Fachdidaktische Beiträge

zum Thema

I. Bruchrechnung

und

II. Rationale Zahlen

Prof. Siegfried Krauter

Version 01/2008

Vorwort des Autors

Warum und wozu denn noch ein fachdidaktischer Beitrag zum Thema Bruchrechnung, wo sich doch die Bemühungen gerade um die Bruchrechnung seit Jahrzehnten im Unterricht als erstaunlich wenig erfolgreich erwiesen haben?

„Gerade deshalb" möchte ich darauf antworten.

Mein Anliegen ist bescheiden. Auf keinen Fall möchte ich Werken wie etwa der grundlegenden und wissenschaftlich fundierten „Didaktik der Bruchrechnung" von Friedhelm Padberg Konkurrenz machen. Im Gegenteil, ich halte das Studium gerade dieses hervorragenden Werkes für jemandem, der sich kundig machen will, für unverzichtbar. Der hier vorgelegte Beitrag ist nicht wissenschaftlich begründet, sondern orientiert sich viel mehr am Ziel der konkreten Arbeit im Unterricht. Daher werden vor allem nützliche und brauchbare Hinweise und Arbeitshilfen für die Praxis, die sich vielfach bewährt haben, dargestellt und angeboten. Auch erlaube ich mir den Verzicht auf Vollständigkeit und gebe für die Behandlung eines bestimmten Sachverhalts meist nur *einen* Weg an, den ich aus langjähriger Erfahrung für gangbar und erfolgversprechend halte. Damit will ich auf keinen Fall aussagen, dass dies der beste oder gar der einzige sei. Mein Beitrag richtet sich daher vor allem an Studierende und Anfänger des Lehramts, um ihnen eine gewisse Hilfe und etwas Sicherheit beim Start zu vermitteln.

Drei besondere Anliegen möchte ich jedoch betonen, die den Tenor meines Beitrags ausmachen:

- ***Man muss die unterrichtlichen Ziele in der Bruchrechnung heruntersetzen.*** Wir benötigen eigentlich gar keine Bruchrechnung! Es genügt ein grundlegendes Verständnis für den Bruchbegriff. Wer benötigt - außer in der Schule - im täglichen Leben wirkliches Bruch*rechnen*?
- ***Ohne fundierte sach- und handlungsbezogene Grundlagen ist der Misserfolg beim Unterricht im Bruchrechnen garantiert!*** Ich will zur Begründung dieser These nur eine einzige langjährige Erfahrung anführen: Wenn ich in einer Klasse nach Behandlung der Bruchrechnung die Aufgabe „30 : ½" stelle, ist die Fehlerhäufigkeit außerordentlich hoch. Wenn ich jedoch die Frage stelle, wie viele „Halbe" man aus einem 30-Liter-Bierfass ausschenken kann, dann ist die Erfolgsquote sogar schon *vor* Behandlung des Bruchrechnens außerordentlich hoch. Wie kann das zusammenpassen? Das darf uns nicht gleichgültig sein, sofern wir Mathematik nicht esoterisch und abgehoben - und damit „sinnlos" - unterrichten wollen.
- ***Bruchrechnen ist eine Aufgabe der ganzen Schulzeit und kein einmaliger isolierter Block in Klasse 6.*** Spätestens in Klasse 5 müssen bei der Behandlung der Größenarten konkrete Brüche in Form einfacher Maßzahlen auftreten: ½ m, ¾ h, 1/8 Liter, … Ebenso darf nach Klasse 6 der Bruchbegriff nicht vollständig aus dem Blick verschwinden. So ist es nicht sinnvoll nur noch den Dreisatz zu verwenden, *die* Methode schlechthin, um das Bruchrechnen zu vermeiden. Ebenfalls ist eine vollständige Beschränkung nur noch auf Dezimalform z. B. in Form der Prozentrechnung zu vermeiden. Einfache Brüche müssen auch nach Klasse 6 im Unterricht vorkommen.

Ich wünsche allen Lesern Freude und Erfolg beim Unterricht.

Inhaltsverzeichnis

I. Bruchrechnen

II. Positive und negative rationale Zahlen

1. Grundvorstellungen und Modelle

Grundsätzlich werden das *Größenkonzept* und das *Operatorkonzept* in den Vordergrund gestellt. Man sollte diese beiden Konzepte von allem Anfang an zusammen behandeln und im Bruchbegriff grundlegend verankern - schon bei der Erzeugung:

Wie kommt man zu einer Größenangabe mit einer Bruchzahl als Maßzahl?

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\;:\,n\;} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\,\mathbf{E} \xrightarrow{\;\bullet\, z\;} \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}\,\mathbf{E}$$

- Einheit E (Ganzes) teilen in n gleichgroße Teile zu je 1/n von E.
- Von diesen Teilen z Stück nehmen: $\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}\,\mathbf{E}$.

Vorsicht vor der zu starken Betonung „*Teil* eines Ganzen“, es bewirkt eine zu starke Einengung auf *echte* Brüche (< 1). Das muss nicht sein, man kann sofort auch unechte Brüche betrachten. Besser wäre „Verhältnis zu einem Ganzen“.

Ein Bruch kann nie durch ***eine*** Größe allein dargestellt werden. Ein Bruch beschreibt stets ein *Verhältnis zwischen zwei Größen (ratio = Verhältnis).*
Bei einer Maßzahlangabe ist der Verzicht auf eine zweite Größe nur scheinbar, denn man hat immer die Einheit zusätzlich dazu zu denken. „¾ m“ bedeutet „3/4 von 1 m“. Beachtet man diesen Grundsatz, so wird man auch eine gute Grundlage und Vorbereitung für die späteren Anwendungen der Bruchrechnung z. B. beim Prozentrechnen (Grundwert, Einheit, Ausgangswert, Bezugswert, Basisgröße, etc.) gewinnen.

Beispiel:

Ein Dreiviertelkreis kann sowohl für den Bruch ¾ stehen, wenn man vom Vollkreis als Einheit ausgeht, aber ebenso für den Bruch 3/2, wenn man von einem Halbkreis als Einheit ausgeht.

Besonders problematisch ist die Vorstellung vom Bruch als *„Teil mehrerer Ganzer“.*
Sie repräsentiert eigentlich nur Stammbrüche und trägt grundsätzlich nichts zur Begriffsbildung bei: Was ist der Unterschied von „7 kg : 5“ und 7/5 kg bei dieser Auffassung?

Untersuchungen haben gezeigt, dass man ohne wesentliche Einbußen bei Verständnis und Kompetenz auf diese Auffassung als „Teil mehrerr Ganzer“ (2. Grundvorstellung) verzichten kann.

Zusammenfassung:

Größenaspekt und Operatoraspekt hängen untrennbar miteinander zusammen, wenn man sich jede Größenangabe aus der Einheit gemäß obiger Vorstellung (Teilen in n gleiche Teile, Vervielfachen mit z) erzeugt denkt.

2. Aktivitäten zur grundlegenden Begriffsbildung

Notwendig (im direkten Wortsinn) und daher unerlässlich sind Arbeiten in den üblichen Größenbereichen: ***Erzeugen von einfachen konkreten Brüchen***.

Bei gegebener Ausgangsgröße erzeugt man: Halbe, Viertel, Achtel.
Drittel, Sechstel, Zwölftel. Fünftel, Zehntel, Zwanzigstel, Hundertstel.

Als Ausgangsgrößen dienen konkrete Brüche (physikalisch real gegeben):

- Eine bestimmte Flüssigkeitsmenge (nicht unbedingt 1 Liter, z. B. 1 voller „Normbecher“)
- Eine bestimmte Stoffmasse (z. B. Sand, weil leicht aufteilbar)
- Eine gewisse Zeitspanne z. B. 1 Stunde (taugt für Nennerfamilie 60 und seine Teiler) oder 1 Minute
- Eine gewisse Streckenlänge (Streckenteilung z. B. mit Linienblatt vornehmen)
- Ein gewisser Geldbetrag z. B. 100 € (geeignet für Nennerfamilie von 100)
- Ein gewisses Flächenstück, z. B. ein Rechteck (Teilungen wie bei Strecken) auf Karoraster (wegen der Möglichkeit zur Teilung)

...

Eine sehr sinnvolle Vorübung ist das ***Herstellen von Bruchstreifen***. Schritt für Schritt wird die Einheitsstrecke von z. B. 240 mm (geht auf DIN-A4-Blatt) eingeteilt in gleiche Teile für die verschiedenen Bruchfamilien:

- Halbe, Viertel, Achtel, Sechzehntel. Mit diesen werden Erfahrungen und Beziehungen untereinander erarbeitet. Keine Regeln! (Siehe folgende Seiten).
- Dann folgt z. B. die Drittelfamilie: Drittel, Sechstel, Zwölftel, Vierundzwanzigstel, Auch mit diesen werden die Erfahrungen der vorigen Familie gemacht und vertieft: Vergleichen, Ordnen, Addieren, Subtrahieren, Größenabschätzungen, gegenseitiges Ausmessen (also Dividieren!) etc.
- Dann folgt die Familie der Fünftel, Zehntel, Fünfzehntel, Zwanzigstel, Dreißigstel, Sechzigstel. (Hinweis: Dafür ist z. B. ein *Ziffernblatt mit 60-min-Teilung* geeignet oder aber der Vollwinkel mit 360°-Teilung).
- Danach alle im Zusammenspiel (Vorkommen können nun als Nenner alle Teiler des Nenners 240).

Ziel:

Grundlegendes Verständnis für die *Bruchherstellung*, die *Größenordnung* einer Bruchangabe und Ersterfahrungen zum Vergleichen, Addieren, Subtrahieren, Vervielfachen und Ausmessen (Dividieren). *Auf keinen Fall Erarbeitung von Regeln!*

In ähnlicher Weise können Schüler ***Bruchquadrate*** herstellen. Das sind Dezimeterquadrate, die in gleichbreite Streifen (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) eingeteilt sind. Vorteilhaft ist es, mindestens je ein Exemplar von jeder Sorte in transparenter Form (dicke Folie) zur Verfügung zu haben, damit man sie paarweise kreuzen kann (s.u.).

3. Informeller regelfreier Vorkurs. Grunderfahrungen.

Für einen solchen Vorkurs bietet sich ganz besonders die Arbeit mit **Bruchstreifen** bzw. am **Kreismodell** an. Die Bruchstreifen können durchaus auch einmal vertikal angeordnet sein und z. B. die Form eines Litermaßes annehmen (siehe z. B. in 6.4)

1. Zunächst halte ich es für wesentlich, dass jeder Schüler diese Streifen bzw. entsprechende Kreisteilungen *selbst herstellt*. Der Herstellungsakt selbst ist wesentlicher Bestandteil des Lernprozesses – auch wenn das Ergebnis nicht die Perfektion der computererzeugten Streifen hat. Notfalls kann man eine verbesserte zweite Version machen lassen oder die Ausführung schrittweise von Bruchfamilie zu Bruchfamilie verbessern.
2. Geeignet ist eine Länge von 240 mm (notfalls auch 120 mm) für die Einheit. Festes weißes Papier, Karton oder Pappstreifen sind besser als normales Papier. Jeder Streifen sollte mittig längs geteilt werden, damit man zwei Exemplare hat: eines zum gegenseitigen Anlegen von unten und eines zum Anlegen von oben her.
3. So etwa könnte ich mir den Einsatz vorstellen:

- Zunächst lässt man die Schüler die Streifen für Halbe, Viertel, Achtel [evtl. auch noch Sechzehntel] herstellen. Als Zielvorstellung wird ein fertiges Modell vorab gezeigt (siehe Anhang 1 Hilfsmittel).
- Dann werden dazu Reflexionen und Fragen überlegt und notiert: Was haben wir denn bei der Herstellung z. B. des Halbe-Streifens gemacht?
- Die Einheitsstrecke 1 wurde in zwei gleiche Teile geteilt:

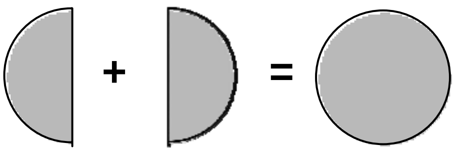
  Wir notieren: $\mathbf{1 : 2 = \frac{1}{2}.}$ Umgekehrt: $\mathbf{2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$
- Man kann ruhig weitermachen: $\mathbf{3*\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1+ \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5}$ usf**.**
- Nun vergleicht man die Halbe-Strecke mit der Einheitsstrecke: Wie oft passt diese rein? Man sieht unmittelbar und überprüft: $\mathbf{1: \frac{1}{2} = 2.}$ $\mathbf{2 : \frac{1}{2} = 4}$ $\mathbf{3 : \frac{1}{2} = 6}$ **; ....**
- Es empfiehlt sich, jede dieser Gleichungen auch inhaltlich in Wortform zu notieren wie z. B. zu $\mathbf{3 : \frac{1}{2} = 6}$**:** „Teilt man 3 E in Stücke von je ½ E auf, so erhält man 6 Stücke“ bzw. „misst man 3 E mit ½ E aus, so geht es 6 Mal“.
  Besonders empfehlenswert ist dies bei der Verwendung von Maßeinheiten für E wie z. B. h, kg, cm, l, …

4. Danach kommen die Viertel dran: $1 : 4 = \frac{1}{4}$; $4 * \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$;

   $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 * \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 * \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; usf. $1 : \frac{1}{4} = 4$; usf.;
5. Man wird den Viertel-Streifen und den Halbe-Streifen vergleichen und feststellen:
   $2 * \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $4 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} = 1$; usf. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = ?$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = ?$ u.v.a.m.

Es geht nicht darum, Regeln für die Rechenoperationen zu gewinnen, sondern Rechenoperationen mit Handlungen und damit mit Vorstellungen (= verinnerlichte Handlungen) zu verbinden: Addieren heißt, die Streifen aneinandersetzen; Subtrahieren heißt die Streifen voneinander abziehen; Vervielfachen heißt die Streifen mehrfach addieren; Dividieren heißt (hier) „Ausmessen mit“, also die Enthaltenseinsaufgabe etc.

6. Danach kann evtl. das Spiel in derselben Weise auf die Achtel und ggf. Sechzehntel ausgedehnt werden, also die ganze Bruchfamilie Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel. Sie bietet schon reichhaltiges Material zu allen Rechenoperationen.
7. Nun können die anderen Familien (Drittel, Sechstel, Zwölftel bzw. Fünftel, Zehntel, Zwanzigstel) in gleicher anschaulicher und konkreter Weise behandelt werden.
8. Es empfiehlt sich, die Halbe- und Drittel-Familie auch am Kreismodell (Std., Min.) durchzuspielen und die Fünftel-Familie an Dezimalmodellen (Liter, kg, Euro, m).
9. Grundsätzlich empfehlen wir, die Erfahrungen nicht formal sondern ausschließlich inhaltlich zu begründen und zu formulieren. Es soll das Ganze ein ***informeller Vorkurs zum Bruchrechnen*** werden, bei dem Erfahrungen zu allen Operationen gemacht werden, diese jedoch nicht in Regeln formuliert sondern an konkreten Handlungen festgemacht werden. Wir hallten die Erzeugnung einer solchen Erfahrungsbasis für das Verständnis des Bruchrechnens für unverzichtbar.
10. Einige konkrete Anregungen mit dem Kreismodell:



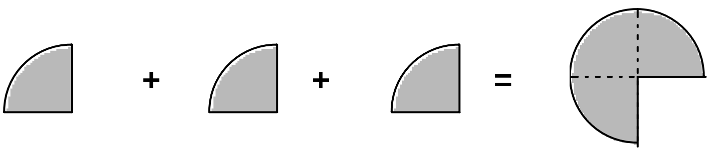
$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = 2 * \frac{1}{2}}$$

„Ein halbes und ein halbes ist ein Ganzes“. „Ein Ganzes ist zwei mal ein Halbes“

Diese Gleichung hat nun zwei Umkehrungen (wie jede Multiplikation sie hat):

$\mathbf{1 : 2 = \frac{1}{2}}$ **„Teilt man ein Ganzes in zwei gleiche Teile, so erhält man ein Halbes“**

$\mathbf{1 : \frac{1}{2} = 2}$ **„Teilt man ein Ganzes in Halbe auf, so erhält man zwei Stück.“**



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 3 * \frac{1}{4}$$

Diese letzte Gleichung hat nun wieder zwei interessante Umkehrungen:

$\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$ **„Teilt man drei Viertel in drei gleiche Teile, so erhält man ein Viertel.“**

$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$ **„Teilt man drei Viertel in Viertel auf, so erhält man drei Stück“ bzw.**

„ein Viertel passt drei Mal in drei Viertel“.

Auf diese Weise fortfahrend kann man vielerlei grundlegende Erfahrungen zum Bruchrechnen in konkreter und Sinn gebender Weise gewinnen. Diese Erfahrungen können Schüler in die Lage versetzen, die formalen Regeln zum Bruchrechnen inhaltlich zu verstehen und einen Sinn dahinter zu finden. Wir plädieren im Sinne nachhaltigen Lernens sehr dafür, einen solchen ***informellen regelfreien Vorkurs zum Bruchrechnen*** durchzuführen. Das kann schon in Klasse 5 bei der Einführung von Größen erfolgen.

Man kann dieselben Erfahrungen zu diesen einfachen Bruchfamilien auch (bzw. auch nochmals) mit den ***Bruchstreifen*** (z. B. auch in Form eines Litergefäßes und Umfüllen mit Sand) bzw. am ***Kreismodell*** (z. B. für die Größe Zeit am Zifferblatt mit Zwölfferteilung oder dem Tag mit Vierundzwanzigerteilung oder der Stunde mit Sechzigerteilung oder der Winkelgröße mit 360-Kreisteilung) für die Drittelfamilie kombiniert mit der Halbe-Familie bzw. mit Gewichten o. dgl. machen lassen. Erst danach darf dann zum formalen Bruchrechnen übergegangen werden.

Bei dieser inhaltlich geleiteten Arbeit muss man nicht systematisch vorgehen, sondern kann in natürlicher Weise alle bei Brüchen vorkommenden Operationen anschaulich und konkret deuten: Erweitern, Kürzen, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren (zumindest Vervielfachen mit natürlichen Zahlen), Dividieren (zumindest in der Form des Messens oder Aufteilens mit ganzzahligen Quotienten).

Ganz von selbst gewinnt man bei dieser inhaltlich gebundenen Arbeit Größenvorstellungen von Brüchen und deren Anordnung auf dem Zahlenstrahl. Das ist ein ganz entscheidender Vorteil gerade des Modells der Bruchstreifen. Sie bieten die beste Gewähr dafür, dass Schüler die Brüche größenrichtig am Zahlenstrahl (bzw. der Zahlengerade) einordnen können - ein nicht zu unterschätzender Vorteil dieses „linearen“ Modells der Bruchsreifen.

4. Vergleich von Brüchen. Ordnung. Formänderungen.

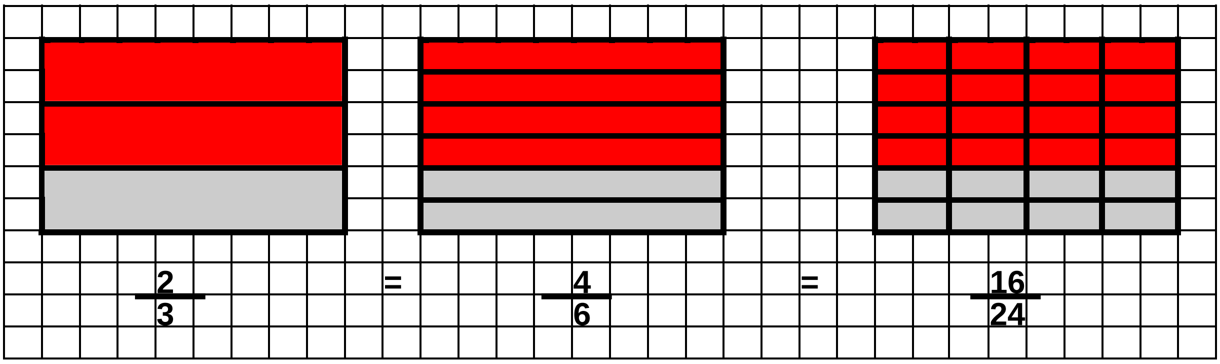
Eine der fatalsten Ausfallerscheinungen bei Schülern ist das weitgehende ***Fehlen von Größenvorstellungen über Bruchzahlen***. Dies sollte von Anfang an beachtet werden:

- So sollte für jeden *unechten* Bruch angegeben werden, zwischen welchen *ganzen* Zahlen er liegt und bei welcher näher (grobes Nähern).
- Für jeden *echten* Bruch wird als Näherung ein Stammbruch (1/n) oder der Wert ¾ angegeben.

Beispiele: Man gebe Näherungen an für $\frac{13}{77};\frac{7}{30};\frac{5}{3};\frac{82}{17};\frac{9}{23}$ etc.

Die ***Formänderungen*** können am besten im Größenmodell (Übergang zu größeren bzw. kleineren Einheiten) erklärt und veranschaulicht werden.

Es ist auf dieser Stufe nicht notwendig, Regeln für das Kürzen und Erweitern zu formulieren. Eine geeignete Veranschaulichung sind überkreuzte Bruchquadrate oder Bruchrechtecke aber ebenso auch verschieden feine Kreisteilungen (Nennerfamilie 360):



Spätestens an dieser Stelle ist es angebracht, sich auch mit ***Brüchen in Dezimalform*** zu befassen und diese als eine besondere Familie von gewöhnlichen Brüchen zu sehen, nämlich solchen mit speziellen Nennern 10, 100, 1000, ...

Beim Vergleichen von Brüchen werden vorerst keine Regeln verwendet, sondern die Größenvorstellungen als wichtige Abschätzungsmöglichkeiten herangezogen werden.

Beispiele:

Gleiche Zähler bzw. gleiche Nenner (inhaltliche Argumentation!)

Ist $\frac{27}{52}$ größer, kleiner oder gleich $\frac{17}{36}$? Man vergleiche mit ½.

Warum ist $\frac{4}{7} < \frac{5}{6}$; $\frac{4}{9} < \frac{3}{7}$; $\frac{6}{11} < \frac{5}{9}$; $\frac{5}{7} < \frac{7}{9}$ u. v. a. m.

Zum groben Einordnen der Größe von unechten Brüchen müssen stets Ganze herausgezogen werden. Dies muss häufig geübt und veranschaulicht werden.

Zentrale Bedeutung für die Ausbildung von geeigneten Größenvorstellungen bei Brüchen hat das ***Überschlagsrechnen***. Dies ist bedeutsamer als das Rechnen nach Regeln!

Wie macht man einen sinnvollen Überschlag beim Bruchrechnen?

- Jeder Bruch wird entweder durch eine ganze Zahl (bei unechten Brüchen) oder durch einen Stammbruch bzw. ¾ bei echten Brüchen genähert (Größenvorstellung!).
- Dann werden die Näherungswerte addiert bzw. subtrahiert und ein genähertes Ergebnis angegeben.

Beispiele:

$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\approx\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\approx 1$ (etwas weniger) $\frac{37}{6}-\frac{82}{23}\approx 6-4=2$

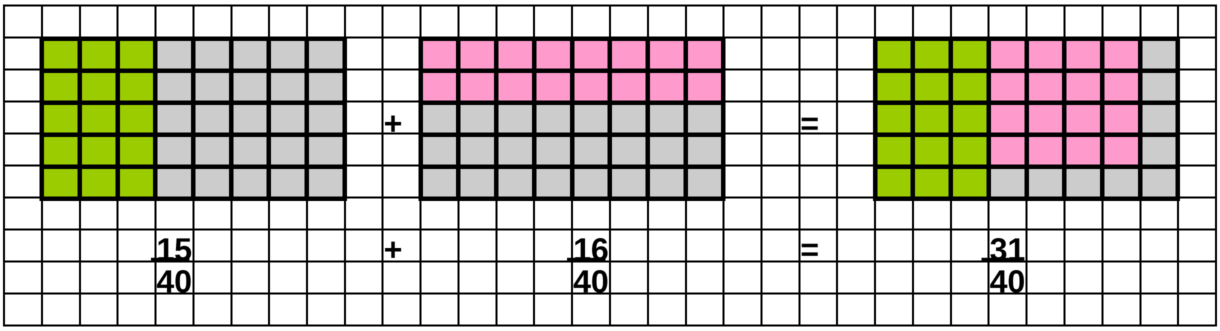
5. Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Zunächst werden *Erfahrungen mit konkreten Brüchen* gesammelt und ohne Regeln internalisiert. Vor jeder Rechnung wird eine Größenabschätzung für das Ergebnis geliefert. Dann wird mit Hilfsmitteln (Rechenstreifen oder Rechenquadrate) operiert.

(Im Einzelnen siehe hierzu den nachfolgenden Teil 5. Vorbereitungen zu einem Unterrichtsentwurf Addieren und Subtrahieren von Brüchen.)

Die wohl wichtigsten Vorbereitungen sind ***Vorerfahrungen mit den Bruchstreifen*****:** Addieren geschieht sehr einfach durch Aneinanderlegen der entsprechenden Strecken. Zum genauen Ablesen des Ergebnisses muss man ggf. eine *feinere gemeinsame Unterteilung* suchen. Dies ist eine für das Verständnis unerlässliche Grunderfahrung.

Sehr geeignete Veranschaulichungsmittel beim systematischen Zugang sind auch die Bruchquadrate oder entsprechende Rechtecke auf Karopapier. Beispiel: 3/8 + 2/5. Man geht aus von Rechtecken mit den Seitenlängen 5 und 8 (also den beiden Nennern), dann kann man die gegebenen Brüche leicht darstellen:



Hinweis:

Diese Methode legt es nahe, ***als gemeinsamen Nenner grundsätzlich das Produkt der beiden Nenner zu nehmen und nicht unbedingt den Hauptnenner zu bestimmen*** (Vergleiche hierzu die Bemerkungen am Ende des folgenden Kapitels).

6. Vorbereitungen zu einem Unterrichtsentwurf: Addition und Subtraktion von Bruchzahlen.

6.1 Der stoffliche Inhalt

Beispiel: $$\frac{19}{27}+\frac{11}{15}=\frac{95}{135}+\frac{99}{135}=\frac{95+99}{135}=\frac{194}{135}=1\frac{59}{135}$$

Analyse des Verfahrens in einzelnen Schritten:

- Hauptnenner bestimmen

  Muss es immer der Hauptnenner (kleinstes gemeinsames Vielfaches) sein, genügt nicht irgendein gemeinsamer Nenner (gemeinsames Vielfaches), z. B. das Nennerprodukt? Nach welcher Methode wird der Hauptnenner bestimmt?

- Erweitern:

  Mit welcher Zahl muss jeweils erweitert werden?
  Wie erhält man die Erweiterungszahl?
  Liefert das Verfahren zur Hauptnennerbestimmung auch die Erweiterungszahlen?
  Was heißt eigentlich „Erweitern"? Warum muss man dies eigentlich?

  [Hinweis: Es wäre außerordentlich hilfreich für diese beiden Schritte, wenn man folgende Beziehung zur Verfügung hätte: ggT(a, b) * kgV(a, b) = a * b. Das Produkt aus ggT und kgV zweier Zahlen ist gleich dem Produkt der beiden Zahlen. Worin läge der Vorteil?]

- Eigentliche Addition:
  Zähler addieren, Nenner beibehalten (nicht addieren!).

- „Ergebniskosmetik":
  Im Ergebnis ggf. kürzen bzw. Ganze herausziehen.

Man erkennt auf Grund dieser einfachen Sachanalyse:

Die eigentliche Addition (genauso übrigens die Subtraktion) wird verschleiert, erschwert, fast verdeckt durch die aufwendige – wodurch motivierte? – Vorarbeit, das so genannte „Einrichten" der Brüche. In den Schritten *Hauptnennerbestimmung*, *Erweitern* und bei der *Ergebniskosmetik* liegt der rechnerische Hauptaufwand während die Addition selbst eher unproblematisch ist. Kann man für dieses aufwendige Rankenwerk Verständnis und Einsicht erzeugen?

Zusatz:

Da bei der Subtraktion keine neuen Aspekte auftreten, ist es geboten, Addition und Subtraktion parallel zu behandeln. Was spräche evtl. dagegen?

6.2 Anwendungen. Bedeutung des Stoffes.

- Addieren von Größen mit Bruchzahlen als Maßzahlen (wobei dies fast nur in der Schule vorkommt und kaum im täglichen Leben!)
- Addieren von Bruchzahlen bei algebraischen Umformungen z. B. als Vorbereitung für die Algebra und Gleichungslehre
- Vergleich mit dem Additionsverfahren in der Dezimalform
- Anmerkung zum Nachdenken:
  Warum dekretiert man nicht einfach (z. B. analog zur Rechtschreibreform) das Addieren von Brüchen in folgender Weise: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$
  Man könnte doch dadurch den Schülern viele Fehler ersparen! Eine lohnende Aufgabe für die KMK, den DIN-Normenausschuss oder gar den Gesetzgeber???!!!

6.3 Stellung des Stoffes im Lehrplan

Stoffliches Umfeld des Bruchrechnens im Stoffkanon des Mathematikunterrichts:

Vorausgehend:

- Klasse 5: Rechnen in N. Grundrechenarten in dezimaler Darstellung.
  Größen. Rechnen in Größenbereichen. Umwandeln verschiedener Maßeinheiten.
- Klasse 6: Teilbarkeitslehre. Inwieweit stehen Methoden zur Hauptnennerbestimmung und zum Erweitern/Kürzen zur Verfügung?
  Brüche in Dezimalform. Gingen die Grundrechenarten mit Brüchen in Dezimalform gar voraus?

Nachfolgend:

- Klasse 6: Grundrechenarten im Bereicht der Brüche. Rechnen mit „gemischten Zahlen“. Dezimalbruchrechnung (s. o.). Rechnen mit Größen mit Bruchzahlen in beiden Formen als Maßzahlen.
- Klasse 7ff: Prozentrechnung. Dreisatz. Sachrechnen. Angewandtes Rechnen.
  Rechnen im Bereich der rationalen Zahlen. Algebra.

Beispiel eines Lehrplantextes:

Klasse 6, LPE 1: Bruchzahlen in Bruchschreibweise

An konkreten Sachverhalten erfahren die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit der Erweiterung des bisherigen Zahlbereichs und ihrer Zahlvorstellung. Der Bruchbegriff erschließt sich ihnen zunächst auf handelnder, dann auf bildlicher und schließlich auf symbolischer Ebene. Anwendungen im Alltag und in der Algebra erfordern Sicherheit im Rechnen mit Brüchen.

Brüche	Konkrete und bildliche Veranschaulichung
Kürzen	Brüche bei Größen
	Brüche als Operatoren (1/4 von ...)
Teilbarkeitsregeln, Primzahlen	Summenregel
[Größter gemeinsamer Teiler]	Regeln für: 2, 3, 5, 9, 10
Erweitern	aus Vielfachenreihen gewinnen
Hauptnenner	
[Kleinstes gemeinsames Vielfaches]	
Darstellung am Zahlenstrahl, Anordnung	
Rechnen mit Brüchen	Rechenregeln, Formulierung auch mit Platzhaltern
	Auch Verbindung der Grundrechenarten

6.4 Vorerfahrungen der Schüler. Mögliche Zugänge und Anknüpfungspunkte

Die Schüler haben die Bruchzahlen kennen gelernt als Maßzahlen von Größen und als Operatoren (Vervielfacher und Teiler). Welcher Aspekt taugt für einen Ansatz zum Addieren? Wie lässt sich die Addition/Subtraktion im Operatormodell deuten, wie im Modell der Maßzahlen (Größenmodell)? Welcher Zugang ist geeignet?

Operatoren sind Abbildungen, Funktionen. Was versteht man unter der „Summe zweier Operatoren" und wie könnte diese modellhaft realisiert werden?

Was ist die „Summe zweier Größen" (aus demselben Größenbereich) und wie kann sie im Modell realisiert werden?

Das Ergebnis dieser Analyse ist klar:

Für die Veranschaulichung der Addition und /Subtraktion kommt nur das Größenmodell in Frage.

Einführende Beispiele:

a) 19 dm + 230 cm = 190 cm + 230 cm = 420 cm = 42 dm = 4m 20 cm

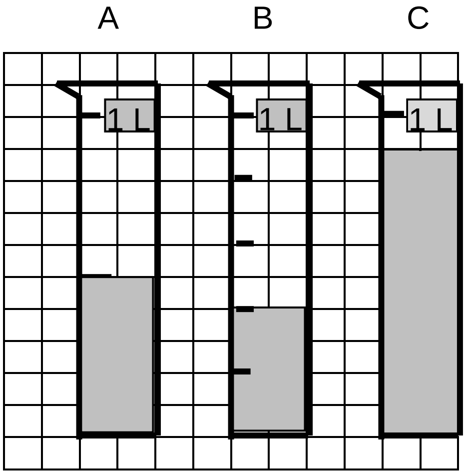
Warum konnte man nicht sofort addieren?
Warum musste man zuvor „Einrichten"? Was tut man bei dieser Prozedur?
Vor dem Addieren muss man in eine gemeinsame Einheit („*Benennung*"; ob das wohl etwas mit „*Nenner*" zu tun hat?!) umwandeln.
Zum Schluss kann man wieder in eine andere (größere) Einheit verwandeln.

b) $\frac{1}{4}\text{h} + \frac{1}{3}\text{h}$ = 15 min + 20 min = 35 min

$= \frac{15}{60}\text{ h} + \frac{20}{60}\text{ h} = \frac{35}{60}\text{ h}$

= 3 * (5 min) + 4 * (5 min) = 7 * (5 min)

$= \frac{3}{12}\text{ h} + \frac{4}{12}\text{ h} = \frac{7}{12}\text{ h}$ („Zwölftelstunden").

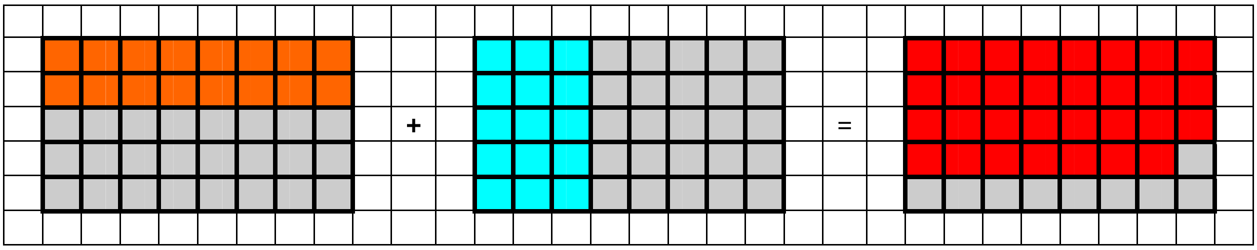


c) Wie viel Flüssigkeit ist im Gefäß A, wie viel im Gefäß B?

Beides wird zusammen in Gefäß C geschüttet. Wie hoch steht dort die Flüssigkeit? Wie viel Liter enthält dann C?

Zeichne an C eine geeignete Skala. Übertrage diese auch an A und B. Welche Additionsaufgabe wurde damit gelöst?

d) Aufgabenbeispiel in der „Rechtecksform“ (z. B. Verwendung der „Bruchquadrate“):



$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{31}{40}$$

Der Vorteil bei dieser Darstellungsform liegt darin, dass man durch Wahl der Nenner als Seitenlängen sofort eine gemeinsame Unterteilung mit dem Nennerprodukt als gemeinsamem Nenner erhält.

Eine Analyse der Beispiele spiegelt exakt die Stufen bei der Bruchaddition wieder:

- Gemeinsame Benennung (Einheit, Nenner) bestimmen.
- In gemeinsame Benennung umwandeln.
- Maßzahlen (natürliche Zahlen!) addieren; Benennung beibehalten.
- Eventuell wieder in andere (größere) Einheit umwandeln.

Hat man das Kürzen und Erweitern von Brüchen vor allem im Größenmodell (Übergang zu größeren oder kleineren Einheiten, Teilstücken, Benennungen, Nennern) gedeutet, so ist mit diesem Weg ein nahe liegender, vielleicht sogar natürlicher, mit hinreichend vielen Vorerfahrungen versehener, inhaltlich orientierter Zugang zur Bruchaddition vorgezeichnet, der insbesondere den Sinn des vor- und nachgeschobenen „Beiwerks“ (Stufen A, B und D) einleuchtend macht.

Mögliche Variationen bzw. Erweiterungen:

a) Verschiedene Größenbereiche:

Bei Zeitdauern kann man die Nennerfamilie von 60 und seinen Teilern abdecken. Im Winkelmaß kann man sogar alle Teiler von 360 als Nenner erschließen. Ansonsten bieten sich vor allem die dezimalen Teilerfamilien von 10 (Längen), 100 (Längen, Geld, Flächeninhalte) und 1000 (Längen, Volumen, Gewicht) an.

b) Verschiedene Schwierigkeitsstufen (siehe dazu die Zusatzbemerkung in 7.):
- Gleiche Einheiten (Benennungen)
- Eine Einheit ist Teiler der anderen
- Teilerfremde Einheiten (Welche Beispiele taugen dazu?)
- Nicht teilerfremde Einheiten

c) Allmählicher Ablöseprozess von inhaltlichen Größen zu reinen Bruchzahlen:

z.B. $\frac{1}{4}$ s + $\frac{2}{5}$ s = ? Es gibt keine „natürliche gemeinsame Einheit“ (Millisekunden sind wohl nicht bekannt) für diese beiden Angaben. Also muss man eine gedachte z.B. Zwanzigstelsekunden einführen.

d) Lässt sich die angedeutete sprachliche Stütze als tragende Wortassoziation („gemeinsame Benennung“ – „gemeinsamer Nenner“) fruchtbar nutzen oder besteht hier sogar ein sachlicher Zusammenhang? Woher kommt eigentlich das Wort „Nenner“ bei Brüchen?

6.5 Literaturstudium:

F. Padberg; Didaktik der Bruchrechnung

Fachdidaktische Zeitschriften u. . Sonderhefte zum Bruchrechnen wie z. .:

Der Mathematikunterricht. MU 1/75; MU 4/81; Sonderhefte zum Bruchrechnen

„Mathematik Lehren“ hat ebenfalls mehrere Sonderhefte zum Bruchrechnen.

Schulbücher und Lehrerhandbücher z. B.

S. Krauter u. a.; Mathematik B, Bände 5 und 6 mit zugehörigen Lehrerbänden.

Werke zur Didaktik und Methodik des MU: DIFF, ZMU;

Zeitschriftenaufsätze; Sammlung von Unterrichtsbeispielen; Angebote im Internet ...

6.6 Zielvorstellungen für die Unterrichtseinheit

- Sollen die Schüler *wissen* (*einsehen*, *begründen*, *herleiten können*), warum sie gerade so und nicht z. B. auf die „einfache Art“ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ Brüche addieren?
- Sollen die Schüler eine Regel zur Verfügung haben oder genügt es, das Verfahren richtig durchführen (anwenden) zu können?
- Sollen die Schüler das Verfahren bzw. ggf. die Regel verbalisieren können? Wenn ja, dient dies der puren sprachlichen Schulung oder ist die verbale Kenntnis der Regel wirkliche Hilfe beim Durchführen des Verfahrens oder zum Erinnern?

- Falls die Schüler Fehler machen:
  Sollen sie es dann nochmals neu, diesmal aber richtig (!), machen; oder sollen sie zuerst ihre Fehler erkennen, lokalisieren, analysieren, zur Einsicht bringen was und warum dies falsch ist und dann erst neu rechnen?
- Sollen Schüler gar die hauptsächlich gemachten (drohenden!) Fehlertypen kennen, indem diese vom Lehrer als Unterrichtsstoff behandelt werden?
- Ist vergessenes Kürzen am Schluss („Ergebniskosmetik“) oder ein zu großer gemeinsamer Nenner, also nicht der Hauptnenner, ein Fehler oder nicht?
- Worin liegt eigentlich der Vorteil, die relative Einfachheit des Addirens/Subtrahierens in der dezimalen Form?
  Warum muss man dort nicht auch zuerst „einrichten“?
- Lohnt ein Automatisieren des Verfahrens oder genügt das bewusste Herausarbeiten der helfenden Leitidee „gemeinsame Benennung bestimmen“?
- Innerhalb welchen zahlenmäßigen Schwierigkeitsgrades soll das Verfahren beherrscht werden? Welche Art der Hauptnennerbestimmung ist zu empfehlen?
- Soll eine verbindliche Notationsform eingeführt werden? HN-Bestimmung; Bestimmung der Erweiterungszahlen, Erweitern, Addieren, Ergebniskosmetik.

  Beispiel: $23\frac{17}{28} - 19\frac{13}{16} =$

HN:						
28	56	84	**112** (*= 4 * 28*)			
16	32	48	64	80	96	**112** (*= 7 * 16*)

  $$23\frac{17}{28} - 19\frac{13}{16} = 23\frac{68}{112} - 19\frac{91}{112} = 22\frac{180}{112} - 19\frac{91}{112} = 3\frac{89}{112}.$$

- Gibt es eine ökonomischere, der Dezimalform analoge, Notationsform?

6.7 Gliederung der Unterrichtseinheit nach stofflichen Gesichtspunkten

Es spricht nichts dagegen und alles dafür, Addition und Subtraktion parallel zu behandeln und nicht in getrennten Abschnitten nacheinander.

Da bereits beim Vergleichen und Ordnen von Brüchen das „Einrichten“ (auf gleiche Nenner bringen) benötigt und praktiziert wird, ist zu überlegen, ob nicht bereits an dieser Stelle Addition und Subtraktion zu behandeln sind. Statt zu fragen, *welche* der Bruchzahlen größer ist, kann man die Frage ja ausweiten und fragen *um wie viel* die eine größer ist als die andere? Nachdem man einmal auf die Idee mit dem gemeinsamen Nenner gekommen ist, sollte dies kein allzu großes Problem mehr sein.

Mit den Verknüpfungen Addition und Subtraktion selbst verbinden die Schüler vor allem im Bereich der Größen selbstverständlich schon in naiver, wohlbekannter Weise die richtigen Vorstellungen (Hinzutun, Zusammenlegen, Vereinigen bzw. Wegnehmen oder Ergänzen). Hier liegt wohl nicht der Kern der Probleme einer Neueinführung oder Begriffsverdeutlichung.

In den meisten methodischen Vorschlägen wird ein nach Komplexgrad der Nennerbeziehungen gestufter Gang vorgeschlagen:
Gleichnamige Brüche – ein Nenner ist Vielfaches des anderen – Nenner sind teilerfremd – Nenner sind nicht teilerfremd.
Weitere Kriterien könnten sein: Ist der Nenner Primzahl oder ist er zerlegbar?
Ferner bietet sich ein Stufengang bezüglich des Auftretens von gemischten Zahlen an: Z. B. ein Summand ist ganz, einer echt gebrochen – einer ganz, einer gemischt – beide gemischt – Übertrag erforderlich oder nicht – u. a. m.
Für die Subtraktion kommt in manchen Fällen noch das Problem der Umwandlung (Entbündeln) eines Ganzen hinzu.

Mir scheint eine ***wichtige Zusatzbemerkung*** erwähnenswert:

Aus mindestens vier Gründen halte ich die Bestimmung des Hauptnenners (kleinster gemeinsamer Nenner) anstelle des Nennerprodukts als gemeinsamem Nenner für unnötig und plädiere deshalb, ***grundsätzlich als gemeinsamen Nenner das Produkt der beiden Nenner zu nehmen*** (Ausnahme: wenn man bei kleinen Zahlen den Hauptnenner auf den ersten Blick sieht und das Erweitern im Kopf machen kann). Dann entfallen auch die soeben erwähnten Schwierigkeitsstufen im Hinblick auf die verschiedenen Nennerbeziehungen:

- In der Algebra wird grundsätzlich beim Addieren von Bruchtermen das Nennerprodukt als gemeinsamer Nenner benutzt: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$. Wenn Bruchrechnen auf die Algebra vorbereiten soll, ist dieser Weg sicher sinnvoll.
- Das schwierige Ermitteln der Erweiterungszahlen entfällt in diesem Fall. Erweiterungszahl für jeden Bruch ist jeweils der Nenner des anderen Bruchs.
- Da vielfach ohnehin nur kleine Nenner vorkommen und für große Nenner der ETR als Rechenhilfsmittel benutzt wird, ist der Rechenvorteil möglichst kleiner Zahlen nicht mehr von wesentlichem Belang wie früher beim Rechnen ohne dieses Hilfsmittel.
- Bei der Verwendung von Bruchquadraten oder Bruchrechtecken zur Veranschaulichung (siehe 6.4 Beispiel d)) entsteht grundsätzlich das Nennerprodukt als gemeinsamer Nenner.

6.8 Geplanter Stufengang

A) Nennergleiche Brüche bzw. gleich benannte Größen jeweils mit Handlung und grafischer Veranschaulichung z.B. mit Bruchstreifen:

20 mm + 60 mm =	45 min – 15 min =	$\frac{273}{1000}$ km – $\frac{179}{1000}$ km =
$\frac{1}{5}$ cm + $\frac{3}{5}$ cm =	$\frac{3}{4}$ h – $\frac{1}{4}$ h =	273 m – 179 m =
$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$	$\frac{273}{1000}-\frac{179}{1000}=$

Erweiterung: 3 h 17 min + 9 h 49 min = (gemischte Zahlen)

B) Für die Nenner bestehen „natürliche“ gemeinsame Nenner:

$\frac{3}{4}$ km - $\frac{5}{8}$ km =	$\frac{5}{6}$ h + $\frac{3}{4}$ h =	$\frac{3}{5}$ DM + $\frac{7}{20}$ DM =

Erweiterung: 4 m 13 cm + 7 m 8 dm =

C) Beispielreihe ohne „natürliche“ gemeinsame Unterteilungen (Bruchquadrate zur Veranschaulichung verwenden):

$\frac{2}{5}$ m + $\frac{5}{7}$ m =	$\frac{3}{7}$ l - $\frac{1}{8}$ l =	$\frac{2}{3}$ kg + $\frac{2}{5}$ kg =

D) Übergang von den Größen zu den reinen Bruchzahlen:

a) Umwandeln in Einheiten mit natürlichen Maßzahlen

b) Bruchmaßzahlen; Einheit bleibt (vgl. Zwölftelstunden; Viertele; Halbe; etc. quasi-kardinale Auffassung).

7. Multiplikation von Brüchen

In der ersten Stufe werden Brüche „vervielfacht“, also mit natürlichen Zahlen multipliziert. Dies kann auf die Addition zurückgeführt werden und müsste daher relativ problemlos gehen, aber Vorsicht: Verwechslung mit Erweitern liegt nahe – wenn man formal nach Regeln statt inhaltlich nach Überlegung vorgeht!

In einem zweiten Schritt werden Brüche mit Stammbrüchen multipliziert bzw. – was dasselbe ist – durch natürliche Zahlen dividiert. Dies muss bereits in Klasse 5 gründlich vorbereitet sein:

$$\boxed{\;\mathbf{\frac{1}{n}} * \blacksquare \quad = \quad \textbf{n-ter Teil von } \blacksquare \quad = \quad \blacksquare \; \textbf{: n.}\;}$$

In einem dritten Schritt werden dann diese beiden Operationen verkettet: Multiplikation mit $\frac{z}{n}$ bedeutet zuerst Multiplikation mit z dann Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ oder umgekehrt.

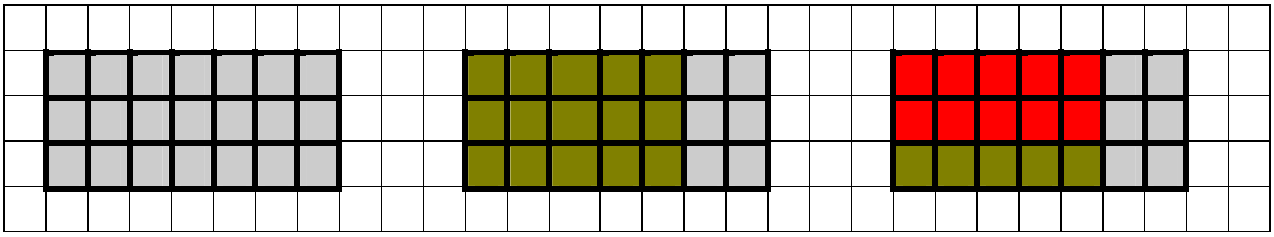
Man kommt mit wenigen Beispielen sehr schnell (leider zu schnell) zu einer Regel.

Bildliche Veranschaulichung ist vor allem auf Karopapier möglich durch geeignete Rechtecke. Hier erweisen die ***Bruchquadrate*** beste Dienste.

Beispiel: 2/3 * 5/7 (in der Zeichnung ist 2/3 der Operator (= Multiplikator)).

Die Zugrundelegung der „von-Auffassung“, also des Operatorcharakters der Brüche, für die Multiplikation erfordert die Deutung der Multiplikation auf der Operatorebene:

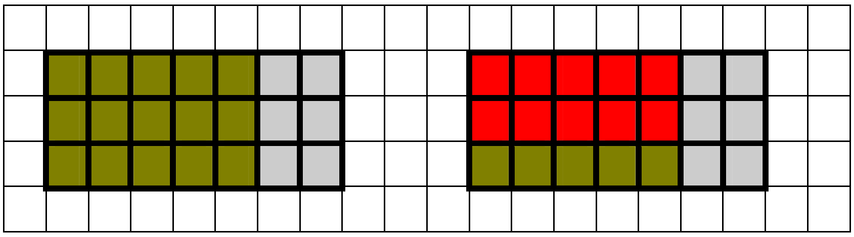
Operator 1 verknüpft mit Operator 2 ergibt Operator 3. Um dies auch auf der Ebene der Zustände (Maßzahlen deutlich machen zu können, muss die Erzeugung des Anfangsbruches durch Anwenden auf die Einheit vorgeschaltet werden:



$$\mathbf{1} \xrightarrow{*\frac{5}{7}} \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} \xrightarrow{*\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{21}}$$

$$\xrightarrow{\quad *\frac{5}{7}*\frac{2}{3} \quad}$$

Häufig wird diese Überlegung in einem einzigen Schritt zusammengefasst:



$$\frac{5}{7} \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \frac{10}{21}$$

Zur Schulung der Größenvorstellung ist es wieder unerlässlich, geeignete Überschlagsrechnungen mit Näherungswerten (ganzzahliger Wert oder einStammbruch) zu machen. Man wähle selbst passende Beispiele hierzu.

Besonderer Wert ist darauf zu legen, dass Multiplizieren nun nicht mehr unbedingt Vermehrung (Vervielfachung) bedeutet. Beispiele sollen dies erläutern:

$6\text{ m} * \frac{2}{3} < 6\text{ m}$ $\qquad$ $6\text{ m} * \frac{4}{3} > 6\text{ m}$

Allgemein: Wann gilt 2/3 * x a) = 0 b) = 2/3 c) = 1 d) > 2/3 e) < 2/3.

Es sei nur angemerkt, dass das *Multiplizieren* von Brüchen vom *Erweitern* sorgfältig unterschieden werden muss:

Erweitern ist eine *Formänderung* eines Bruchs, die Bruchzahl ist vor und nach dem Erweitern dieselbe, nur mit einem anderen Namen (Benennung).

Anders dagegen beim Multiplizieren. Der Wert einer Zahl wird durch die Multiplikation mit einem Bruch verändert, und zwar vergrößert, falls der Bruch > 1 ist und verkleinert (das ist deutlich zu machen, s. o.), falls der Bruch < 1 ist.

8. Division von Brüchen

In erster Linie geht es darum, den Schülern eine *Vorstellung vom Dividieren* zu vermitteln. Die Rechentechnik selbst ist sekundär – notfalls hat man dafür ja auch eine Maschine zur Verfügung, die dieses leistet.

Der erste Schritt wird sein, dass man Brüche durch ganze Zahlen dividiert:

$$\mathbf{\frac{15}{4}\ kg : 5 = ?}$$

Man wird inhaltlich argumentieren: Entweder ich nehme nur den fünften Teil der 15 Viertel, also ¾ kg oder ich belasse es bei 15 Teilen, die ich aber jeweils fünfteile, also aus den Vierteln Zwanzigstel mache, dann erhalte ich $\frac{15}{20}$ kg.

Man muss zeigen – Bruchstreifen verwenden! – dass die Ergebnisse gleich sind. Der erste Fall funktioniert nur in besonderen Fällen, der zweite jedoch immer. Daher muss er eingeübt werden: 2/5 : 3 = ? usf. Man erhält: $\blacksquare\ \mathbf{: n} = \blacksquare\ \mathbf{*\ \frac{1}{n}}$

Solange also der Divisor *ganzzahlig* ist, kann man das Dividieren als *Teilen oder Verteilen* auffassen. Das geht nicht mehr, wenn der Divisor ein Bruch ist:

> *Wie soll man z. B. 3,5 kg auf ¾ aufteilen? Was heißt das überhaupt, z. B. einen Geldbetrag auf 5/2 Personen aufteilen? Macht man nun 5 Päckchen oder 2,5 und was heißt das? Dies geht nur mit ganzzahligem Divisor.*

Im Gegensatz dazu macht das ***Aufteilen oder Messen*** durch einen Bruch durchaus Sinn: Wie oft passt die Strecke der Länge 2/5 m in eine Strecke der Länge 3/4 m?

Man nehme die Bruchstreifen zu Hilfe und halte 2/5 an ¾ dran und frage, wie oft dies reinpasst (Aufteilen oder Messen!). Die Antwort folgt durch einfaches Hinsehen und Abschätzen: ¾ m : 2/5 m = ¾ : 2/5 „das geht etwa 2-mal“, man sieht es ja einfach. In einer ersten Stufe wird man dies so belassen und nicht genauer ermitteln wollen. Es geht ja nur um das Verständnis der Division – nicht um eine Technik oder Regel, zumindest noch nicht.

Auch andere Beispiele können auf diese Weise gelöst werden:

Wie oft passt ¾ in 1/3, was ergibt also 1/3 : ¾?

Man benützt die Bruchstreifen und hält sie aneinander: Man sieht sofort, dass das nur etwa ½-mal reinpasst. Also ist 1/3 : ¾ ungefähr ½.

Mit solchen Übungen – insbesondere wenn es ganzzahlig oder mit einem Stammbruch geht – wird man in dieser Stufe arbeiten. Vor allem der folgende Sonderfall spielt eine wichtige Rolle beim Verständnis der Division durch Brüche:

Ganze Zahl durch Stammbruch:

$30 : \frac{1}{2} = ?$ Man schenke aus einem 30-Liter-Fass „Halbe“ aus.

$5 : \frac{1}{4} = ?$ Man fülle Literflaschen in „Viertele“ ab.

$7 : \frac{1}{3} = ?$ Man fülle Literflaschen in Colagläser zu je 1/3 l ab.

$15 : \frac{1}{5} = ?$ Man fülle Literflaschen in Fünftelgläser zu je 0,2 l ab.

...usf. Selbstverständlich auch in anderen Größenbereichen!

In einem weiteren Schritt kann man nun auch *nicht ganze* Ausgangswerte benutzen.

Danach kann man in andere Gläser abfüllen, also den Divisor nicht mehr als Stammbruch sondern als beliebigen Bruch nehmen wie z. B. Flaschen zu je 2/5 Liter, bzw. zu je ¾ Liter, bzw. 3/10 Liter etc. Durchaus können – nein sollten! – auch mal Flaschen zu 3/2 Liter, 5/2 Liter etc. vorkommen. Unproblematisch bleibt dies, solange es ganzzahlig aufgeht.

Eine wichtige Erfahrung hierbei ist, dass etwas beim Dividieren durch einen Bruch *mehr* werden kann! Vergleiche dazu die entsprechende Erfahrung beim Multiplizieren.

Es wird hilfreich und wichtig sein, diese Enthaltenseins-Aufgaben (Aufteilen, Messen) in vielen einfachen Beispielen und vielen Größenbereichen durchzuspielen (Bruchstreifen, Volumina, Gewichte, Zeitspannen, Flächenstücke, Geldbeträge etc.): Wie oft passt eine Drittelstunde in eine Dreiviertelstunde (3/4 : 1/3 ist etwa 2; s.o.)?

Als ersten *systematischen Zugang* wird man Folgendes überlegen:

Wie wird durch einen Stammbruch dividiert?

Beispiel:

x kg : 1/5 kg = ? Da 1/5 kg in 1 kg 5 mal reinpasst, passt es in x kg x * 5-mal rein.

Mit dieser inhaltlichen Argumentation (lange beibehalten!) kann man schließlich(!) eine Regel gewinnen – die ständig inhaltlich hinterfragbar sein sollte:

Man dividiert durch einen Stammbruch, indem man mit dem Kehrwert (also dessen Nenner) multipliziert: $\mathbf{x : \frac{1}{n} = x * n}$

Nun ist man in der Lage, die Division durch einen Bruch genauer zu überlegen:
Wir gehen zurück zum Ausgangsbeispiel ¾ : 2/5. Wir kennen bereits das ungefähre Ergebnis, es ist etwa 2 (s.o.). Wie können wir dies aber nun genau bestimmen?

Dazu zerlegen wir den Bruch 2/5 wieder in seine Bestandteile 2/5 = 2 * 1/5, also *2 und :5 (Operatorauffassung, Bruchherstellungsakt). Dann führen wir die Schritte nacheinander durch, egal in welcher Reihenfolge:

$$\left(\frac{3}{4} :2\right) : \frac{1}{5} = \frac{3}{8} : \frac{1}{5} = \frac{3}{8} * 5 = \frac{15}{8} \quad \text{bzw.}$$

$$\left(\frac{3}{4} : \frac{1}{5}\right) : 2 = \left(\frac{3}{4} * 5\right) : 2 = \frac{15}{4} : 2 = \frac{15}{8}$$

Stimmt das Ergebnis mit unserer Schätzung überein?
Ja, denn $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \approx 2$ (um $\frac{1}{8}$ weniger als 2).

Es wird nach wie vor dringend empfohlen, möglichst lange bei der inhaltlichen Argumentation zu bleiben und nicht vorschnell Regeln einzuführen.

9. Bruchrechnung – eine Aufgabe für die ganze Schulzeit?

These I:

Wir benötigen keine Bruchrechnung, aber wir benötigen ein fundamentales Verständnis für den Bruchbegriff.

Begründungen:

- Wozu Bruchrechnung in Klasse 6, wenn man ab Klasse 7 vorwiegend den Dreisatz verwendet, *die* Methode, um das Bruchrechnen zu umgehen?
- Wozu Bruchrechnung in Klasse 6, wenn man ab Klasse 7 nur noch in der Dezimalform (ETR, Prozentrechnung) arbeitet?
- Erfahrungen mit Schülern: Ein Schüler hat ein Ergebnis als Bruch herausbekommen und fragt: „Soll ich das auch noch in eine *Zahl* umwandeln?“ (Er meinte in Dezimalform).
- Gegeben: Zinsen in einem Vierteljahr. Gesucht: Jahreszins.
  Von keinem Schüler einer Klasse 9 wird mit 4 multipliziert. Alle nehmen Dreisatz (ca. 50% mit Tagen(!!), ca. 1/3 mit Monaten).
- „10% von etwas“ wird leider allzu häufig mit Dreisatz gerechnet!
- 30 : ½ = ? Einmal als Rechenaufgabe, einmal als Aufteilungsaufgabe (30 Liter Bier in Halbe ausschenken) ergibt völlig unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad.

Einwände:

- Anforderungen bei Prüfungen z. B. der IHK für Auszubildende.

- Vorbereitung auf Algebra.
- Aber .....

These II

Der Aufbau eines fundamentalen Verständnisses für den Bruchbegriff ist eine Aufgabe der gesamten Schullaufbahn und nicht nur für die Klasse 6.

„Bruchrechnen ein Mal und nie wieder!“

Was ist daran „nachhaltiges Lernen“?

Vorschläge für die Klasse 5: Erste Erfahrungen bei der Behandlung der Größen.
Man kann dabei beliebig weit gehen! Z. B. ¾ + 2/3 = im Modell Stunden-Minuten.

Vorschläge für Klasse 7ff: „Prozentrechnung anschaulich“ 20% = 0,20 = 1/5 etc.

These III

Zur sinnvollen Behandlung der Brüche sind keine Regeln notwendig, es genügt Einsicht!

Regeln sind die Methode, um Einsicht zu verhindern!

Empfehlungen:

- Wenige Aufgaben mit jeweils ausführlichem Lösungsweg und Begründungen für das Vorgehen.
- Arbeit mit konkreten Brüchen. Bruchstreifen als einfaches und hilfreiches Mittel.
- Mehr Überschläge statt formaler Rechnungen! Anleitung zu Überschlägen bei Brüchen geben.
- „Was muss da vernünftigerweise etwa rauskommen?“ Erst überlegen, dann – notfalls – rechnen! Mathematik ist die Kunst, Rechnungen zu umgehen.

Schlussthese – (etwas pointiert):

Erst wenn für Klasse 6 das Verwenden von Regeln beim Bruchrechnen verboten wird, können wir hoffen, dass die Leistungen unserer Schüler im Bruchrechnen – und vor allem das Verständnis für Brüche – besser wird.

Wir verzichten in dieser Schrift auf eine eingehende Darstellung des Rechnens mit Brüchen in Dezimalform. Stattdessen erlauben wir uns die Empfehlung, diese jeweils parallel als andere Schreibweise für Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000, … zu behandeln. Insbesondere sollten die Schüler sehr früh bemerken, wann welche Form eines Bruches vorteilhafter ist und zwischen den verschiedenen Formen wechseln können.
So ist z. B. Addieren und Subtrahieren in der Dezimalform leichter, dagegen Multiplizieren und Dividieren in der gewöhnlichen Bruchform.

Folgende Gegenüberstellung mag Anregungen geben:

Vorteile der gewöhnlichen Brüche: (nach F. Padberg, Didaktik der Bruchrechnung)

1. Bei kleinen Nennern leicht handelnd herstellbar und zu veranschaulichen.
2. Rechenregeln für die gewöhnlichen Brüche (gB) begründen die Rechenregeln für die Dezimalbrüche (DB) einsichtig.
3. Mit gB steht ganz Q^+ zur Verfügung, mit den endlichen Dezimalbrüchen jedoch nur eine Teilmenge der positiven rationalen Zahlen.
4. Man arbeitet mit gB rational mit exakten Werten (Gleichungslehre, Algebra).
5. Rechenaufwand bei Multiplikation und Division geringer als bei Dezimalbrüchen; es gibt keine Periodizität.

Vorteile der Dezimalbrüche:

6. Verbreitung und Vorkommen im täglichen Leben. Schülererfahrungen vorhanden.
7. DB sind eine natürliche Erweiterung der bekannten Stellenwertdarstellung von natürlichen Zahlen.
8. Gemischte Zahlen fügen sich problemlos in die Schreibweise ein.
9. Die Zahlnamen sind i. W. eindeutig.
10. Rechenverfahren sind von den nat. Zahlen her übernehmbar; bis auf die Kommasetzung gelten die gleichen Regeln.
11. DB erlauben einfacheren Größenvergleich und damit Größenvorstellungen.
12. Rechenaufwand bei + und - ist bei DB erheblich geringer als bei gB.

Welche Fehler machen Schüler beim Umgang mit Dezimalbrüchen?

Lehrer sollten die wichtigsten Fehlleistungen genau kennen.

Literaturhinweise:

K. Daubert in Mathematik Lehren 5/1984 S. 20.

S. Krauter u.a. Mathematik 6B, S.67 und S.83.

K. Günther in MUP 1/1987 S. 25 ff bzw. in BzMU 1986 S. 100-103.

F. Padberg in Didaktik der Bruchrechnung, 1989.

Was kann man tun, um die Leistungen zu verbessern und Fehler zu bekämpfen?

- **Veränderung der wichtigsten Zielvorstellungen beim Bruchrechnen:**

Nicht Rechentechnik sondern grundlegendes Zahlverständnis ist erforderlich. Wir benötigen so gut wie keine Bruchrechnung (Ausnahme: Vorbereitung der Algebra), aber einen wohl fundierten Bruchbegriff. Folgerungen für die Unterrichtspraxis!

- **Einsatz tragender Grundvorstellungen und wichtiger Hilfsmittel zur Fundierung eines tragfähigen Bruchbegriffs:**

Skalen (Zahlenstrahl) und Stellenwerttafeln als wichtigste Modelle für die Dezimalbrüche.

- **Schulung des Zahlverständnisses und der Größenvorstellung bei DB und gB:**

Grobes Nähern oder Runden üben. Beispiele zum Überschlagsrechnen bei der Multiplikation bzw. Division von gewöhnlichen Brüchen: Alle Brüche werden auf ganze Zahlen oder Stammbrüche genähert. Mit diesen wird inhaltlich (regelfrei) operiert!

- **Ausnutzen der wechselseitigen Vorteile der gB und der DB:**

Addieren/Subtrahieren geschieht besser in Dezimalform; Multiplizieren/Dividieren ist einfacher in gewöhnlicher Bruchform.

Anhang 1. Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Zahlen begegnen uns unter sehr verschiedenen Aspekten:

Funktion	**Aspekt**	**Beispiel**
Anzahlen	Kardinaler Aspekt	6 Häuser
Nummerierung	Ordinaler Aspekt	Hausnummer 6
Rechenzahlen	Algebraischer Aspekt	6 + 5 = 11
Abbildungen	Operatoraspekt, Zuordner	„das Dreifache“
Nummern (als Namen)	Kodierungsaspekt	PLZ 71634; Tel. 654321
Maßzahlen	Metrischer Aspekt	15 kg = 15 * 1 kg

   Welcher Aspekt lässt einen Ansatz zum Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen zu, welcher nicht?
   Skizzieren Sie damit die möglichen Zugänge zur Bruchrechnung beispielhaft.

2. Nennen Sie Situationen des täglichen Lebens, in denen Brüche vorkommen. Welcher Zahlaspekt steht im Vordergrund? Welche Rechenoperationen treten auf? Kommt man mit konkreten Vorstellungen (insbesondere Größenvorstellungen) aus oder werden algorithmische Kenntnisse verlangt?

3. Welche Konsequenzen hätte der „weitgehende“ Verzicht auf die gewöhnliche Bruchrechnung zugunsten verstärkter Behandlung des Rechnens mit Dezimalbrüchen (Vorteile, Nachteile, Konsequenzen im Zahlaufbau der rationalen Zahlen, Sachrechnen etc.)?

4. Welches sind die Hauptschwierigkeiten der Schüler beim Umgang mit Bruchzahlen und beim Bruchrechnen?

5. Durch Teilen („Verteilen“) von Größen kann man leicht zu Stammbrüchen (in konkreter Form) kommen:
   $\frac{1}{3}$ von □ = $\frac{1}{3}$ * □ = □ : 3 bzw. $\frac{1}{5}$ kg = $\frac{1}{5}$ * 1 kg = 1 kg : 5 = 1 000 g : 5 = 200 g
   Welcher fundamentale Zusammenhang besteht zwischen Größen- und Operatoraspekt?
   Kann man auch durch „Aufteilen“ („Messen“) von Größen Stammbrüche erhalten?

6. Diskutieren Sie Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungsformen für Brüche: Streifenmodell, Kreismodell, Rechtecksmodell, und ggf. andere.

7. Stellen Sie die Grundmodelle zur „Gleichheit von Brüchen“ bzw. zum Kürzen und Erweitern im Operatorkonzept und im Größenkonzept an Beispielen dar.
   Welche Notationsform würden Sie für das Kürzen bzw. Erweitern bevorzugen?
   Welche Gefahr birgt folgende Formulierung:
   „Kürzen heißt, Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren“.

8. Nennen Sie die Hauptschwierigkeiten und Hauptfehlerquellen beim Addieren bzw. Subtrahieren gewöhnlicher Brüche.
   Wie kann man diesen Fehlern vorbeugen?

Ordnen Sie die Schwierigkeiten den Schritten im Verfahren zu.
Vergleichen Sie damit die entsprechenden Operationen in der Dezimalform.

9. a) Nennen Sie Modellvorstellungen für das Vervielfachen und Teilen von Brüchen (mit natürlichen Zahlen). Beispiele. Notationsformen.
   b) Diskutieren Sie folgende Fehler: $7 * \frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ $\qquad \frac{15}{27} : 3 = \frac{5}{9}$
   c) Wie kann man mit Hilfe von a) und der Deutung „$\frac{p}{q}$ von ...“ für „$\frac{p}{q}$ * …“ Regeln für das Multiplizieren von Brüchen gewinnen?
   Zeigen Sie dies an einfachen Beispielen.
   d) Beurteilen Sie folgenden Weg zur Herleitung der Regel für die Division von Brüchen:
   $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = (\frac{2}{5} * 4) : (\frac{3}{4} * 4) = \frac{2*4}{5} : 3 = \frac{2*4}{5} * \frac{1}{3} = \frac{2*4}{5*3} = \frac{2}{5} * \frac{4}{3}$

10. a) Welche reale Situation oder Handlung kann man der Aufgabe $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ als Deutung (Sinngebung) unterlegen? Nennen Sie Beispiele.
   Diskutieren Sie den Wert der Deutung für die Bewältigung der Aufgabe.
   b) Welche Kenntnisse und Vorstellungen sollten Schüler mit dem Begriff „Kehrwert einer Zahl“ verbinden?

11. Welche wichtigen Aspekte des Bruchrechnens werden mit folgenden Gleichungsaufgaben thematisiert?
   a) $\frac{2}{3} * x = 0$ $\quad$ b) $\frac{2}{3} * x = 1$ $\quad$ c) $\frac{2}{3} * x = \frac{2}{3}$ $\quad$ d) $\frac{2}{3} * x < \frac{2}{3}$ $\quad$ e) $\frac{2}{3} * x > \frac{2}{3}$

12. Welche Fehler werden bei folgenden Aufgaben häufig gemacht, wie kann man ihnen entgegenwirken (Prophylaxe und Therapie)?
   a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\quad$ b) $2\frac{1}{3} + 3\frac{4}{5}$ $\quad$ c) $2\frac{1}{3} * 6\frac{2}{5}$ $\quad$ d) $8\frac{1}{2} : 6\frac{4}{5}$ $\quad$ e) 0,74 – 0,3 $\quad$ f) 72,3 : 0,01

13. a) Was kann man tun, um den Schülern grobe „Größenvorstellungen“ vom Wert gewöhnlicher Brüche zu vermitteln?
   b) Gibt es im Bruchrechnen geeignete Methoden der Überschlagsrechnung?
   Wie werden Brüche dabei genähert?
   c) Welcher Überschlag ist jeweils angebracht? $\frac{17}{61} + \frac{69}{5}$ $\qquad 17\frac{13}{58} * \frac{19}{88}$

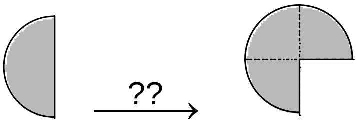
14. Geben Sie drei Brüche an, die zwischen $\frac{31}{101}$ und $\frac{32}{101}$ liegen. Ist das eine für Schüler einfache Aufgabe?
   Wo liegen ggf. die Schwierigkeiten und wie kann man abhelfen?

15. Welche Schwierigkeiten und Fehler treten beim Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen auf? Vergleichen Sie diese Operationen mit denen bei gewöhnlichen Brüchen. Welche Empfehlung sollte man Schülern geben?

17. Zum Spaß: Welche „Brüche“ sind dargestellt? a) $\frac{Wil}{helm}$ $\qquad$ b) $\frac{w}{8}$

18. Ali Baba trifft auf drei verzweifelte Brüder mit einer Herde von 17 Kamelen. Er fragt nach dem Grund ihrer Verzweiflung und sie antworten: „Unser Vater ist gestorben und hat bestimmt, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite ein Drittel und der dritte das restliche Neuntel der Kamele erhalten soll. Wie sollen wir aufteilen?“ Ali Baba stellt sein Kamel zu der Herde. Der erste Sohn bekommt 9, der zweite 6, der dritte 2 Kamele – alles entsprechend den Bestimmungen des Vaters - und Ali Baba hat sein eigenes Kamel wieder. Wie geht das?

19. Was ist die richtige Operation für folgende bildliche Darstellung?



a) $+\frac{1}{4}$ b) $+\frac{1}{2}$ c) $*\ \frac{3}{2}$

20. Welche Notation ist korrekt, welche nicht?

a) 50 DM $\xrightarrow{+20\%}$ 60 DM b) 50 DM * 20% = 10 DM

c) 50 + 20% = 50,2 d) 50 + 20% = 60 e) 20% = 0,2 = $\frac{1}{5}$

21. Falsch gekürzt, trotzdem richtig: $\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.

Welche weiteren solcher „Glücksfälle“ gibt es noch?

22. Bestimmen sie alle Lösungen mit natürliche Zahlen x, y und z (bei a gibt es 2 bei b 10 Lösungen):

a) 1/x + 1/y = ½ b) 1/x + 1/y + 1/z = ½

23. Ein Städter fragt einen scheinbar einfältigen Gänsehirten, ob er denn wisse, wie viele Gänse er zu hüten habe. Dieser antwortet: „Hätte ich nochmal so viele und noch die Hälfte und noch ein Viertel meiner Gänse und du wärst auch noch eine Gans, dann hätte ich 100 Gänse.“

24. a) $4 + \frac{4}{3} = 4 * \frac{4}{3}$ b) $7 - \frac{7}{8} = 7 * \frac{7}{8}$

Für welche Brüche gelten diese Besonderheiten noch?

25. Ein Mann hinterlässt seinen sieben Söhnen eine Anzahl von Goldmünzen. Der erste Sohn erbt die Hälfte der Münzen plus eine halbe Münze, der zweite erbt vom Rest die Hälfte plus eine halbe Münze, der dritte vom Rest die Hälfte plus eine halbe Münze usf. Wie viele Münzen hat der Vater vererbt und wie viele bekam jeder Sohn?

26. Ein Ehepaar vererbt seinen Kindern sein Geldvermögen: Das erste Kind erhält 1 000 DM plus ein Siebtel vom Rest. Das zweite Kind erhält 2 000 DM plus ein Siebtel des Restes. Das dritte Kind erhält 3 000 DM plus ein Siebtel vom Rest usf. Wie viel Geld hat das Ehepaar hinterlassen und wie viele Kinder hatte es?

27. Der Gregorianische Kalender (seit 1582) hat folgende Schaltjahresregelung: Ein Normaljahr hat 365 Tage. In jedem vierten Jahr wird ein Schalttag zusätzlich eingelegt. In jedem 100. Jahr entfällt der Schalttag. In jedem vierhundertsten Jahr wird der Schalttag erhalten. Wie lang ist die durchschnittliche Jahreslänge des Gregorianischen Kalenders?
Vergleichen Sie mit der wahren Jahreslänge von 365,2422 Tagen.
Welche Konsequenz ist aus dem verbleibenden Unterschied zu ziehen?

28. Warum sind die folgenden Rechnungen richtig?

a) $n + \frac{n}{n-1} = n * \frac{n}{n-1}$

b) $n - \frac{n}{n+1} = n * \frac{n}{n+1}$

29. Lösen Sie die folgenden beiden Aufgaben. Geben Sie einen Kommentar zur Aufgabe und zur Lösung.

a) In einer Klasse sind die Hälfte der Schüler Mädchen und ein Drittel der Schüler ist katholisch. Wie viele katholische Mädchen gibt es in der Klasse?

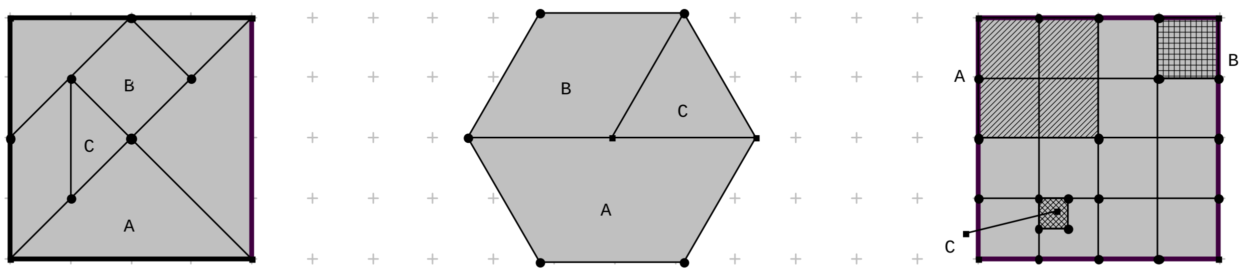
b) Jedes vierte Auto in Deutschland ist ein VW. Zwei Fünftel der Autos von VW sind vom Typ „Golf“. Wie viele der Autos in Deutschland sind vom Typ „Golf“?

30. Aufgaben zum Erkennen von Bruchteilen:

a) Welche Fehler bzw. Schwierigkeiten der Schüler sind zu erwarten?

b) Welche Aspekte des Bruchbegriffs werden mit diesen Aufgaben betont?

Aufgabe 1:



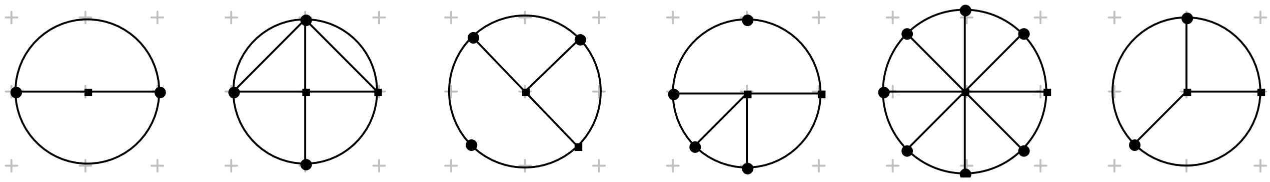
(I) (II) (III)

a) Zeichne die Figuren in dein Heft.

b) Welchen Bruchteil der gesamten grauen Fläche bedecken jeweils die Flächenstücke A, B bzw. C ?

c) Welcher Bruchteil von A ist B, welcher C?

Aufgabe 2:



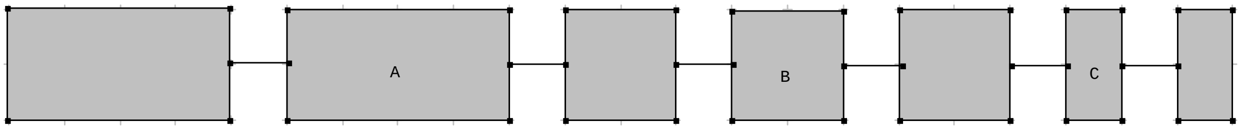
(I) (II) (III) (IV) (V) (VI)

a) Zeichne die Figuren in dein Heft.

b) Welchen Bruchteil der gesamten Kreisfläche machen jeweils die einzelnen Teilstücke aus?

c) Wie verhalten sich die Teilstücke untereinander?

Aufgabe 3:



a) Welchen Bruchteil der gesamten grauen Fläche betragen jeweils die Teile A, B und C?

b) In welchem Verhältnis stehen die Flächengrößen von A, B und C zueinander?

Aufgaben zum Bruchrechnen in dezimaler Form:

1. a) Wie sieht der Nenner eines *abbrechenden* Dezimalbruchs aus, wenn man ihn in gewöhnlicher Bruchform darstellt? Wie nach etwaigem weiterem Kürzen?

   b) Warum kann man einen vollständig gekürzten gewöhnlichen Bruch, in dessen Nenner nur die Primfaktoren 2 oder 5 vorkommen, auf eine Zehnerpotenz als Nenner erweitern? Welche Form hat dieser Bruch als Dezimalbruch? Beispiele!

2. a) Mit folgender Methode kann man jeden periodischen Dezimalbruch in gewöhnliche Bruchform bringen:

   Beispiel: $x = 0{,}23\overline{456} = 0{,}23456456\ldots$

   $1000 \cdot x = 234{,}56456456\ldots$

   $999 \cdot x = 234{,}33$

   $$x = \frac{234{,}33}{999} = \frac{23433}{99900}$$

   Führen Sie die Methode an mehreren Beispielen durch.

   b) Welche Nenner erhält man bei *reinperiodischen* Dezimalbrüchen? Warum sind diese Nenner stets *teilerfremd* zur Basis 10? Beispiele durchführen!

   c) Zeigen Sie an Beispielen: Wenn der Nenner eines gekürzten Bruches zur Basis 10 teilerfremd ist, dann wird die Dezimalentwicklung stets reinperiodisch.

3. Zeigen Sie an Beispielen in beiden Richtungen:

   Die Dezimaldarstellung eines gekürzten Bruchs ist genau dann *gemischtperiodisch*, wenn der Nenner neben 2 oder 5 noch mindestens einen weiteren Primfaktor enthält.

4. Zeigen Sie an Beispielen: Wenn Schüler das Stellenwertsystem verstanden haben und konsequent die Stellenwerttafel benützen, dann ist schriftliches Addieren und Subtrahieren bei Dezimalbrüchen genau dasselbe wie bei natürlichen Zahlen.

   Welche Fehler sind bei folgenden Aufgaben nahe liegend („Komma-trennt-Fehler")?

   0,8 + 0,5 =   0,2 * 0,7 =   7,8 + 5,6 =   27,30 + 6,3 =   4,2 * 2,4 =

5. Multiplizieren in Dezimalform:

   a) Man kann Dezimalzahlen genau so schriftlich multiplizieren, wie natürliche Zahlen. Es bleibt nur am Ende zu entscheiden, in welcher Spalte die Einer stehen, wo also das Komma gesetzt werden muss. Führen Sie dies an einem Beispiel durch. Multiplizieren Sie zunächst völlig ohne Berücksichtigung des Kommas. Identifizieren Sie dann die Spalte, in der die Einer stehen und setzen das Komma richtig.

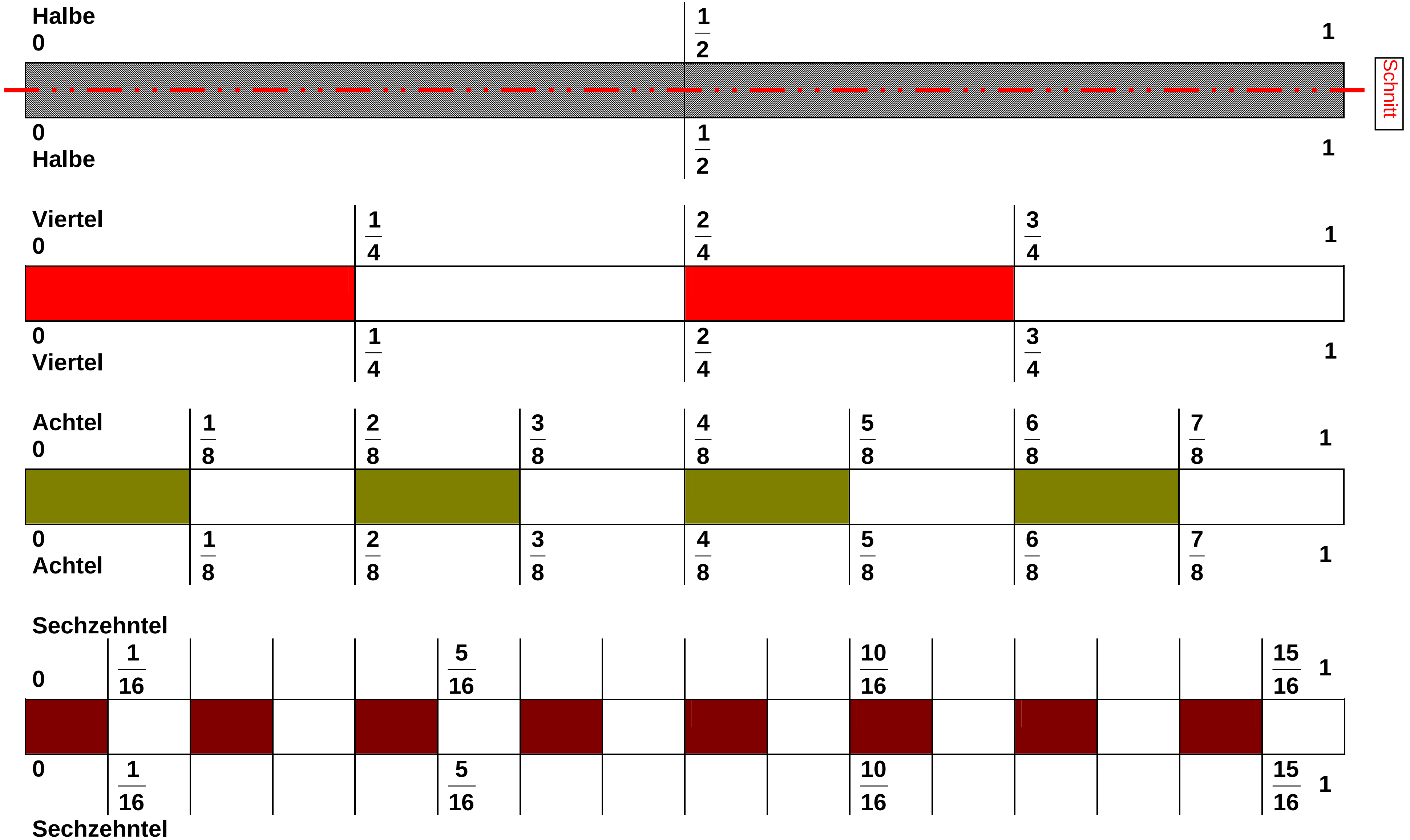
b) Wie kann man die übliche Regel – „Kommastellen der beteiligten Faktoren abzählen und so viele Nachkommastellen im Produkt setzen, wie die Summe angibt“ – anschaulich klarmachen?

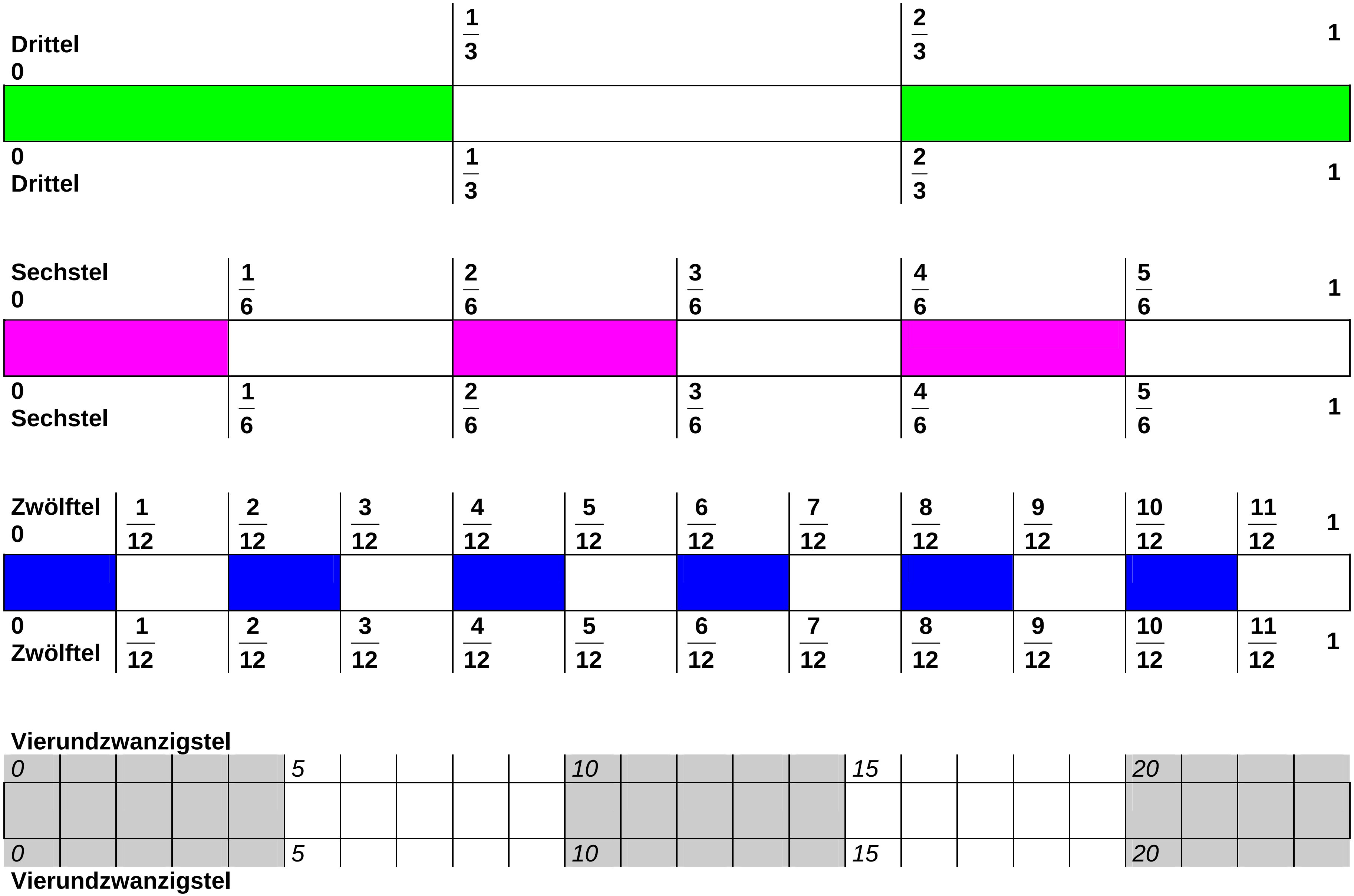
6. Dividieren in Dezimalform:

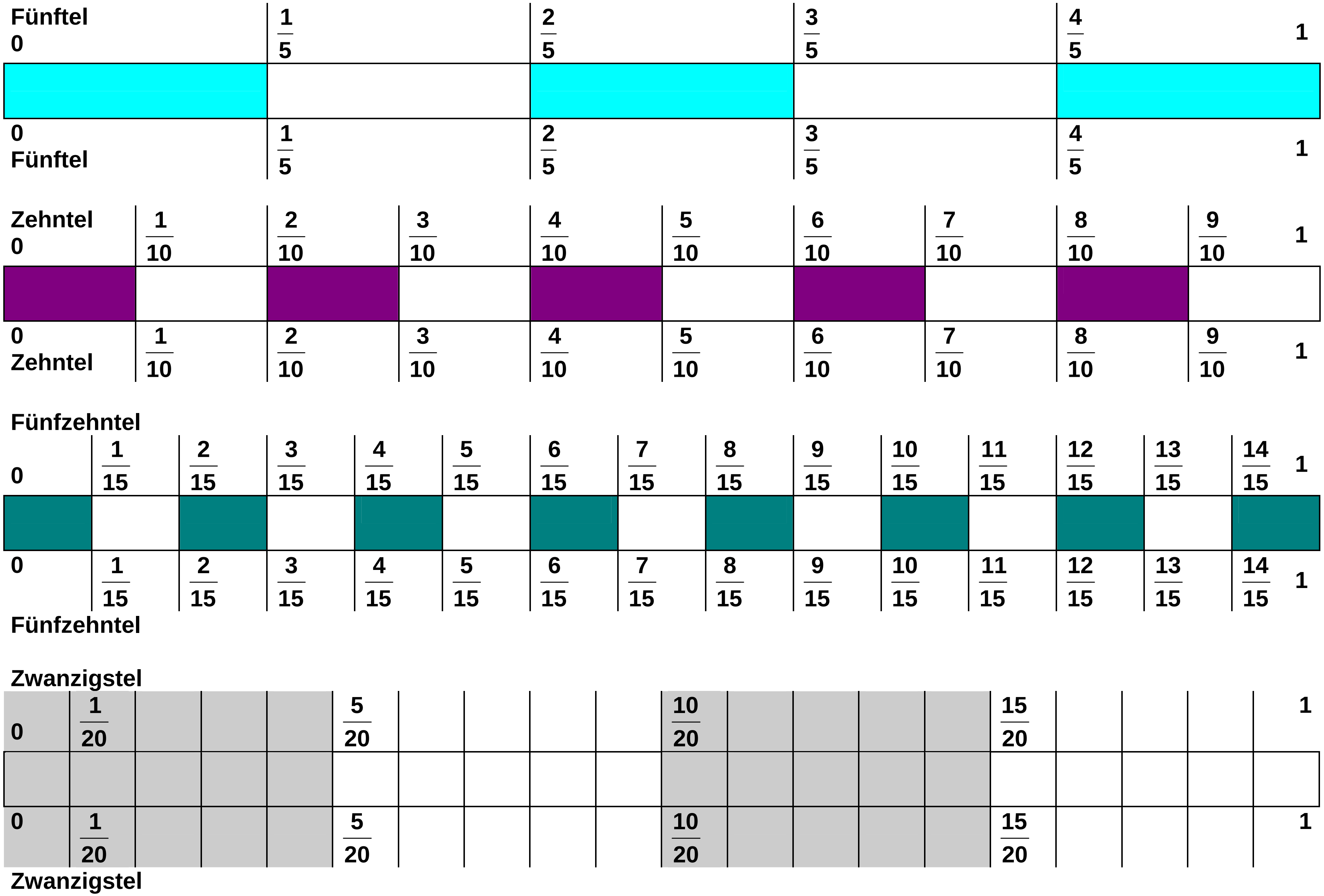
   Warum kann man jede Division durch eine Dezimalzahl zurückführen auf eine dazu äquivalente Division mit ganzzahligem Divisor? (Beispiel: 27,359 : 4,8 = 237,59 : 48)

   Führen Sie einige Divisionsaufgaben unter Benutzung der schwedischen Darstellungsform durch.

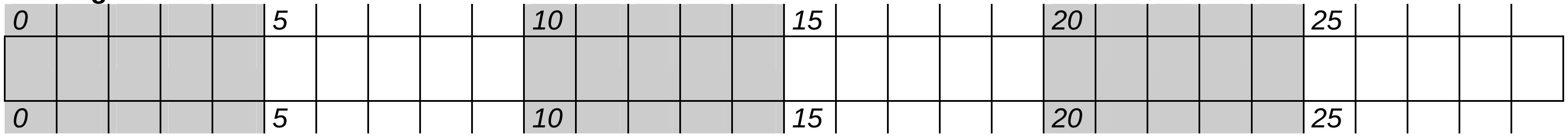
Anhang 2: Darstellungshilfen zum Bruchrechnen: Bruchstreifen (Vorlagen)




Drittel
0
1/3
2/3
1
0
Drittel
1/3
2/3
1
Sechstel
0
1/6
2/6
3/6
4/6
5/6
1
0
Sechstel
1/6
2/6
3/6
4/6
5/6
1
Zwölftel
0
1/12
2/12
3/12
4/12
5/12
6/12
7/12
8/12
9/12
10/12
11/12
1
0
Zwölftel
1/12
2/12
3/12
4/12
5/12
6/12
7/12
8/12
9/12
10/12
11/12
1
Vierundzwanzigstel
0
5
10
15
20
0
5
10
15
20
Vierundzwanzigstel

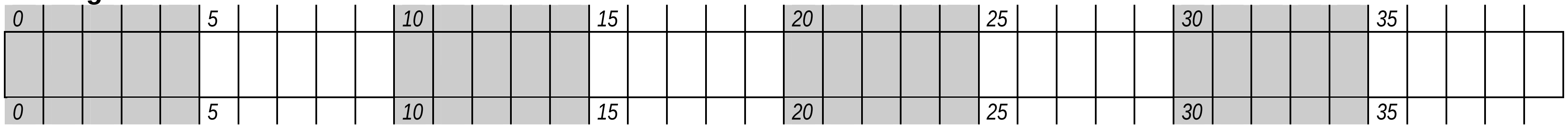

Fünftel
0
1/5
2/5
3/5
4/5
1
Zehntel
1/10
2/10
3/10
4/10
5/10
6/10
7/10
8/10
9/10
Fünfzehntel
1/15
2/15
3/15
4/15
5/15
6/15
7/15
8/15
9/15
10/15
11/15
12/15
13/15
14/15
Zwanzigstel
1/20
5/20
10/20
15/20

Dreißigstel



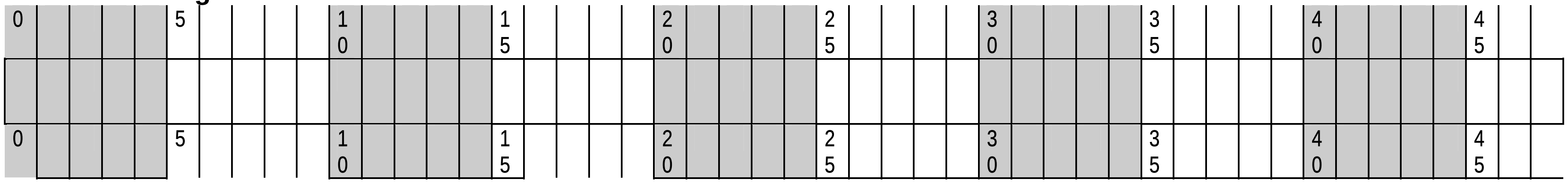
Dreißigstel

Vierzigstel



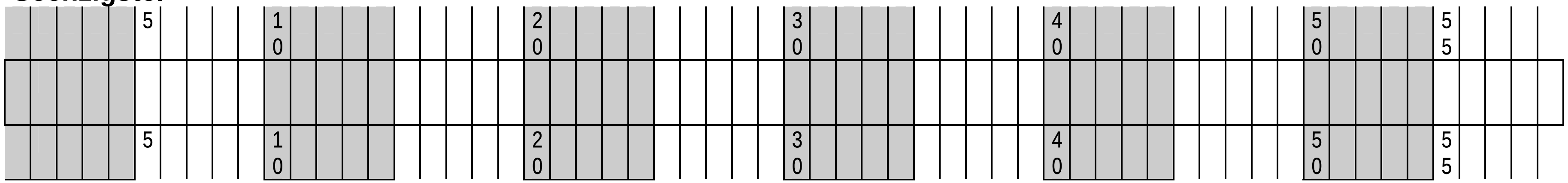
Vierzigstel

Achtundvierzigstel



Achtundvierzigstel

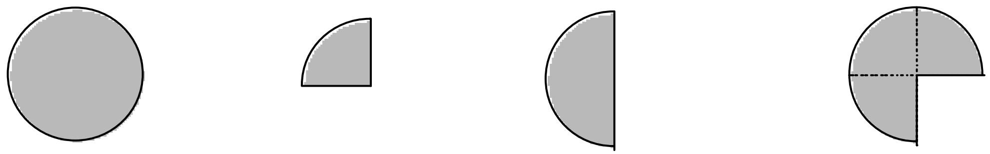
Sechzigstel



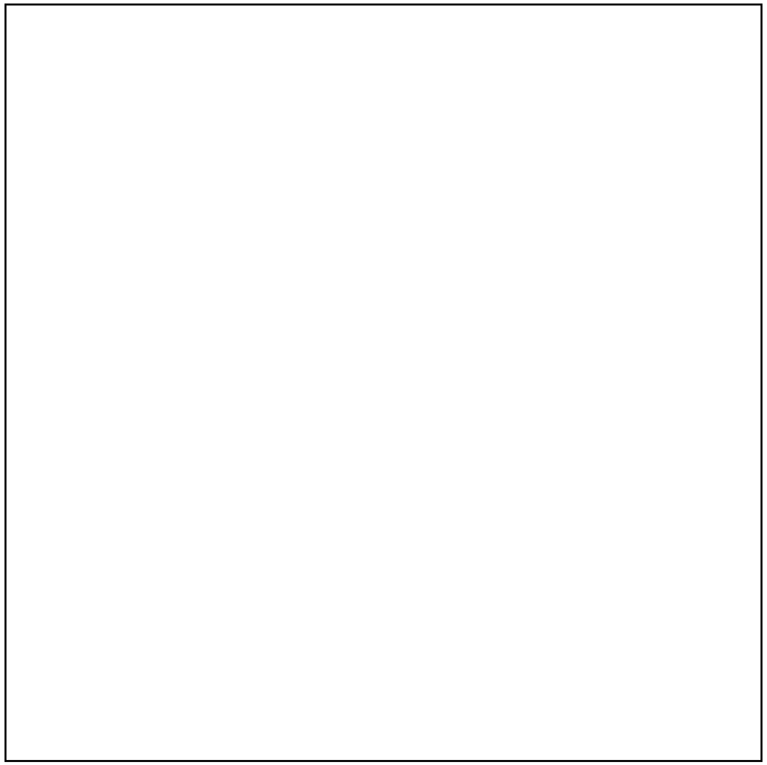
Sechzigstel

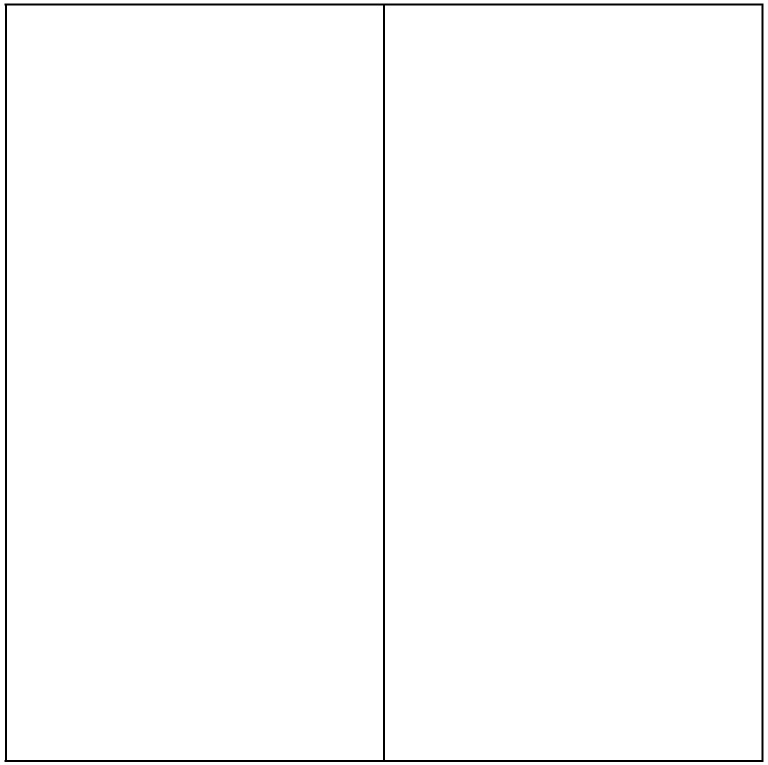
Anhang 3: Weitere Hilfsmittel zur Veranschaulichung beim Bruchrechnen

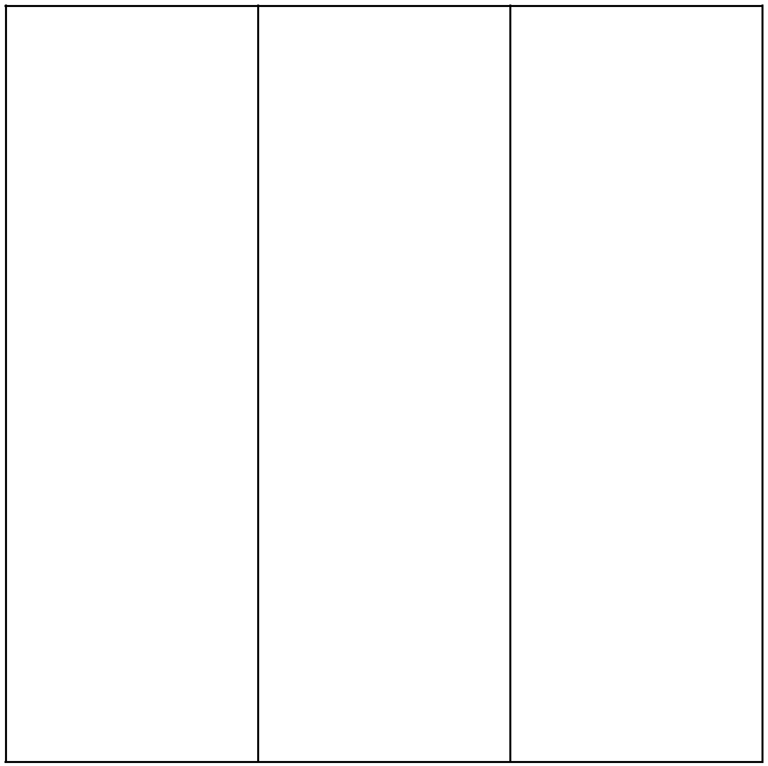
Vorlagen für Darstellungen zum Bruchrechnen am Kreismodell: Halbe und Viertel.

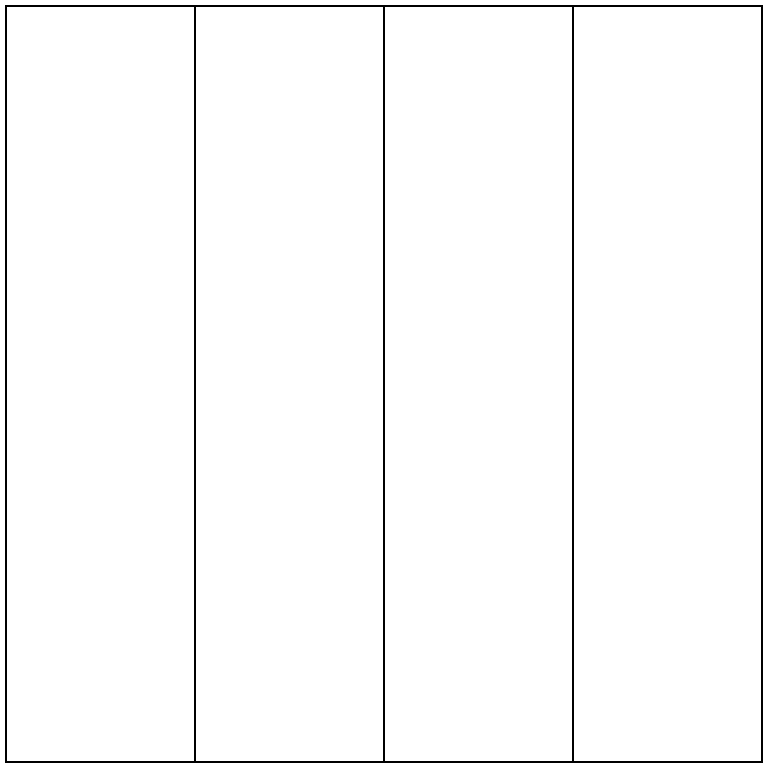


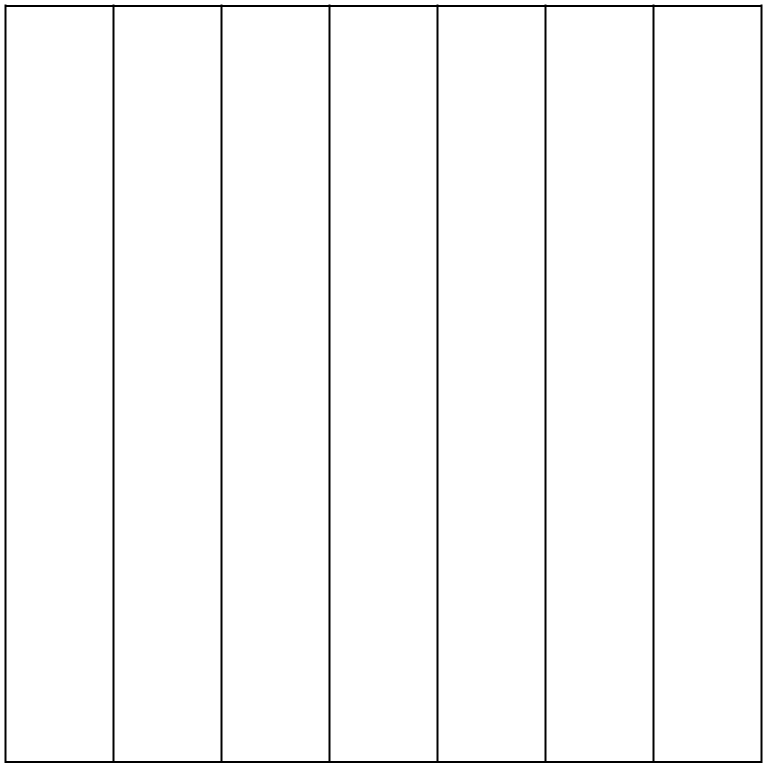
Bruchquadrate:

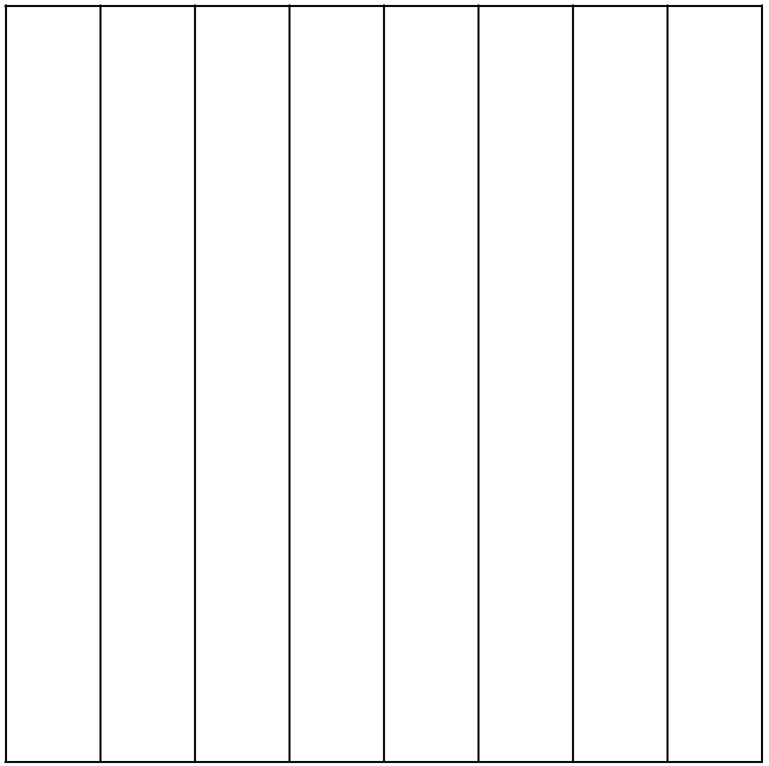




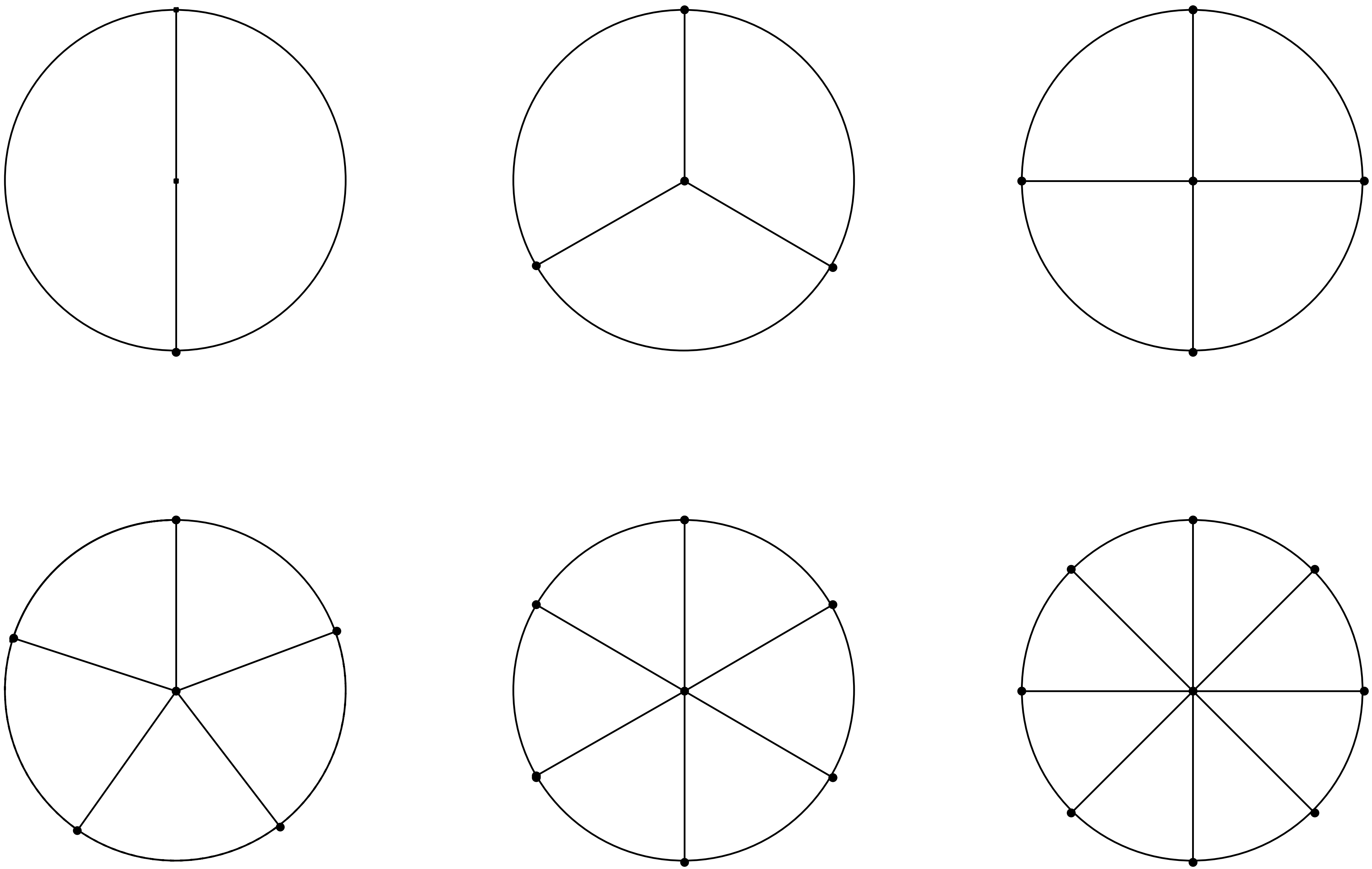


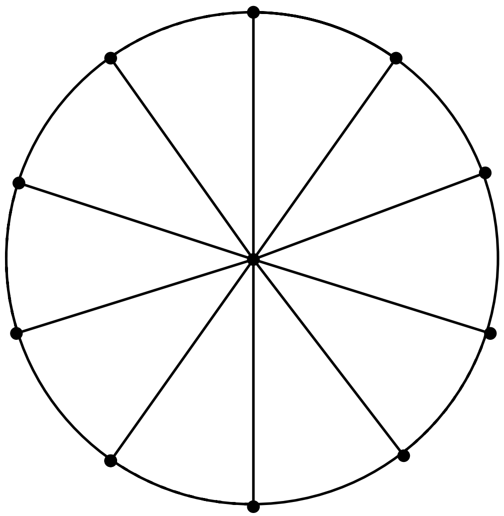


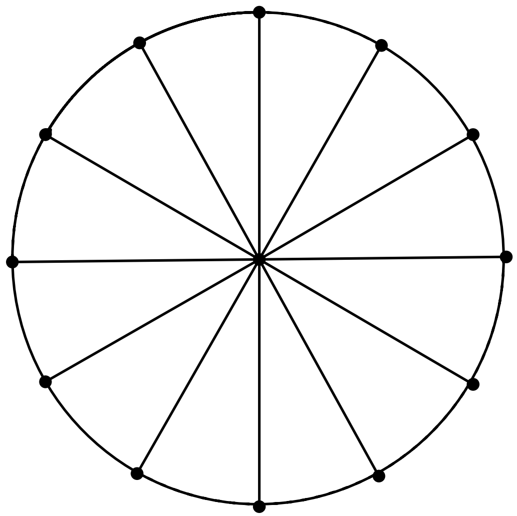


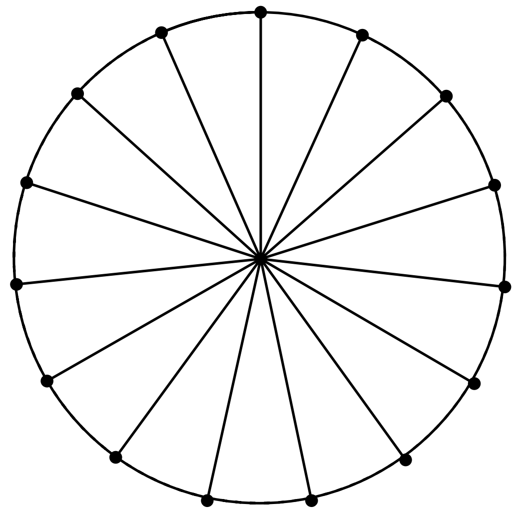


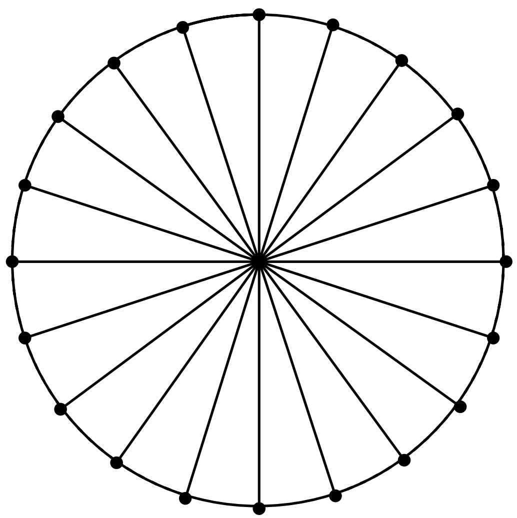
Bruchrechnen in Kreisform (Kuchenmodell):

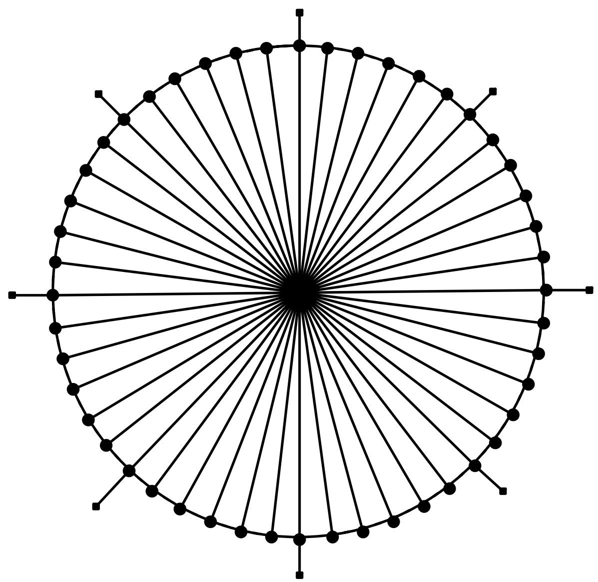


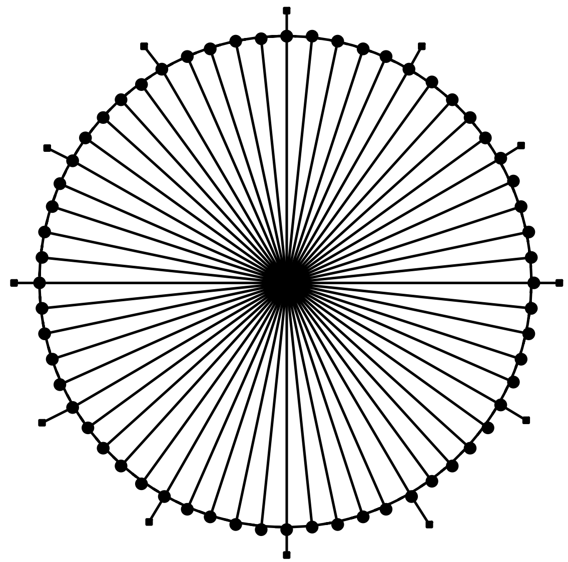












II. Positive und negative rationale Zahlen

1. Symmetrische Skalenbereiche

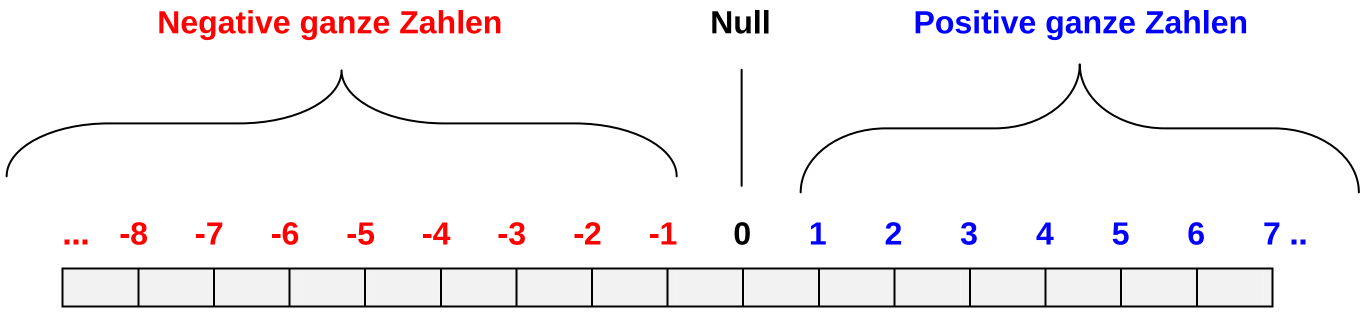
Als ersten Schritt bei der Einführung *negativer* – zunächst nur *ganzer* – Zahlen wird man den bisherigen Zahlenstrahl zur beidseitig unbegrenzten Zahlengerade erweitern und so zu einem ***symmetrischen Skalenbereich*** gelangen.

Für die Schüler durchaus bekannte und geeignete Modelle dafür bieten sich bei folgenden Sachbereichen an:

- Temperaturskala
- Pegel- oder Meereshöhen
- Kontostände
- Koordinaten

Ziel dieser einführenden Arbeit ist es, eine symmetrische Skala der ganzen Zahlen mit der darin gültigen Ordnung aufzubauen. Ob hierbei schon Begriffe wie ***Vorzeichen*** und ***Betrag*** (= Abstand vom Nullpunkt auf der Skala) einer Zahl eingeführt werden müssen, sei dahingestellt.

Die folgende Skizze beschreibt das Endprodukt am Beispiel der ganzen Zahlen:



Eine ganze Zahl a ist ***kleiner als*** eine ganze Zahl b, wenn a ***weiter links*** auf der Zahlengerade steht als b, man schreibt dafür a < b.

Beispiele:

- -13 < -9 9 < 13 -13 < 27 - 15 < 15 3 > - 158 etc.
- Alle negativen Zahlen sind kleiner als 0, alle positiven größer als 0.
- Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive Zahl.

Schon in dieser Phase kann man – vorsichtig beginnend – ***Abstände*** zwischen verschiedenen Marken thematisieren und bestimmen lassen und ***Zunahmen*** bzw. ***Abnahmen*** auf den Skalen betrachten (Z-O-Z-Modell), also erste Rechenoperationen (Addition und Subtraktion) angehen. Man bleibe jeweils sowohl in der Sprechweise als auch in der Notationsform am jeweiligen Modell orientiert.

Zur Sprechweise:

Vor Begriffspaaren wie „wärmer - kälter“, „reicher - ärmer“, „höher - tiefer“ in den Modellen sei gewarnt, da sie störend auf die Ausbildung der einheitlich geregelten Ordnung einwirken können. Besser ist höherer - niedrigerer Temperaturwert, höherer - niedrigerer Kontostand, höhere - niedrigere Meereshöhe etc. weil damit jeweils die Größer-Relation an der Skala selbst festgemacht wird.

Zwischenbemerkung:

Die ***Interpolation der gebrochenen rationalen Zahlen*** in dezimaler (relativ leicht) und in Bruchform (schwieriger) kann an jeder beliebigen Stelle erfolgen und sollte allmählich den Umgang mit den negativen Zahlen ausdehnen auch auf die nicht ganzen rationalen Zahlen. Mit folgender Schwierigkeit ist zu rechnen:

Der Wert - 3,5 wird in der Regel rechts von -3 auf der Zahlengerade eingetragen, da bekanntlich 3,5 rechts von 3 liegt. Hier ist Vorsicht und Übung vonnöten. Die Schüler müssen häufig *Skalenwerte eintragen*, *ablesen* und *Skalen erstellen* und Werte richtig *einordnen*.

2. Verschiebungen auf Skalenbereichen

Im zweiten Schritt, den man bereits vorsichtig in jedem Modell mit dem ersten Schritt verbinden kann, werden nun ***Verschiebungen auf Skalenbereichen als tragende Modellvorstellungen für Addition und Subtraktion*** entwickelt. In dieser Stufe werden ausschließlich *positive* Zahlen hinzuaddiert bzw. abgezogen.

Ausgehend von einem Skalenwert tritt eine Veränderung (Zunahme oder Abnahme) ein und führt zu einem neuen Skalenwert. Man spricht deshalb vom ***Zustand – Operator – Zustand – Modell (Z-O-Z-Modell)***.

Die Veränderungen selbst sind Operatoren, also von anderer Art als die Skalenwerte (Zustände). Im Einzelnen handelt es sich bei

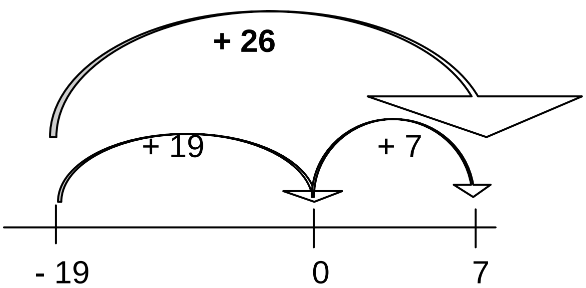
Temperaturen	um	Abkühlung	bzw.	Erwärmung
Kontoständen	um	Einzahlungen	bzw.	Auszahlungen
Meereshöhen	um	Steigen	bzw.	Fallen
Koordinaten	um	Verschiebung nach links	bzw.	Verschiebung nach rechts

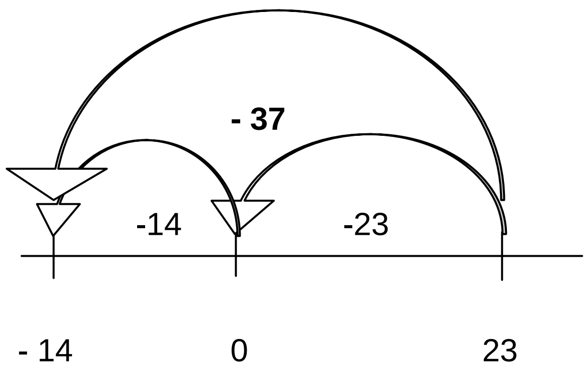
Es erhebt sich die Frage, ob dies auch in der Notationsform zum Ausdruck gebracht werden soll:

$$-13°C \xrightarrow{+18\text{ Grad}} +5°C \qquad\qquad -7 \xrightarrow{+10} 3$$

Zwischen diesen beiden extremen Formen (ganz am inhaltlichen Bereich orientiert oder ohne Notationsbezug zum Inhaltsbereich nur in Zahlform) wird man sich für eine Notationsform entscheiden müssen bzw. man wird schrittweise den Weg der Abstraktion von der ersten bis zur letzten Form gehen.

In dieser Phase ist der ***Nullübergang*** als besonderes Problem zu behandeln. Man macht anfangs stets eine Skizze, bei der der Übergang in zwei Schritte zerlegt wird: Zunächst bis zur 0 dann der Rest:





Vom Typ der Z-O-Z-Aufgaben sind alle ***drei Grundaufgaben*** (Endzustand gesucht; Anfangszustand gesucht; Operator gesucht) bis zur Sicherheit einzuüben. Dabei kann allmählich von der inhaltlichen Einkleidung bis zur rein algebraischen Endform der Notation fortgeschritten werden:

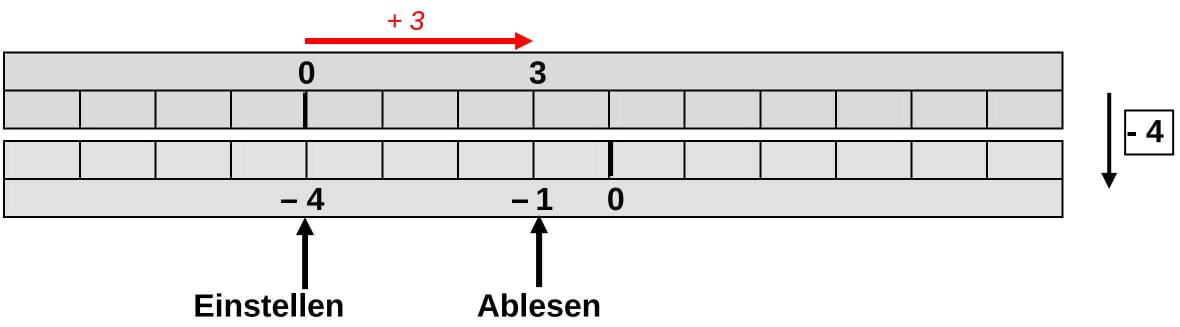
(– 26) + 15 = – 11 bzw. **13 – 17 = (– 4)**

Alle weiteren Additions- und Subtraktionsaufgaben werden im Folgenden auf dieses Grundmodell zurückgeführt, dies ist also entscheidendes Fundament.

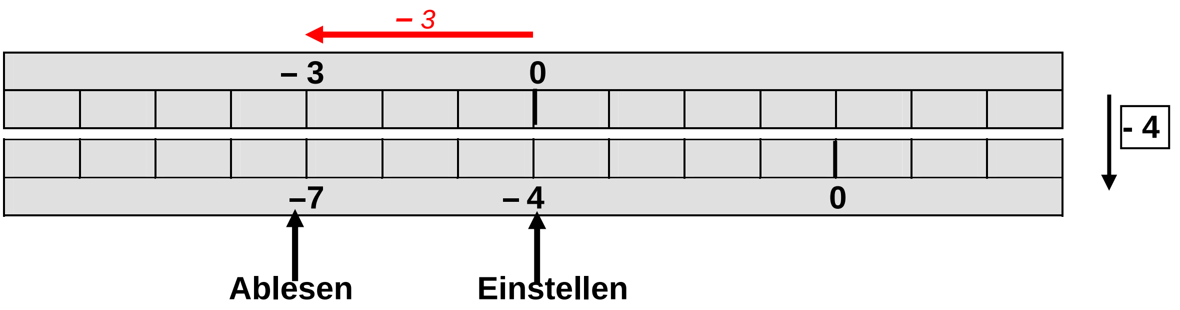
Zum Ausführen der Rechnungen im Grundmodell (Zuaddieren bzw. Subtrahieren einer positiven Zahl) kann man auch ein einfaches ***Rechenstabmodell*** einsetzen:

Dazu benötigt man zwei einander gegenüberstehende beschriftete Zahlengeraden. Am besten schneidet man eine solche Zahlengerade, die oben und unten beschriftet ist längs durch, dann hat man beide Streifen. Wir zeigen dazu zwei Beispiele:

(- 4) **+ 3** = -1. (Bei dieser Einstellung kann man alle **– 4** - Aufgaben ablesen)



(- 4) **– 3** = -7. (Bei dieser Einstellung kann man alle **– 4** - Aufgaben ablesen)



3. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Voraussetzung für das Folgende ist die rechnerische Beherrschung des ***Zuaddierens (Addieren) und Wegnehmens (Subtrahieren) positiver rationaler Zahlen*** zu beliebigen rationalen Zahlen auch mit Nullübergang entsprechend Abschnitt 2:

*Alle Additionen und Subtraktionen **beliebiger rationaler Zahlen** werden auf den Fall des Zuaddierens bzw. Subtrahierens von **positiven** rationalen Zahlen zurückgeführt!*

Der einfachste und überzeugendste Weg – für Schüler ggf. auch nachvollziehbar – ist der Weg über Permanenzreihen**.**

Fragestellung: Was ist das Ergebnis der Operation (Aufgabe) 5 + (- 3) = ?

Man setzt folgende Permanenzreihen an:

5 + 4 = 9	(- 7) + 4 =	9 – 4 =	(-17) - 4 =
5 + 3 = 8	(- 7) + 3 =	9 – 3 =	(-17) - 3 =
5 + 2 = 7	(- 7) + 2 =	9 – 2 =	(-17) - 2 =
5 + 1 = 6	(- 7) + 1 =	9 – 1 =	(-17) - 1 =
5 + 0 = 5	(- 7) + 0 =	9 – 0 =	(-17) - 0 =
5 + (-1) = 4 = 5 – 1	**(- 7) + (-1) =**	**9 – (– 1) =**	**(-17) – (– 1) =**
5 + (-2) = 3 = 5 – 2	**(- 7) + (-2) =**	**9 – (– 2) =**	**(-17) – (– 2) =**
5 + (- 3) = 2 = 5 – 3	**(- 7) + (-3) =**	**9 – (– 3) =**	**(-17) – (– 3) =**
5 + (- 4) = 1 = 5 – 4	**(- 7) + (-4) =**	**9 – (– 4) =**	**(-17) – (– 4) =**
....			

Eine sinnvolle Fortsetzung der Permanenzreihen drängt sich geradezu auf und man kommt zu folgender Regel:

Addition einer negativen Zahl (- a) ist Subtraktion der positiven Zahl a:

$$\square + (-a) = \square - a$$

Subtraktion einer negativen Zahl (- a) ist Addition der positiven Zahl a:

$$\square - (-a) = \square + a$$

Man kann die beiden Regeln zu einer einzigen zusammenfassen, aber das muss nicht unbedingt sein: ***Subtraktion einer Zahl ist Addition der Gegenzahl***.

Mit diesen beiden Regeln kann man – wie angekündigt – alle Fälle von Additionen und Subtraktionen im Bereich der rationalen Zahlen zurückführen auf das Zuaddieren bzw. Subtrahieren von positiven rationalen Zahlen. Wenn man also letzteres beherrscht, ist das Addieren und Subtrahieren damit – prinzipiell – geschafft und es bleiben nur noch die rechnerischen Schwierigkeiten.

Beispiele sollen dies verdeutlichen:

17 **+** (- 13) = 17 **–** 13 = 4	(- 5) **+** (-7) = (-5) **–** 7 = (-12)
2,8 **+** (- 4,6) = 2,8 **–** 4,6 = (-1,8)	(- 3,7) **+** (- 2,9) = (-3,7) **–** 2,9 = (- 6,6)
17 **–** (- 13) = 17 **+** 13 = 30	(- 5) **–** (-7) = (-5) **+** 7 = 2
2,8 **–** (- 4,6) = 2,8 **+** 4,6 = (-1,8)	(- 3,7) **–** (- 2,9) = (-3,7) **+** 2,9 = (-0,8)

Die Unterscheidung zwischen ***Rechenzeichen*** und ***Vorzeichen*** kann leicht mit Hilfe von Zahl- und Operationskärtchen verdeutlicht werden:

Wie kann man mit Zahlkärtchen die Aufgabe $5 - (-7) =$ legen?

Man benötigt die Zahlkärtchen (Zahl mit Vorzeichen) $\boxed{5}$ und $\boxed{-7}$ und das Operationskärtchen (Rechenzeichen) $\boxed{-}$.

Welche „Aufgaben“ kann man mit den Zahlkärtchen $\boxed{5}$, $\boxed{-7}$ und $\boxed{9}$ zusammen mit den Operationskärtchen $\boxed{+}$ bzw. $\boxed{-}$ legen?

Durch folgende Vereinbarung – teilweise bisher schon verwendet – kann man Vorzeichen sparen:

- ***Bei positiven Zahlen wird stets auf das Vorzeichen verzichtet.***
- ***Stehen zwei Vor- oder Rechenzeichen direkt nebeneinander, so wird vereinfacht.***

Beispiele: $(+5) = 5$

$+ (+5) = +5$ $\qquad - (+5) = -5$ $\qquad + (-5) = -5$ $\qquad - (-5) = +5$

$\blacksquare + (+5) = \blacksquare + 5$ $\qquad \blacksquare - (+5) = \blacksquare - 5$ $\qquad \blacksquare + (-5) = \blacksquare - 5$ $\qquad \blacksquare - (-5) = \blacksquare + 5$

Es empfiehlt sich, möglichst lange die negativen Zahlen mit Klammern zu schreiben, also (–7) an Stelle von –7.

Bei der vorgestellten Konzeption kommt man mit einem Minimum an Regeln aus. Der Vorteil dabei ist, dass man alle Fälle auf das anschaulich begründete Vorwärts- und Rückwärtsschreiten auf der Zahlengerade zurückführt. Die häufig kompliziert mit Hilfe des Betrags formulierten Regeln sind nicht unbedingt hilfreich!

Selbstverständlich gibt es durchaus auch andere Modelle und Veranschaulichungsformen wie z. B. das Rechnen mit Pfeilen (Zusammensetzung von Vektoren) oder das Schrittmodell, bei dem das Vorzeichen die Blickrichtung und das Rechenzeichen die Schrittrichtung (vorwärts oder rückwärts) angibt.

Wo treten Additionen und Subtraktionen von rationalen Zahlen auf?

Berechnungen von Mittelwerten von Temperaturen: $\dfrac{(+5°C) + (-7°C) + (+13°C) + (-3°C)}{4}$

Berechnungen von Temperaturunterschieden: $(+17°C) - (-5°C) = 22$ Grd.

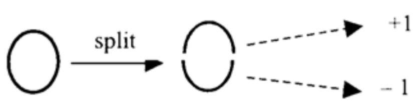
Zum Schluss sei auf ein ungewöhnliches - aber durchaus originelles - Modell von Peter Kaner zur Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen hingewiesen, das in folgendem Auszug aus THE TIMES EDUCATIONAL SUPPLEMENT vom 25.3.1983 dargestellt ist:

Ein ungewöhnliches Modell zur Addition und Subtraktion negativer Zahlen

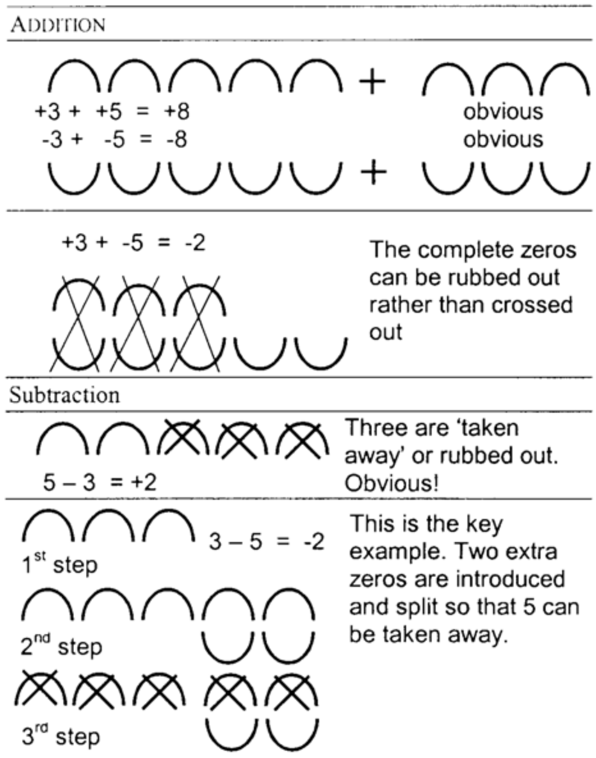
2.6 Ein ungewöhnliches Modell

From abstract to concrete
Teaching negative numbers by Peter Kaner

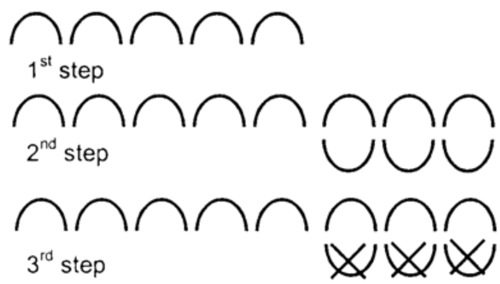
On the BBC computer programme, there was an expert talking about using the computer to write music. "There are three parameters for musical sounds, pitch, duration and volume." He went on to explain that volume is entered on a 15-point scale, -15 to 0. "-15 gives the loudest. It's a bit odd but you get used to it."
This seemed to me to be the zaniest ever in a long time of lunatic application of negative numbers. I can only assume that the programmer had his own reasons or perhaps had never heard of *p, pp, ppp, f, ff ,fff.* **Negative numbers have always baffled the majority of children, especially the concrete minded and they have watched with confusion the attempts of their teachers to prove the properties of negatives by reference to the real world. These applications such as going upstairs downwards or to the right leftwards have appeared eccentric to say the least. The fact is that the world gets by very comfortably without negatives by the use of a few appropriate signal words such as ‚below' (4 degrees below zero) or ‚overdraft' (Dear sir, I regret to inform you that your overdraft has risen by a further £100, in spite of ....etc).** Even when the redoubtable number line is used as a means of explaining negatives it is not clear why right should be positive and left negative. Anything that is done with a graph can be done with its mirror image so choice of left or right is only a matter of convention. It is not even vital to have "up" as positive and "down" as negative, temperature for example gets lower as you go higher in the atmosphere. (Perhaps this is why the programmer chose his weird scale... It is extremely negative to have maximum volume of sound blaring from the speaker output of a computer, especially if the composition is by a computer freak!).
There is, thank goodness, a completely abstract way of teaching negative numbers which rarely fails to interest children and almost always gives them a reliable technique for dealing with negative numbers when they do occur in a genuine application. The idea starts from the fact that zero is not indivisible but can be divided in innumerable ways into a pair of of opposites. Perhaps separated or split would be better words to use than divided. This splitting of zero provides the most valuable introduction and can be shown diagrammatically as a split zero with the parts labelled +1 and –1.



A three dimensional model could be made from coconut shells or, if you want an ancient cultural symbol to represent the relationship between positive, negative and zero, what about the yin yang, the eternal symbol of male and female. The techniques of addition and subtraction follow in the simplest possible way as I have shown in the examples.



5 – (-3) = 8 follows the above procedure but this time three zeros are introduced so that –3 can be subtracted.



If you need a further illustration of this process, a small topological distortion produces the sociological phenomenon of men and women looking for partners at a party. 5 – (-3) becomes the story ... „there are five spare men at a party, three women go home so now there are eight spare men at the party. (Very sad!)"

Historians tell us that negative numbers were developed relatively late in the course of mathematics and even now many teachers would hesitate before giving a rigorous proof of the well known rule „the product of two negatives is a positive". In fact, the proof is extremely simple yet subtle. One is reminded of the way a Mozart melody can have simplicity and at the same time carry great emotion and be very difficult to play.

4. Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Zunächst einmal ist zu sagen, dass mit der Einführung der *Bruchzahlen* und damit der Kehrzahl zu jeder Zahl jede *Division* durch eine Multiplikation mit der Kehrzahl ersetzt werden kann. Daher ist es nicht notwendig, Regeln für Multiplikation und Division zu entwickeln, es genügen solche allein für die Multiplikation.

So wie das Bruchrechnen die Division erübrigt hat (Division = Multiplikation mit der Kehrzahl) so hat das Rechnen mit *negativen Zahlen* die *Subtraktion* erübrigt, denn Subtraktion einer Zahl ist nichts anderes als Addition der Gegenzahl.

Diese grobe Betrachtung wirft auch ein strukturelles Licht auf die Natur der Zahlbereichserweiterungen bis hin zum Körper Q der rationalen Zahlen.

Da es keine nahe liegenden Umweltbezüge für das Multiplizieren mit negativen Zahlen gibt, erfolgt die Herleitung der entsprechenden Regeln vor allem im Zusammenhang und im Hinblick auf Verwendung in der Algebra, also ziemlich abstrakt.

Das Multiplizieren von negativen Zahlen kann in mehreren Schritten geklärt werden:

a) Vervielfachen einer negativen Zahl:

Unter dem Produkt 4 * (-3) versteht man das wiederholte Addieren der Zahl (-3):

4 * (- 3) = **(- 3) + (- 3) + (- 3) + (- 3) = - 12 =** - (4 * 3)**. Damit ist dieser Fall geklärt.**

b) Negative Zahl mal positive Zahl:

Das Produkt (-4) * 3 kann nicht auf diese Weise erklärt werden. Die naheliegendste Forderung ist die nach weiterer Gültigkeit des Kommutativgesetzes, also
(-4) * 3 = 3 * (-4) und dieses Produkt kann gemäß a) erklärt werden:

(- 4) * 3 = 3 * (- 4) = - (3 * 4)

Hinweis:
Selbstverständlich kann und sollte man die so geklärten Fälle auch noch durch entsprechende Permanenzreihen als sinnvoll erscheinen lassen und unterstützen.

c) Negative Zahl mal negative Zahl:

Die bekannte Regel „minus mal minus gibt plus“ kann auf sehr verschiedene Weisen motiviert, erarbeitet, veranschaulicht oder abgeleitet werden:

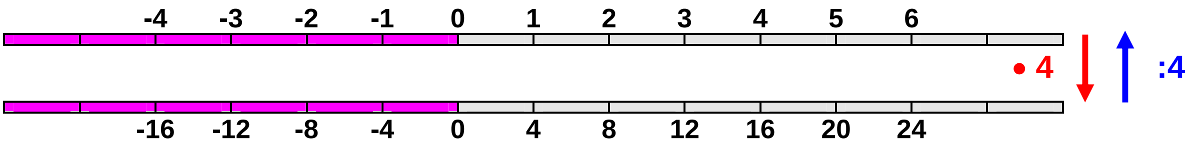
- Permanenzreihen: 3 * (-3) = - 9
  2 * (-3) = - 6
  1 * (-3) = - 3
  0 * (-3) = 0
  (-1) * (-3) = - 3
  ....
- Fortsetzung der Wertetabelle für eine Geradengleichung:
  Man stelle eine Wertetabelle für die Gleichung y = (-3) * x + 12 auf und setze sie für negative x-Werte fort (Permanenzprinzip).
- Deduktion: (-a)* (-b) = - ((-a) * b) entsprechend dem Ergebnis von a)
  = - (- (a * b)) entsprechend dem Ergebnis von b)
  = a * b

Dieser Weg ist sicher sehr abstrakt und schwierig und hat noch einige Tücken, da z. B. a) ja zunächst nur für positiven ganzzahligen ersten Faktor hergeleitet wurde.

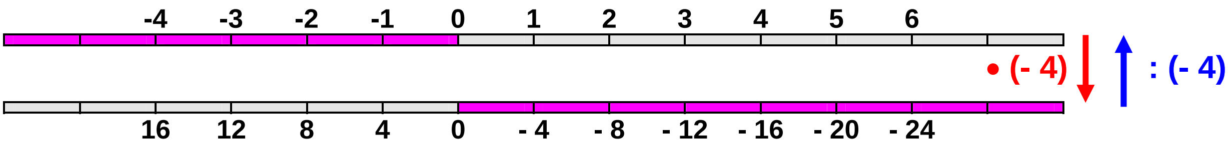
- Beanspruchung der Rechengesetze (Permanenz der Rechengesetze):
  Wie müssen wir (-3) * (-4) festlegen, damit z. B. das Distributivgesetz weiterhin gültig bleibt?
  (-3) * [4 + (-4)] = (-3) * 0 = 0 = (-3) * 4 + (-3) * (-4) = - 12 + **?**
  Durch die Forderung nach weiterer Gültigkeit des DG ergibt sich die übliche Festsetzung.

Eine mögliche „Veranschaulichung“ der Multiplikation mit negativen Zahlen könnte in der Deutung als Streck- bzw. Streckspiegeloperatoren liegen: Das Minuszeichen (Vorzeichenwechsel) wird als *Spiegelung am Nullpunkt* der Zahlengerade interpretiert und die Maloperation als *Streckung*. Wir veranschaulichen Beispiele von gegenübergestellten Zahlengeraden:

Bsp. 1:



Bsp. 2:



Man kann diese Vorstellung auch auf dem O-O-O-Niveau behandeln. Dann dienen Streckungen bzw. Streckspiegelungen und deren Verkettung als Modellvorstellung.

5. Abschließende Bemerkungen

a) Die Verbindung der vier Rechenarten mit den dazugehörigen Gesetzen (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distributivgesetz) sollte vor allem in Verbindung mit vorteilhaftem Rechnen thematisiert werden.

b) Häufige Schülerfehler sind:

   Verwechslung von Addition und Subtraktion mit Multiplikation: –3 – 4 = 7
   Begründung: „minus mal minus gibt plus“.

   Minuszeichen vor Klammern: – (3x + 4) = –3x + 4

   Falsche Gegenoperation bei Ä-Umformungen: – 2x = 8 | +2 statt *(-1/2)

c) Anwendungen:

   Algebra (Termumformungen, Gleichungslösung); Koordinatensystem; Potenzen.

6. Aufgaben

1. a) Nennen Sie mindestens vier Sachbereiche aus der Umwelt, in denen symmetrische Skalenbereiche als Modell für die ganzen Zahlen auftreten. Geben Sie jeweils Vor- und Nachteile an.

   b) Welche Fehler sind beim Eintrag der negativen Werte zu erwarten?
   Was könnte man dagegen tun?

   c) Wie kann man die Begriffe „Vorzeichen“ und „Betrag“ anschaulich darstellen und welche Übungen sind geeignet, diese Begriffe zu thematisieren?

   d) Warum ist –3 größer als –5, wo es doch „bei –5°C kälter ist als bei –3°C“?
   Wie muss man die Kleiner-Relation in sinnvoller Weise definieren, um solche Fehler zu bekämpfen?

   e) Kann man „Addition bzw. Subtraktion von Skalenwerten“ an den vorgenannten Modellen sinnvoll erklären? Was geschieht bei der Berechnung von Differenzen bzw. von Mittelwerten von Temperaturangaben?

2. Welches ist die kleinste vierstellige ganze Zahl?

   Vorsicht, die Antwort 1000 ist falsch.

3. Mit den vier Kärtchen des nebenstehenden Beispiels können mehrere dreistellige negative Zahlen gelegt werden.

   a) Wie heißt die kleinste Zahl, die sich damit legen lässt?

   – **4** **7** **5**

   b) Schreibe alle der Größe nach auf, beginne mit der kleinsten.

4. Wie viele *ganze* Zahlen liegen zwischen

+8 und +12	–8 und –12	–435 und –210	–100 und – 1000
–70 und 0	0 und 52	–70 und + 52	–405 und 280

5. Anstelle des Modells Z-O-Z für Addition und Subtraktion könnte man auch ganz auf der Operatorebene O-O-O arbeiten.

   a) Geben Sie Beispiele von Aufgabentypen zu diesem Modell an.

   b) Wie kann man in diesem Modell die „Kleiner-Relation“ erklären?
   Welche Schwierigkeiten ergeben sich dabei?

   c) Wie könnten die Rechenregeln für das Addieren und Subtrahieren hiermit erklärt werden?
   Zeigen Sie dies an geeigneten Beispielen.

6. Sie sollen eine Serie von rationalen Zahlen (positive und negative) Addieren bzw. Subtrahieren. Welche möglichen Strategien bieten sich an? Geben Sie mindestens zwei verschiedene Strategien an. Erläutern Sie Vorgehen am folgenden Beispiel:

   $(-67) + 83 + (-142) - (+276) - (-413) + (+49) - (-87) + (+164) + 73 - 39 =$

7. In Gleichungen treten oft Terme mit einem Minuszeichen vor der Klammer auf. Zeigen Sie einen Weg zur Begründung der Regel für die entsprechende Klammerauflösung.

8. „Minus mal minus gibt plus“.
   Geben Sie mögliche Wege zur Erarbeitung der Regel für die Multiplikation zweier negativer Zahlen an und diskutieren Sie deren Vor- und Nachteile.

9. *„Die Bruchzahlen machen das Dividieren und die Minuszahlen das Subtrahieren überflüssig.“*

   Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage. Erläutern Sie diese durch Beispiele.
   Geben Sie strukturelle Eigenschaften der entsprechenden Zahlbereiche (Z, +) bzw. (B, *) an, auf denen diese Behauptung fußt.

10. Mit folgendem Partnerspiel („Katz und Maus“) kann man sich an Addition und Subtraktion von negativen Zahlen unter Einsatz des Taschenrechners (ETR) „herantasten“:

    - Die Spieler A und B vereinbaren einen Ausschnitt der Zahlengerade um den Nullpunkt, z. B. von –20 bis +20.
    - Spieler A denkt sich eine Zahl in diesem Bereich und notiert sie, so dass B sie nicht sieht.
    - Nun tippt Spieler A diese Zahl als konstanten Summanden (zur Sicherheit auch in den Speicher) ein.
    - Dann darf B raten und eine Zahl aus dem Bereich nennen. A tippt diese ein und sagt B, ob das Ergebnis (also die Summe mit der gedachten Zahl) positiv oder negativ ist.
    - Kommt 0 heraus, so hat B die gedachte Zahl erraten. Rollentausch.

11. Beim Interpolieren (Zwischenschieben) der gebrochenen rationalen Zahlen in dezimaler oder in gewöhnlicher Bruchform zwischen die ganzen rationalen Zahlen treten typische Orientierungsfehler auf. Nennen Sie diese und geben Sie Übungen zu ihrer Bekämpfung an.

Literaturhinweise zu negativen Zahlen:

DIFF, Kurs für Grundschullehrer; Mappe E 18

H. Griesel, Neue Mathemtik für Lehrer und Studenten. Band 3.

H. Eckardt; Neue Mathematik in den Klassen 5 bis 7.

ZMU; Studienmappe 14