreiecke  $bFF'$  und  $1EE'$  erfüllen die Voraussetzung des Satzes von Desargues, denn die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken schneiden sich in  $O$ . Nun sind aber  $1E$  und  $bF$  ebenso wie  $1E'$  und  $bF'$  zueinander parallel. Daher ist nach dem großen Satz von Desargues  $EE'$  parallel zu  $FF'$ .

Nun betrachten wir die Dreiecke  $EE'a$  und  $FF'c$ , die ebenfalls die Voraussetzungen des großen Satzes von Desargues mit Schnittpunkt  $O$  erfüllen. Da nun  $EE'$  und  $FF'$  sowie  $Ea$  und  $Fc$  jeweils zueinander parallel sind, müssen auch  $E'a$  und  $F'c$  zueinander parallel sein, d. h. die Parallele zu  $E'a$  durch  $F'$  geht ebenfalls durch  $c$ .



Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für die Multiplikation mit Hilfe des Satzes von Pappus-Pascal:

Wir betrachten das Sechseck  $AFCF'BE$ , das die Voraussetzungen des Satzes von Pappus-Pascal erfüllt, denn  $A, C$  und  $B$  liegen ebenso kollinear wie  $F, F'$  und  $E$  nach Konstruktion. Nun sind die Gegenseitenpaare  $AF$  und  $F'B$  sowie  $FC$  und  $BE$  zueinander parallel, treffen sich also jeweils in einem Punkt der Ferngeraden, daher müssen sich auch  $CF'$  und  $AE$  in einem Punkt der Ferngeraden treffen, d. h. zueinander parallel sein. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als dass die Parallele zu  $AE$  durch  $F'$  ebenfalls durch den zuerst konstruierten Punkt  $C = A * B$  gehen muss und daher  $C = C'$  gilt.



Wir verzichten auf die detaillierte Ausführung der weiteren Eigenschaften und wollen diese nur an Beispielen durch Zeichnung bestätigen:

### Aufgabe 3:

Bestätigen Sie durch eine Zeichnung an einem Beispiel

- die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Multiplikation (zum Beweis benötigt man den großen Satz von Desargues).
- die Rolle des Punktes 1 als Neutralelement
- die Existenz eines inversen Elements zu einem gegebenen Element ( $\neq 0$ ).

Schließlich bleibt zum Nachweis des Vorliegens eines Körpers noch der Nachweis der Gültigkeit des Distributivgesetzes. Dieser Nachweis ist relativ aufwändig und erfordert die mehrfache Verwendung des Satzes von Desargues, weshalb wir hier auf ihn verzichten wollen.

Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

**In jeder affinen Ebene, in der die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal gelten, lassen sich für die Punkte auf einer Geraden eine geometrisch definierte Addition und Multiplikation einführen, die die Struktur eines algebraischen Körpers haben. Die Ebene lässt sich also durch einen algebraischen Körper koordinatisieren.**

### d) Aus- und Überblick

Die Konstruktion der affinen Koordinatenebene über einem Körper führte zu einer affinen Inzidenzebene, in der die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal gelten.

In Umkehrung dieses Weges haben wir nun gezeigt, dass bei gegebener affiner Inzidenzebene mit Desargues und Pappus-Pascal die Algebraisierung (Einführung von Koordinaten und Rechenoperationen mit diesen) auf dem oben beschriebenen Weg zu Koordinaten mit der algebraischen Struktur eines (kommutativen) Körpers führt.

Ein wichtiger Forschungsgegenstand im Bereich der Grundlagen der Geometrie im 20. Jhdt. war die Erforschung der Zusammenhänge zwischen geometrischen Eigenschaften bestimmter axiomatisch gekennzeichneten Ebenen und algebraischen Eigenschaften der entsprechenden algebraischen Gebilde. Dabei ist man neben Körpern auf neue, etwas allgemeinere Gebilde, wie etwa die Veblen-Wedderburn-Systeme oder Ternärkörper gestoßen.

Wir geben im Folgenden ohne Beweis einen kurzen Überblick über die logische Abhängigkeit der geometrischen Sätze von Desargues (D, d) bzw. Pappus-Pascal (P, p). Dabei bedeuten Großbuchstaben jeweils die große Form der Sätze, kleine Buchstaben die kleine Form. In einer nachfolgenden Tabelle stellen wir die Zusammenhänge zwischen affinen Ebenen und zugehörigen Koordinatenstrukturen dar:

Die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal hängen logisch in folgender Weise zusammen. Ein Pfeil von A nach B bedeutet „B lässt sich aus der Gültigkeit von A beweisen“:



Geltender Satz	Bezeichnung der affinen Ebene	Algebraische Struktur
Großer Satz von Pappus-Pascal	Pappus'sche Ebene	Körper
Großer Satz von Desargues	Desargues'sche Ebene	Schiefkörper
Kleiner Satz von Desargues	Translationsebene	Veblen-Wedderburn-System
Ohne Zusatzaxiom	Affine Ebene	Ternärkörper

Bis heute kennt man keine nichtdesarguessche Ebene von Primzahlordnung, alle bisher bekannten nichtdesarguesschen Ebenen haben als Ordnung eine echte Primzahlpotenz. Andererseits ist man nicht sicher, ob alle Ebenen von Primzahlordnung auch wirklich desarguessche Ebenen sind. Bis zur Ordnung 8 weiß man dies, denn dort gibt es zu jeder Ordnung nur jeweils höchstens eine Ebene. Natürlich weiß man auch, dass jede affine Koordinatenebene über einem Körper desarguessch ist, aber es könnte ja eine affine Ebene mit Primzahlordnung geben, die nicht desarguessch ist.

## 4.6 Affine Inzidenzebenen und Lateinische Quadrate

In diesem Kapitel behandeln wir einen überraschenden Zusammenhang zwischen zwei zunächst sehr verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, der erst vor relativ kurzer Zeit entdeckt worden ist. Das ursprünglich aufgeworfene Problem geht zurück auf einen der ganz großen Mathematiker, nämlich auf Leonhard Euler (1707 – 1783). Während seiner Zeit in Petersburg hat ihm Katharina die Große folgende Aufgabe gestellt, die als „**Eulersches Offiziersproblem**“ bekannt ist:

Zu einer Militärparade in St. Petersburg haben 6 verschiedene Regimenter je 6 Vertreter mit verschiedenen Dienstgraden entsandt. Diese sollten bei der Parade in einem Quadrat aufmarschieren und zwar so, dass in jeder der 6 Zeilen und jeder der 6 Spalten sowohl jeder Dienstgrad als auch jedes Regiment vertreten ist.

Der große Leonhard Euler ist an dieser Aufgabe gescheitert und er vermutete bereits im Jahr 1782, dass dies gar nicht möglich ist. Beweisen jedoch konnte er es nicht.

Wir wollen das Problem in vereinfachter Form bei kleineren Zahlen einmal genauer betrachten und zwar zunächst für den Fall  $n = 3$  und nur drei Dienstgrade aus einem Regiment so auf die 9 Felder des Quadrats verteilen, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Dienstgrad genau einmal vertreten ist. Dabei haben wir – wie es sich als Konvention herausgebildet hat – die Dienstgrade mit 0, 1 und 2 bezeichnet. Da diese ursprünglich mit lateinischen Buchstaben benannt wurden, hat sich für eine solche Konfiguration der Begriff „lateinisches Quadrat“ herausgebildet. Wir haben bei den folgenden Figuren A und B zwei verschiedene derartige Quadrate dargestellt.

2	0	1
1	2	0
0	1	2

A

1	2	0
2	0	1
0	1	2

B

0	1	2
2	0	1
1	2	0

C

2	0	0	1	1	2
1	2	2	0	0	1
0	1	1	2	2	0

D

1	0	2	1	0	2
2	2	0	0	1	1
0	1	1	2	2	0

E

### Aufgabe 1:

- Erstellen Sie je ein lateinisches Quadrat für die Anzahlen  $n = 2$  bzw.  $n = 4$  und  $n = 5$ . Wählen Sie jeweils in der unteren Zeile die Anordnung der Ziffern aufsteigend wie in den Beispielen A und B („normierte“ Anordnung).
- Wie viele verschiedene „normierte“ lateinische Quadrate mit Ordnung  $n = 3$  gibt es? Probieren Sie dies aus.

Solche lateinischen Quadrate kommen unter anderem bei den Verknüpfungstabellen endlicher Gruppen vor. Man findet sie auch oft in der Versuchsplanung etwa bei landwirtschaftlichen Pflanzversuchen, bei denen man die Einflüsse verschiedener Bodenbeschaffenheit, verschiedener Besonnung oder Windeinflüsse ausgleichen will und deshalb dafür sorgt, dass jede Pflanzensorte in jedem Bodenstreifen vorkommt.

Nun kann man noch zusätzlich zu den Pflanzensorten 0, 1 und 2 drei verschiedene Dünger untersuchen, die wir ebenfalls mit 0, 1 und 2 bezeichnen wollen, jedoch farblich unterscheiden. Selbstverständlich wollen wir auch die drei Düngersorten so auf die 9 Felder verteilen, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jede Düngersorte genau einmal

vorkommt. Wir müssen also auch die drei Düngersorten in Form eines lateinischen Quadrates anordnen. Dies haben wir – allerdings in nicht normierter Form – im obigen Beispiel C getan.

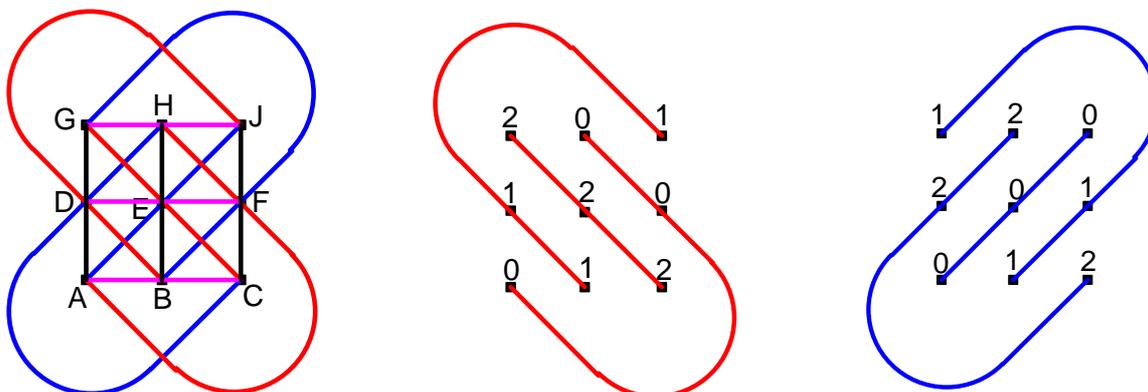
Wenn wir nun Pflanzensorten mit Düngersorten kombinieren, so erhalten wir für die obigen beiden Anordnungen A und B der Pflanzen mit der hier gegebenen Düngeranordnung C die zwei Kombinationen D (A mit C) und E (B mit C).

Diese weisen nun einen ganz fundamentalen Unterschied auf. Während in der zweiten Kombination E *jede der drei Pflanzensorten mit jeder der drei Düngersorten* kombiniert ist (d. h. jede schwarze Ziffer mit jeder roten Ziffer in einem gemeinsamen Feld vorkommt), ist dies der ersten Kombination D nicht der Fall. Dort kommt die Kombination **0 0** gar nicht, dagegen die Kombination **2 0** sogar dreimal vor. Man sagt, im zweiten Fall seien die beiden lateinischen Quadrate zueinander „orthogonal“ im zweiten Fall dagegen nicht.

### Aufgabe 2:

Kombinieren Sie die beiden zuerst angegebenen lateinischen Quadrate A und B miteinander und überprüfen Sie, ob diese zueinander „orthogonal“ sind.

Bevor wir die lateinischen Quadrate etwas systematischer behandeln, wollen wir den Zusammenhang mit affinen Inzidenzebenen aufzeigen. Dazu betrachten wir die affine Koordinatenebene der Ordnung  $q = 3$  über dem Restklassenkörper  $K = \{0, 1, 2\}$  modulo 3. Die Punkte der Ebene bilden die Zellen eines Quadrats mit  $3 \times 3$  Feldern. Wir nummerieren nun die Geraden der beiden von den Achsen verschiedenen Parallelscharen jeweils mit 0, 1 und 2 durch entsprechend den x-Koordinaten der Punkte A, B und C in der unteren Reihe.



Man sieht sofort, dass man genau die beiden oben dargestellten „normierten“ und zueinander „orthogonalen“ lateinischen Quadrate A und B der Ordnung 3 erhält.

### Aufgabe 3:

Gegeben sind die drei von den Achsenrichtungen verschiedenen Parallelscharen der affinen Ebene der Ordnung 4 gemäß (siehe in Kapitel 2.3 Abschnitt c)).

- Erstellen Sie zu jeder Schar ein lateinisches Quadrat gemäß der dargestellten Methode, indem sie die Geraden jeder Schar entsprechend der genannten Vorschrift nummerieren.

- b) Überprüfen Sie, ob jedes der entstehenden Quadrate die Forderung an ein lateinisches Quadrat erfüllt.  
Durch welche geometrische Eigenschaft der affinen Ebene ist dies gesichert?
- c) Bestätigen Sie, dass von den drei erzeugten lateinischen Quadraten *je zwei zueinander orthogonal* sind, indem sie je zwei miteinander kombinieren.  
Durch welche geometrische Eigenschaft der affinen Ebene ist dies gesichert?

Nachdem wir nun einige elementare Vorstellungen von lateinischen Quadraten ausgebildet haben, wollen wir die Begriffe verschärfen:

**Definition:**

Gegeben ist die Menge  $K = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  von  $n$  Zahlen.

Ein **lateinisches Quadrat der Ordnung  $n$**  ist eine Abbildung  $Q$  von  $K \times K$  in  $K$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Aus  $Q(a; x) = Q(a; y)$  folgt  $x = y$   
 (2) Aus  $Q(x; b) = Q(y; b)$  folgt  $x = y$ .

Zwei Quadrate  $Q$  und  $Q'$  der Ordnung  $n$  heißen **zueinander orthogonal**, falls die folgende Abbildung  $f$  bijektiv von  $K \times K$  auf  $K \times K$  ist:  $f(x; y) = (Q(x; y); Q'(x; y))$ .

Hinweis:

Wegen der Endlichkeit von  $K \times K$  ist  $f$  schon dann bijektiv, wenn  $f$  injektiv oder surjektiv ist.

Zunächst sieht man leicht ein, dass man bei einem gegebenen lateinischen Quadrat zwei Zeilen oder zwei Spalten miteinander vertauschen kann, ohne dass die Eigenschaft eines lateinischen Quadrats verloren geht. Diese Eigenschaft ermöglicht es uns, die lateinischen Quadrate zu normieren:

Ein lateinisches Quadrat  $Q$  heißt **normiert**, wenn für alle  $x \in K$  gilt:  $Q(x; 0) = x$ .

Dies bedeutet nichts anderes als dass in der unteren Zeile die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge stehen.

Wir sind bisher in unseren Beispielen von affinen Ebenen der Ordnung  $q$  ausgegangen und haben dazu für die  $q - 1$  von den Achsenrichtungen verschiedenen Parallelscharen je ein lateinisches Quadrat erzeugt. Es hat sich herausgestellt, dass diese so erzeugten  $q - 1$  lateinischen Quadrate der Ordnung  $q$  jeweils paarweise zueinander orthogonal waren. Man hat also jeweils ein System von  $q - 1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  erhalten. Es erhebt sich die Frage, ob man dieses System noch erweitern kann, also ob es dazu noch weitere normierte und zu jedem orthogonale Quadrate gibt. Weiter kann man nach dem umgekehrten Weg fragen: Lässt sich aus vorgegebenen  $q - 1$  normierten paarweise zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  eine affine Ebene der Ordnung  $q$  konstruieren? Dies wollen wir nun am Beispiel  $q = 5$  verfolgen:

**Aufgabe 4:**

Gegeben sind vier normierte lateinische Quadrate der Ordnung 5.

- Zeigen Sie, dass diese 4 Quadrate paarweise zueinander orthogonal sind.
- Erzeugen Sie zu jedem der 4 Quadrate eine Parallelenschar von Geraden, indem sie jeweils die Felder mit gleicher Nummer zu einer Gerade zusammenfassen.
- Weisen Sie (z. B. durch Berechnung) nach, dass nach Hinzunahme der beiden achsenparallelen Scharen genau die affine Koordinatenebene der Ordnung 5 entsteht.

1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4

4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0
0	1	2	3	4

3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1
0	1	2	3	4

2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2
0	1	2	3	4

Wir werden nun zeigen, dass ein System von paarweise zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  höchstens  $q - 1$  Elemente haben kann. Falls ein solches System existiert, nennt man es ein **vollständiges System paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung  $q$** .

Es sei ein System  $S = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}$  von  $n$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  gegeben.

- Als erstes machen wir uns klar, dass die Vertauschung (Transposition) zweier Elemente an allen Stellen eines bestimmten Quadrats, an denen diese vorkommen, weder die Eigenschaft lateinisch zu sein verändert, noch die Eigenschaft der Orthogonalität zu jedem anderen Quadrat im System verletzt. Unter Anwendung dieser Eigenschaft können wir erreichen, dass sämtliche unserer  $n$  Quadrate des Systems nach der unteren Zeile normiert sind, also dort die Nummern  $0, 1, \dots, q - 1$  in aufsteigender Reihenfolge enthalten.
- Nun betrachten wir in jedem der  $n$  Quadrate das Feld mit den Koordinaten  $(0; 1)$ , also das erste Feld in der zweiten Zeile von unten. In diesem Feld kann in keinem der Quadrate eine 0 stehen (denn diese steht schon im Feld darunter). Außerdem kann die dort stehende Ziffer in keinen zwei der  $n$  Quadrate dieselbe sein. Wäre sie nämlich in zweien gleich z. B. jeweils 1, dann käme das Paar  $(1; 1)$  in der Kombination dieser beiden Quadrate nicht nur an zweiter Stelle in der unteren Zeile vor, sondern auch an der ersten Stelle der zweiten Zeile, also zweimal. Dann kann aber ein anderes der  $q \cdot q$  möglichen Paare überhaupt nicht vorkommen, was ein Widerspruch zur paarweisen Orthogonalität wäre. Im Feld mit den Koordinaten  $(0; 1)$  muss also in jedem der Quadrate eine andere Zahl stehen, wobei die 0 nicht vorkommen darf. Damit gibt es jedoch nur noch  $q - 1$  Möglichkeiten und das System kann höchstens  $n = q - 1$  verschiedene Quadrate enthalten. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz über die Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate:**

**Ein System von paarweise zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  kann höchstens  $q - 1$  verschiedene Quadrate enthalten.**

In Verallgemeinerung der bei Aufgabe 4 verfolgten Idee kann man beweisen, dass man zu jedem vollständigen System von  $q - 1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$  konstruieren kann. Umgekehrt lässt sich durch Verallgemeinerung der Idee aus Aufgaben 3 zeigen, dass man aus jeder affinen Inzidenzebene der Ordnung  $q$  ein vollständiges System von  $q - 1$  paarweise zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  erzeugen kann. Wir wollen hier auf die detaillierte Ausformulierung der entsprechenden Beweise verzichten und nur das Ergebnis formulieren:

**Es gibt genau dann eine affine Inzidenzebene der Ordnung  $q$ , wenn es ein vollständiges System von  $q - 1$  paarweise zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $q$  gibt.**

Vollständige Systeme orthogonaler lateinischer Quadrate und affiner Ebenen haben sich also als äquivalent herausgestellt und damit ist eine interessante Brücke zwischen der endlichen Geometrie und der Kombinatorik gefunden. Der genannte Satz geht zurück auf den Mathematiker Bose, der ihn im Jahre 1938 gefunden hat und beweisen konnte. Schon davor konnte der französische Mathematiker Tarry im Jahr 1900 die von Euler aufgestellte Vermutung beweisen, dass es keine zwei zueinander orthogonalen lateinischen Quadrate der Ordnung 6 gibt.

Euler hatte sogar vermutet, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$ , die bei Division durch 4 den Rest 2 lassen, keine zwei zueinander orthogonalen lateinischen Quadrate dieser Ordnung  $n$  existieren. Diese Vermutung konnte jedoch im Jahre 1959 von Bose, Parker und Shrikhande widerlegt werden, die sowohl zur Ordnung  $n = 10$  als auch zur Ordnung  $n = 22$  jeweils zwei solche Quadrate konstruieren konnten – damals noch ohne jegliche Computerhilfe. Man weiß heute sogar, dass es – außer für  $n = 2$  und  $n = 6$  – für alle natürlichen Zahlen  $n$  zwei zueinander orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  gibt. Welch eigenartiger Zufall: Genau für die (fast) einzige Zahl  $n = 6$ , für die es keine Lösung gibt, wurde das Problem ursprünglich als Eulers Offiziersproblem im Jahre 1782 formuliert.

Bis heute weiß man jedoch noch nicht, ob es eine affine Ebene der Ordnung 10 gibt. Außer den beiden von Bose u. a. konstruierten orthogonalen Quadraten der Ordnung 10 kennt man kein drittes. Man konnte aber auch noch nicht zeigen, dass es kein Maximalsystem von 9 solchen geben kann. Da man umgekehrt weiß, dass es für jede Primzahlpotenz  $q = p^n$  eine affine Ebene der Ordnung  $q$  gibt (es gibt einen Körper mit  $q$  Elementen!), weiß man auch, dass es für solche Werte  $q$  jeweils auch ein vollständiges System paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung  $q$  gibt.

Ein wesentlicher Fortschritt in dieser Frage ist der **Satz von Bruck und Ryser** (1949):

Hat  $q$  bei Division durch 4 den Rest 1 oder den Rest 2 und ist  $q$  nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, dann gibt es keine affine Ebene der Ordnung  $q$ .

Damit gibt es keine affine Ebene der Ordnung 6, das Problem für 10 bleibt jedoch weiter ungelöst ebenso wie die Frage, ob es Ebenen mit Ordnung gibt, die keine Primzahlpotenz ist.

### Literaturauswahl zur Endlichen Geometrie

1. Beutelspacher A.; Einführung in die Endliche Geometrie. Bd. 1 bis 3.
2. Beutelspacher, A./Rosenbaum, U.; Projektive Geometrie. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen. Vieweg 1992.
3. Beutelspacher, A.; Pasta all'infinito. München 1999.
4. Botsch, O.; G 45/ Eine Geometrie mit 45 Punkten. Frankfurt 1977.
5. Botsch, O.; Spiel mit Zahlquadraten. Frankfurt 1967
6. Courant, R./Robbins, H.; Was ist Mathematik? Springer 1973.
7. Coxeter, H.S.M./Greitzer, S.L.; Zeitlose Geometrie. Stuttgart 1983
8. Coxeter, H.S.M.; Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser 1963.
9. Degen W./Profke, L.; Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie. Stuttgart 1976.
10. Degen W./Profke, L.; Von der affinen zur euklidischen Geometrie mit Hilfe einer Orthogonalitätsrelation. In: MU 22; Jg. 1976, Heft 4
11. Dembowski, P.; Endliche Geometrien.  
In: Math.-Phys. Semesterberichte XIII; 1966, S. 32ff.
12. Dembowski, P.; Kombinatorik; Mannheim 1970
13. Dembowski, P.; Finite geometries. Berlin-Heidelberg 1968.
14. Dembowski, P.; Kombinatorik. Mannheim 1970
15. Dembowski, P.; Kombinatorische Eigenschaften endlicher Inzidenzstrukturen.  
In: Math. Z. 75; 256 – 270 (1961).
16. Fraedrich, A.M.; Axiomatisches Arbeiten in der Sekundarstufe II am Beispiel der endlichen Geometrie. In: Did. d. Math.; Jg. 5; 1977; Heft 2.
17. Fraedrich, A.M.; Wie findet man einen mathematischen Satz?  
In: Math.-Phys. Semesterberichte, XXIV, 1977, H2.
18. Franke W./Schönwald K.; Ebene Inzidenzgeometrie. Math. Arbeitshefte. Klett.
19. Hohler, P.; Inzidenzgeometrie. Zürich 1977.
20. Jacobs, K.; Einführung in die Kombinatorik; New York 1983
21. Karteszi, F.; Introduction to Finite Geometries. Amsterdam u. Oxford, 1976.
22. Karzel, H./Sörensen, K./Windelberg, D.; Einführung in die Geometrie. Göttingen 1973.
23. Kirsch, A./Zech F.; Affine Geometrie der Ebene. Stuttgart 1974.
24. Krauter, S.; Erlebnis Elementargeometrie. München 2005.
25. Kunz, E.; Ebene Geometrie. Grundlagen der Geometrie. Hamburg 1976.
26. Lingenberg, R.; Grundlagen der Geometrie. Zürich 1973 (3. Auflage)
27. Mitschka, A.; Axiomatik in der Geometrie. Freiburg 1977.

28. Pickert, G.; Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt 1968.
29. Pickert, G.; Einführung in die endliche Geometrie. Stuttgart 1974.
30. Quaisser, E.; Diskrete Geometrie. Spektrum 1994.
31. Schulz, R. H.; Orthogonalitätsrelationen in affinen Ebenen, insbesondere endlichen affinen Ebenen der Charakteristik 2.  
In: Math.-Sem.-berichte XXVIII, 1981, Heft 2; S. 230 – 244.
32. Schulz, Ralph Hardo; Geometrie über  $GF(4)$ .  
In: Math.-Phys. Sem.-berichte XXII; 1975; Heft 22; S. 158-184.
33. Schupp, H.; Mühlegeometrie – Ein Lernprogramm. Paderborn 1974
34. Schuster, H.; Ebene Inzidenzgeometrie. Stuttgart o.J.
35. Siemon, H.; Kollineationsgruppen in der 9-Punkte-Ebene.  
In: MU 23; 1977; Heft 6.
36. Siemon, H.; Zur Kongruenzgeometrie in endlichen affinen Ebenen über Galoisfeldern. In: Math.-Sem.-berichte XXIX, 1982, Heft 2.
37. Stilwell, J.; Numbers and Geometry. Springer New York 1998.
38. Ulshöfer, K.; Ein Ergänzungsvorschlag zum Wahlgebiet „Endliche Geometrie“. In: Lehren und Lernen 1976, Heft 12.
39. Walter, H.; Die 7-Punkte-Ebene und ihre Automorphismengruppe.  
In: MU 16 (4), 1970.
40. Wittmann, E.; Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig 1987.
41. Wode, D.; Endliche Geometrie im Gymnasialunterricht. In: MNU Jg. 25, 1972, Heft 5, S. 283 – 288.
42. Zeitler, H.; Abbildungen affiner Inzidenzebenen. In: MU 16 (4), 1970.
43. Zeitler, H.; Axiomatische Geometrie. München 1972.
44. Zeitler, H.; Der Mathematikunterricht (MU); Jg. 16; 1970; Heft 4.
45. Zeitler, H.; Hyperbolische Geometrie. BSV München 1970.
46. Zeitler, H.; Inzidenzgeometrie. München 1973.
47. Zeitler, H.; Über Ovale in endlichen Ebenen;  
In: Math.-Phys. Sem.-berichte XVIII; Jg. 1971; S. 68 – 86.