Fachdidaktische Beiträge zum

Sachrechnen
im Mathematikunterricht

Prof. Siegfried Krauter

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Das Skript enthält fachdidaktische Beiträge zu drei Bereichen des Sachrechnens:

Version: Januar 2008

1. Größen

1.1 Was ist eine Größe?

Welche der folgenden 12 Angaben sind „Größen“?

15 DM	7 m	13.15 Uhr	3 Kelvingrade	163 m ü.NN.	+17
15°C	3,1415..	6 h 27 min	29 l	2/3	$\sqrt{3}$

Ein erster Blick könnte dazu verführen, alle Angaben mit Einheiten, also die „benannten Zahlen“ als Größen zu betrachten und alle anderen nicht. Das ist jedoch zu einfach und falsch. Wir müssen deshalb etwas sorgfältiger überlegen, was Kennzeichen von Größen sind. Wir tun dies, indem wir überlegen, was man mit Größen tun kann und was nicht.

Sinnvollerweise möchte man zwei Größen derselben Art miteinander **vergleichen** können und zwar so, dass man eindeutig bestimmen kann ob sie gleich, oder ob die eine größer oder kleiner ist als die andere. Welche Angaben in der obigen Sammlung erfüllen dieses Kriterium und welche nicht? Revidieren Sie Ihre Vorstellung daraufhin. Wir sollten also zunächst alle Angaben zulassen, die diese Forderung erfüllen. Dabei scheidet allerdings keines unserer angegebenen Beispiele aus.

Eine zweite sinnvolle Forderung an Größen ein und derselben Art ist die, dass man zwei Größen sinnvoll **addieren** kann und wieder eine Größe derselben Art erhält. Welche Angaben in der obigen Sammlung erfüllen dieses Kriterium und welche nicht? Revidieren Sie Ihre Vorstellung erneut. Warum fallen die Angaben 13.15 Uhr, 163 m ü. NN und 15°C auf Grund dieses Kriteriums heraus?

Wir können – ähnlich wie bei den Zahlen – keine *explizite* Definition geben, sondern nur eine *implizite* und wollen deshalb den Begriff der Größe axiomatisch fassen. Wir können nur sagen: „wenn man das und das mit ihnen tun kann, dann sprechen wir von Zahlen“. Analog definieren wir den Begriff der Größen.

1.2 Was kann man mit Größen tun?

1. *Man kann Größen eines Bereichs miteinander **vergleichen**:*

   Vorsicht: es handelt sich nicht um einen bloßen Maßzahlvergleich:

   7 kg < 9 h ist blanker Unsinn; aber 3 dm < 2 m, obwohl 3 > 2.

2. *Man kann Größen ein und desselben Bereichs miteinander addieren:*

   Vorsicht: es handelt sich nicht um eine bloße Maßzahladdition:

   7 kg + 9 h = 16 kgh ist blanker Unsinn.

   3 ... + 12 ... = 192 ...

   Ergänzen Sie diese Gleichung mit passenden Einheiten, so dass sie stimmt!

   Die Addition kann auch umgekehrt werden, sofern Minuend > Subtrahend ist.

3. *Man kann Größen vervielfachen (mit natürlichen Zahlen oder mit Bruchzahlen):*

   n * g = g + g + g + ... + g   (n gleiche Summanden g). Abbildung von N $\times$ G in G.

   Die Vervielfachung kann auf die Addition zurückgeführt werden und ist eigentlich zunächst keine eigenständige Verknüpfung von Größen, sondern nur eine verkürzte Schreibweise.

   Diese **Vervielfachung hat zwei Umkehrungen**, wie folgendes Beispiel zeigt:

   Beispiel: 3 * 5 cm = 15 cm.

   a) **15 cm : 3 = 5 cm**.
   Wir teilen 15 cm in drei gleichlange Teile. Wie lang ist ein Teil?
   Oder: Wir verteilen 15 cm an drei Leute. Wie viel bekommt jeder?
   Diese Umkehrung nennt man **Teilen** oder **Verteilen**.
   Das Ergebnis einer solchen Aufgabe ist eine Größe.

   b) **15 cm : 5 cm = 3**.
   Wir schneiden von einem Stück von 15 cm Länge einzelne Stücke zu je 5 cm ab. Wie viele Stücke erhalten wir?
   Oder: Wir messen 15 cm mit 5cm aus? Wie oft passt es hinein?
   Diese Umkehrung nennt man **Aufteilen** oder **Messen**.
   Das Ergebnis einer solchen Aufgabe ist eine reine Zahl.

4. *Die wichtigsten Größenbereiche in der Schule:*

   Natürliche Zahlen, positive Bruchzahlen, positive reelle Zahlen, Geldwerte, Zeitdauern, Längen; Gewichte (Massen), Rauminhalte, Flächeninhalte.

   Bereits in Klasse 1 werden Geldwerte und Längen eingeführt.
   Ab Klasse 2 werden Zeitdauern behandelt. Die restlichen drei Größen werden ab Klasse 3 behandelt. Sinnvoll wäre die etwa gleichzeitige Behandlung von Gewicht und Volumen (warum gerade diese beiden?) in Klasse 3 und die Flächeninhalte als schwierigster Größenbegriff (warum?) erst in Klasse 4.

Wir halten abschließend noch einmal fest:

Größen sind nicht dadurch gekennzeichnet, dass sie *Zahlenangaben mit Einheiten* sind, sondern durch obige Forderungen charakterisiert, die wir im Folgenden noch präzisieren wollen. Deshalb sind z. B. auch die natürlichen Zahlen oder die positiven Bruchzahlen oder die positiven reellen Zahlen Größen.

1.3 Mathematische Beschreibung eines Größenbereiches (G, + , <)

Durch folgende Axiome wird die **Struktur eines Größenbereichs** axiomatisch festgelegt:

GI: (G, <) ist eine strenge Ordnungsstruktur mit Trichotomieeigenschaft: d. h.:

a) Die Relation < ist transitiv und irreflexiv

b) Für zwei Größen a, b $\in$ G gilt stets genau eine der drei Gleichungen:

(i) a < b (ii) b < a (iii) a = b

GII: (G, +) ist ein assoziatives und kommutatives Verknüpfungsgebilde (d. h. eine komm. Halbgruppe):

a) Für alle a, b, c $\in$ G gilt: (a + b) + c = a + (b + c); Assoziativgesetz

b) Für alle a, b $\in$ G gilt: a + b = b + a; Kommutativgesetz

GIII: Die Gleichung a + x = b mit a, b $\in$ G besitzt genau dann eine Lösung x in G, wenn a < b gilt. (Lösbarkeitsaxiom).

Zusätze: Manche Größenbereiche besitzen darüber hinaus bestimmte zusätzliche Eigenschaften. Die wichtigsten davon sind folgende:

Teilbarkeitseigenschaft (TB):

Zu beliebigen a $\in$ G und n $\in$ N gibt es stets x $\in$ G mit n * x = a.

Dies ist die Eigenschaft der Teilbarkeit und sie besagt anschaulich nichts anderes als:
Jede Größe a$\in$G lässt sich stets in n gleiche Teile teilen.
Welche der genannten Größenbereiche besitzen diese Eigenschaft, welche nicht?

Kommensurabilitätseigenschaft (Komm):

Zu beliebigen a, b $\in$ G gibt es stets p, q $\in$ N mit p * a = q * b.

Dies ist die Eigenschaft der Kommensurabilität und sie besagt Folgendes:
Je zwei Größen a und b $\in$ G haben ein rationales Verhältnis a : b = q : p,
bzw. jede Größe aus G lässt sich durch jede andere mit rationaler Maßzahl ausdrücken: a = $\frac{q}{p}$ * b bzw. b = $\frac{p}{q}$ * a.

Diese beiden Zusatzeigenschaften sind wichtig für die Begründung der Bruchrechnung:

a) Hat ein Größenbereich (GB) die Eigenschaft **TB**, so kann man in ihm jede Bruchzahl konkret als Größe realisieren: Man wählt irgendeine Größe als Einheit. Diese lässt sich wegen TB in eine beliebige Anzahl von gleichen Teilen unterteilen. Durch Vervielfachen kommt man zu beliebigen Brüchen. Man kann also in einem solchen GB konkrete Bruchrechnung betreiben. Man kann also alle Bruchzahlen erzeugen. Warum hat z. B. der Bereich der Geldwerte nicht die Eigenschaft TB?

b) Hat ein GB die Eigenschaft **Komm**, so kann man jedes seiner Elemente darstellen als rationales Vielfaches jedes beliebigen anderen. Man kann dann jede Größe des Bereichs mit rationaler Maßzahl beschreiben, man kommt also allein mit Brüchen als Maßzahlen aus. Warum hat z. B. der Bereich der Längen nicht die Eigenschaft Komm? Denken Sie an die Längen von Seite und Diagonale in einem Quadrat.

c) Hat ein Größenbereich ***beide*** dieser Eigenschaften, so ist er ein geeignetes Modell zur Konkretisierung von Bruchzahlen, denn erstens kommen in ihm alle Bruchzahlen als Maßzahlen vor und zweitens kommt man mit diesen aus, d. h. es kommen keine anderen Maßzahlen als Bruchzahlen vor. Der Bereich ist daher ein geeignetes Modell für konkrete Bruchrechnung.

Der Bereich der Längen hat zwar die Eigenschaft TB, jedoch nicht Komm.

Der Bereich der natürlichen Zahlen hat zwar die Eigenschaft Komm, jedoch nicht TB.

Abschließende Zusatzbemerkung:

Nicht alles, was eine „Einheit“ neben einer Zahl hat, ist eine Größe.

Umgekehrt muss eine Größe nicht unbedingt eine Zahl mit Einheit sein.

Auch (N, +, <) ist ein Größenbereich! Prüfen Sie die Axiome GI bis GIII.

Ebenso bilden die positiven Bruchzahlen einen solchen (mit TB und Komm).

1.4 Unterscheidung zwischen Repräsentanten und Größen

Wir zeigen die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen Repräsentant und Größe an einfachen Beispielen:

a) Gegeben sind die gleichlangen aber verschiedenen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

Wir betrachten einen Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$.

Offensichtlich gilt zwar $P \in \overline{AB}$, aber andererseits $P \notin \overline{CD}$.

Daraus schließen wir, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ - obwohl zwar gleich lang! – als Punktmengen (Strecken) voneinander verschieden sind. Die beiden Strecken sind Träger (Repräsentanten) einer Eigenschaft *Länge* und nur diese Eigenschaft ist bei beiden gleich. Man nennt die Strecken Repräsentanten der Länge $|\overline{AB}|$. Genau genommen muss man also zwischen einer Strecke $\overline{AB}$ als Repräsentant und ihrer Länge $|\overline{AB}|$ als Größe unterscheiden.

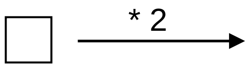
Zwar ist $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ **(Längen sind gleich),**

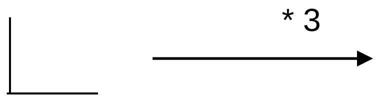
aber es ist $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ **(Strecken sind nicht gleich).**

b) Ein und derselbe Repräsentant kann Träger sehr verschiedener Größen sein (eine Person etwa von: Haarfarbe; Körpergröße d. h. Länge; Körpergewicht; Körpervolumen; u. v. a. m.).

Wir zeigen dies an einem zweiten Beispiel:

In der Schule sollen die beiden folgenden Aufgaben bearbeitet werden:





Was wird ein Schüler als Ergebnis hinschreiben?

Geben sie mindestens 5 verschiedene denkbare Schülerlösungen an und interpretieren Sie diese im Sinne der vorgenannten Vorstellungen!

Welche Größen könnte die Figur (der Repräsentant Kästchen bzw. Winkelhaken) repräsentieren? Denken Sie an Anzahl, Flächeninhalt, Länge (Umfang), Winkelgröße u. v. a. m.

Operatoren wirken stets auf Größen, nie auf Repräsentanten!

c) Ein Drittes Beispiel mag die Wichtigkeit der – zumindest im Kopf des Lehrers – notwendigen Unterscheidung zwischen Größe und Repräsentant deutlich machen:

Bei der Aufforderung „Zeichnen Sie ein Rechteck“ wird man in aller Regel die erste der beiden obigen Figuren geliefert bekommen. Was ist der Unterschied zwischen beiden Figuren? Hat die erste Figur denn überhaupt einen Flächeninhalt, wenn die Punkte im Inneren offensichtlich gar nicht zur Figur gehören? Gehört das Innere zur Figur „Rechteck“ oder nicht? Und warum zeichnen wir es dann nicht?

U. a. macht genau diese Problematik den Begriff des Flächeninhalts und seine Unterscheidung vom Umfang so schwer! (siehe auch unter Teil 1.9).

1.5 Größen und Repräsentanten. Eine Übersicht

Größe	Repräsentanten	Einheiten	Messgerät	Messprozess
Länge	Strecken	mm, cm, dm, m, km	Meterstab, Maßband	Anlegen
Flächeninhalt	Flächenstücke	mm², cm², dm², m² a, ha, km²	Messquadrate, Rasterfolien	Überdecken mit Messquadraten
Rauminhalt	Körper, Hohlkörper	mm³, cm³ = ml, dm³ = l, hl, m³	Messwürfel	Ausfüllen mit Messwürfeln
Gewicht	Körper	mg, g, kg, t	Waage	Austarieren mit Wägestücken
Zeitdauer	Vorgänge	s, min, h, d, w, a	Uhr, Metronom, Puls, Zählen etc.	Ausmessen mit Normvorgängen.
Geldwert	Wertsachen	Cent, Euro, $, ..	Vergleichswährung	Einschätzen

1.6 Allgemeines zur Behandlung der Größenbereiche

Mathematik ist mehr als Rechnen!

Mathematik ist die Kunst Rechnungen zu umgehen!

Nach meinem Eindruck werden in der Schule viel zu sehr die **formalen Fertigkeiten (Regelverhalten)** bevorzugt und betont. Die mehr **informellen Fertigkeiten** und Kenntnisse wie Schätzen, naive, informelle, nichtnormierte, heuristische, probierende Vorgehensweisen kommen - völlig zu unrecht - absolut zu kurz.

Unsere Schüler verlassen die Schule manchmal als gut trainierte Rechenknechte (auch das nur noch selten), aber als Analphabeten in Bezug auf ein **ausgeprägtes Zahlen- und Größengefühl**. Ein solches auszubilden ist aber eines der wichtigsten Ziele der Schule und dort vor allem des Mathematikunterrichts.

Muss es denn immer so furchtbar exakt sein? Genügt nicht oft genau so gut ein grober Näherungswert anstelle des genauen Ergebnisses? Warum darf nicht probiert werden, sondern muss der wohltrainierte Algorithmus verwendet werden? Das entspricht nicht den Verhaltensweisen im Alltagsleben.

Ist es nicht so, dass wir oft einer Schülerhaltung begegnen, die in folgendem bösen Bonmot zusammengefasst werden könnte:

„Ich weiß zwar nicht was ich rechne, aber dafür rechne ich es unheimlich genau!“

Ergebnisse, die z. B. mit dem Taschenrechner ermittelt wurden, werden kritiklos akzeptiert und wenn sie noch so unsinnig sind!

Vor dem rechnerischen Umgang mit Größen müssen die Schüler einen Begriff und eine Vorstellung davon haben, was eine Größe ist.

Eine kleine selbst erlebte Episode mag erhellen, in welch unkundigem Zustand sich unsere Schüler bezüglich des Größenverständnisses befinden: Meine kleine Tochter sagte zu mir, als ich im Badezimmer gerade von der Waage stieg:

„Papa, wie groß bist du? Ich bin schon drei!“.

Was unterscheidet diese Unreife von der eines Schülers, der auf die Frage nach dem Flächeninhalt eines Kreises die Antwort „6 cm“ gibt?

Eine der wichtigsten Tätigkeiten zum Verständnis eines Größenbegriffs sind **Messprozesse**. Haben Sie schon einmal Flächengrößen ausgemessen, wirklich ausgemessen, nicht berechnet? Was wäre ein geeignetes Messgerät? Was müsste man tun? Mit konkreten Messprozessen lernen die Schüler Größenbegriffe kennen: „Das was ich mit dem Metermaß messe sind Längen, das was ich mit der Waage messe sind Gewichte (Massen), das was ich mit der Stoppuhr messe sind Zeitdauern, das was ich mit dem Literbecher messe sind Volumina, das was ich mit dem Quadratraster messe sind Flächeninhalte etc.“.

Die Schüler müssen z. B. den Unterschied kennen: Rechteck ≠ Umfang ≠ Inhalt.

Umfang = Länge der Randlinie

Inhalt = Größe (Platz) des Flächenstücks

Sinnvolles Schätzen, überschlägiges Bestimmen (großzügig) evtl. durch gedankliches Ausmessen, Vergleichen mit Bekanntem (man muss einiges wissen um schätzen zu können!) sind wichtige Aktivitäten und Kompetenzen, die im Mathematikunterricht der Schule gelehrt und gelernt werden müssen:

Beispiele:

Schätzen Sie das Volumen einer erwachsenen Person, den Rauminhalt einer Badewanne, das Gewicht (Masse) eines Autos, die Größe (Grundfläche und auch Volumen) eines Zimmers, die Flächengröße einer Wohnung, eines Fußballplatzes, der BR Deutschland, den Flächeninhalt eines Blattes DIN-A4 , den eines Schreibtisches u. v. a. m.

Das Wichtigste ist der allmähliche Auf- und Ausbau eines **Systems von Standardrepräsentanten** für jeden Größenbereich durch spiralige Behandlung:

Wir geben ein denkbares **Beispiel für den Bereich der Gewichte (Massen):**

Zuerst wird man nur den kg-Bereich behandeln und sich einprägen und dann allmählich nach beiden Seiten ausbauen.

...	100 t	10 t	1 t	100 kg	10 kg	**1 kg**	100 g	10 g	1 g	...
Evtl. weiter	Lokomotive	LKW	PKW	Mann	Kleiner Eimer mit Wasser	**Zuckerpacket, volle Literflasche**	Schoko ladetafel	Standardbrief	Centmünze	Evtl. weiter

Stellen Sie analoge Übersichten für die anderen Größenbereiche auf.

Wie sieht das im Bereich der Zeitdauern aus?

Wenn man die Tabelle aufsteigend von rechts nach links anordnet, erhält man eine Stellenwerttafel für den betreffenden Größenbereich! (falls Einheitensystem dezimal!).

1.7 Messgeräte und Messverfahren für einige Größen

Gewicht: Tafelwaage mit Wägestücken (Standardrepräsentanten!); Feinwaage (Chemie), Briefwaage, Küchenwaage, Dezimalwaage, Personenwaage, Brückenwaage.

Rauminhalt:
a) Umfüllen, Eintauchen, Ausmessen mit Messbecher oder Messzylinder.
b) Auslegen oder Nachbauen mit Messwürfeln.
Wie wird z. B. das Volumen eines Auto-Kofferraumes gemessen?

Zusatz: *Warum ist der Gebrauch eines „Messbechers“ beim Kochen oder Backen didaktisch außerordentlich kontraproduktiv? Warum kann das Abmessen von „100 g“ Zucker mit diesem Gerät zur Verwirrung bezüglich der Größenbegriffe führen?*

Flächeninhalt: Auslegen oder Überdecken mit Messquadraten. Hervorragende Flächenmessgeräte sind Rasterfolien. Man führe Messungen durch an Briefmarken, Notizzetteln, Papierblättern, Postkarten, Schreibtischen, Fensterflächen, etc.

Länge: Lineal, Zollstock, Meterstab, Maßband, Messstange, etc.

Zeitdauer: Zählen, Pulsschlag, Sanduhr, Metronom, Sonnenlauf, Mondlauf, Uhren aller Art. Welche Normvorgänge werden bei verschiedenen Sorten von Uhren als Vergleichsgrößen realisiert? Sanduhr, Pendeluhr, Taschenuhr, Quarzuhr, Atomuhr, ...

1.8 Methodische Stufenfolge bei der Einführung von Größen

Vor dem rechnerischen Umgang mit Größen müssen die Schüler einen Begriff und eine Vorstellung davon haben, was eine Größe ist.

Folgende Stufenfolge (mit Varianten) wird in der Didaktik empfohlen. Wir wählen im Folgenden den Größenbereich der Gewichte zur Illustration.

Stufe 1: Sammeln von spielerischen Erfahrungen in Sachsituationen durch **direkten, d. h. unmittelbaren Vergleich von Repräsentanten**:
Man vergleicht z. B. Körper nach ihrem Gewicht durch Abschätzen in der Hand oder indem man sie an die beiden Seiten einer „Waage“ (Kleiderbügel, Hebel, etc.) hängt.
Ziel: Gleichheitsbegriff; Ordnungsrelation schwerer – leichter.
Wie sieht diese Stufe bei anderen Größen aus?

Stufe 2: **Mittelbarer Vergleich** unter Verwendung beliebiger willkürlicher Maßeinheiten:
Die Schokoladetafel ist leichter als die Milchflasche, die Milchflasche leichter als der Wassereimer, also ...
Wichtig ist hierbei das Entdecken der Transitivität der Ordnung. Außerdem ist es sinnvoll, bereits hier bevorzugt künftige Standardrepräsentanten zum Vergleichen und Ausmessen heranzuziehen (spiraliges Lernen).

Stufe 3: **Vergleichen und Ausmessen mit Normrepräsentanten.**
Einführung der Standardeinheiten.
Erste Schritte zum Aufbau des betreffenden Einheitensystems:
Wägestücke einer Tafelwaage: 1 kg, 100g, 10g, 1g.
Nutzung standardisierter Messverfahren.

Stufe 4: **Ausbau des Einheitensystems**.
Aufbau eines Systems von Standardrepräsentanten über einen möglichst großen Wirklichkeitsbereich. Vgl. die Tabelle oben in Abschnitt 1.6.

Stufe 5: **Rechnen mit Größen des Bereichs:**
Addieren, Vervielfachen, Umwandeln zwischen verschiedenen Einheiten.

Bitte beachten Sie: ***Das Rechnen mit Größen steht nicht am Anfang der Befassung, sondern am Ende. Es gibt Vieles vorher zu tun, um einen Größenbegriff zu behandeln. Das Rechnen ist nur noch ein Zusatz und keineswegs der Wichtigste!***

Hinweis:

Der rechnerische Umgang mit Größen macht nur einen Bruchteil dessen aus, was Schüler im Mathematikunterricht über Größen lernen sollten. Mathematik ist mehr als Rechnen. Der Aufbau eines vernünftigen Zahlen- und Größengefühls leistet mehr zur Heranbildung mündiger Bürger, als sturer und blinder Rechendrill ohne konkrete Vorstellungen und Bezüge zur Wirklichkeit.

1.9 Ziele des Sachrechnens bzw. des Arbeitens mit Größe

- ***Aufbau eines gesicherten Größenbegriffs (was ist Gewicht, was Rauminhalt?).***
- ***Aufbau geeigneter Vorstellungen für einzelne Größen (System von Standardrepräsentanten).***
- ***Fähigkeit zum Umwandeln einer Größe in verschiedene ihrer Einheiten. Überblick über das jeweilige Einheitensystem.***
- ***Rechnen mit Größen. Erfahrungen im Umgang mit Größen beim Sachrechnen.***

Eine geeignete Maßnahme zur Verwirklichung dieser Ziele im Sachrechnen wäre z. B. folgende Methode:

Bevor irgendeine Aufgabe zum Sachrechnen angegangen wird, wird eine **vernünftige Schätzung** abgegeben: *Was muss denn etwa rauskommen?*

Das fördert die Entwicklung und den Aufbau eines Zahlen- und Größengefühls ungemein und schult das Vermögen zum Schätzen. Da Schätzen immer ein „Vergleichen mit Bekanntem“ ist, beruht die Fähigkeit zum Schätzen notwendigerweise auf dem Aufbau eines geeigneten Systems von Vergleichsgrößen, den „Standardrepräsentanten“. Außerdem schafft Schätzen Wirklichkeitsbezug für die Mathematik. „Wenn ich den Preis für 1 kg Rindfleisch ausrechnen soll, muss etwas in der Größenordnung von 10 bis 20 € herauskommen.“ (Stand 2005). Man hat damit eine gute Plausibilitätskontrolle für grobe Rechenfehler.

1.10 Besondere Schwierigkeiten beim Größenbegriff Flächeninhalt

Warum ist der Größenbegriff der ***Flächeninhalte*** für Schüler mit ganz besonderen Schwierigkeiten verbunden? Wir nennen vier wesentliche Gründe dafür:

1. Im Gegensatz zu fast allen anderen Größen haben Schüler i. Allg. ***keinerlei Vorerfahrungen im Umgang mit Flächengrößen aus dem täglichen Leben*** (eventuelle Ausnahmen: Kinder aus Bauernfamilien könnten Grundstücksgrößen kennen).
2. ***Flächeninhalte werden fast nie gemessen***, sondern meistens berechnet (dabei werden Längen gemessen; denken Sie an den Messbecher!). Deshalb ist der Begriff der Größe Flächeninhalt wenig ausgebildet.
3. Flächenstücke werden im Mathematikunterricht - auch in Lehrbüchern - fast immer nur als ***Linienfiguren und nicht*** wirklich als ***Flächenstücke*** präsentiert. Das verleitet zur Verwechslung mit dem Umfang. Es fehlt an der nötigen Grundlegung.
4. ***Fehlende sprachliche Unterscheidung zwischen Figur und Größe***:
   Bei vielen anderen Größen wird sprachlich zwischen Repräsentant und Größe unterschieden:

   - Eine *Strecke* hat eine gewisse *Länge*.
   - Ein *Körper* hat einen gewissen *Rauminhalt*.
   - Ein *Vorgang* dauert eine gewisse *Zeitspanne*.

   Anders ist dies bei Flächenstücken: Wir verwenden den Begriff „Fläche“ sowohl für die Figur (also den Repräsentanten Flächenstück) als auch für seine Größeneigenschaft „Flächeninhalt“.

   Beispiel: Wie groß ist die Fläche des Rechtecks?

   Sorgfältig müsste man formulieren:

   “Wie groß ist der *Flächeninhalt* der *Rechtecksfläche*?“

   „Die *Rechtecksfläche* hat einen *Flächeninhalt* von 15 cm².“

   Stattdessen sagt man schlampig und verwirrend, aber einfach:

„Die Rechtecksfläche beträgt 15 cm²."

Man kann als Lehrerin oder Lehrer in Kenntnis dessen geeignete Maßnahmen ergreifen, um diese Defizite zu verringern bzw. auszugleichen und entsprechende Fehler zu vermeiden. Welche Maßnahmen würden Sie ergreifen?

1.11 Unterrichtsbeispiele für die Größe Zeitdauer

Zeitspannen und Zeitpunkte:

Als erstes gilt es, den Unterschied zwischen ***Zeitpunkten*** (Skalenwerten) wie z. B. 13.15 Uhr und ***Zeitdauern*** (Zeitspannen) wie z. B. 3h 20 min auch in der konsequenten Schreibweise wie hier dargestellt herauszuarbeiten. Die Zeitdauern sind Größen, nicht die Zeitpunkte.

Für die Berechnung von Zeitspannen bietet sich folgende Darstellungsform an:

Wie lange dauert es von 19.52 Uhr am Abend bis 8.17 Uhr am nächsten Morgen (z. B. Nachtfahrt)?

$$19.52 \xrightarrow{+8\,\text{min}} 20.00 \xrightarrow{+4h} 24.00 \xrightarrow{+8h} 8.00 + \xrightarrow{+17\,\text{min}} 8.17$$

Insgesamt also 8 min + 4 h + 8 h + 17 min = 12 h 25 min.

Die stellenweise schriftliche Subtraktion von Uhrzeiten sollte wegen des nichtdezimalen Einheitensystems und der daraus resultierenden Fehleranfälligkeit unterbleiben. Die obige Pfeildarstellung (Operatoren) ist nahe an der Wirklichkeit angelehnt und übersichtlich.

Bereitstellung von Standardrepräsentanten:

Man muss Vorgänge kennen, die etwa 1 s, 1 min, 1 h, 1 d, 1 w, 1 Mon. bzw. 1 a dauern.

Umgekehrt muss man für wohlbekannte Vorgänge die etwaige Dauer kennen:

Wie lange dauert 1 Pulsschlag, 1 Atemzug, 1 Schulstunde, 100 m - Lauf, 1 000 m - Lauf, Marathonlauf, evtl. Lichtwege (Erde-Sonne).

Die Schüler sollen Vorstellungen von Zeitdauern einiger Vorgänge entwickeln und solche messen und vergleichen.

Rechnen mit Zeitspannen:

Das Berechnen von Zeitspannen als Unterschiede von Zeitpunkten kann am besten an Hand von Fahrplanstudien betrieben werden. Dabei muss man natürlich auch immer wieder (s. o.) Zeitdauern mit verschiedenen Einheiten addieren und ggf. umwandeln.

Wichtig ist das Vervielfachen und Teilen von Zeitspannen:

Dies ist erstens Grundlage für die Umwandlung zwischen den verschiedenen Einheiten und zweitens Grundlage für die Veranschaulichungen beim Bruchrechnen (konkrete Brüche).

Beispiele zum Vervielfachen:

Berechne das 2- (3-, 4-, 5-, 10-, 12-, 24-, 60-) fache von

a) 1 s, 1 min, 1 h, 1 d, 1 w, … b) 17 s, 43 min, 19 h, 37 d, …

Wichtig ist insbesondere die Kenntnis der folgenden Beziehungen:

$$\textbf{1 s} \xrightarrow{*60} \textbf{1 min} \xrightarrow{*60} \textbf{1 h} \xrightarrow{*24} \textbf{1 d}$$

Beispiele zum Teilen:

Berechne den 2. (3., 4., 5., 6., 10., …) Teil von

a) 1 d, 1 h, 1 min. b) 7 h, 16 min, 23 d, ….

Besonders wichtig ist die folgende Erkenntnis über Bruchteile:

Eine „Viertelstunde" ist „der vierte Teil von einer Stunde, also „1 Stunde geteilt durch 4".

$\frac{1}{4}$ h = 1 h : 4 = 60 min : 4 = 15 min

Verallgemeinerung:

$$\frac{1}{n} * x = „\frac{1}{n} \text{ von } x\text{"} = „\text{der n-te Teil von x"} = x : n$$

Mit dieser wesentlichen Erkenntnis hat man zumindest eine Vorstellung von Größen mit Stammbrüchen der Form 1/n als Maßzahlen, also den n-ten Teilen.

Berechne ½ (1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/10, 1/60) von

a) 1 min, 1 h, 1 d, … b) 20 min, 30 h, 10 d, …

Geeignet zur Veranschaulichung dieser Größen sind Darstellungen am Ziffernblatt:

Welchen Teil des Ziffernblattes überstreicht der große Zeiger in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 Minuten?

Man beachte hierbei, dass bei Aufgaben des Messens oder Aufteilens jeweils nur immer ganzzahlige Werte auftreten, da keine Bruchrechnung vorweggenommen werden soll, sondern nur das Vervielfachen mit natürlichen Zahlen berücksichtigt wird.

Es ist durchaus hier schon möglich, einfache konkrete Brüche zu betrachten:

$\frac{3}{4}$ h = „eine Dreiviertelstunde" = „drei Viertelstunden" = 3 * $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4}$ h + $\frac{1}{4}$ h + $\frac{1}{4}$ h.

Selbst Berechnungen der Art $\frac{2}{3}\mathrm{h}+\frac{1}{4}\mathrm{h}$ sind durch Umwandlung in Minuten („gemeinsame Benennung" später „gemeinsamer Nenner") zu bewerkstelligen ohne Bruchrechenkalkül.

Auch eine Aufgabe wie $\frac{2}{3}\,\text{von}\,\frac{4}{5}\,\text{h}$ kann auf die angegebene Weise berechnet werden.

Dieser Art von einfachem Umgang mit Größen erscheint uns eine außerordentlich fruchtbare und Erfolg versprechende Vorbereitung für das Bruchrechnen zu sein.

Bei allen Größenarten halten wir die folgenden Übungsformen für wichtig:

Erstellen von Skalen mit geeigneten Unterteilungen

Ablesen und Eintragen von Größenangaben bei Skalen

Dabei sind auch nicht dezimal geteilte Skalen zu verwenden (z. B. Fünferteilung)

Auch Skalenformen wie Stoppuhren, Maßleisten, Gewichtsanzeigen, Messbecher (nichtlineare Einteilungen!) etc. sind als Übungsmedien geeignet.

1.12 Literaturhinweise

Bigalke H.G./Hasemann K.;	Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6. Band1. Kap. 7. Frankfurt 1977.
Griesel H.;	Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten Bd. 2. Schroedel 1973.
Kirsch A.;	Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen 1970. Insbes. Abschn. B.
Krauter S. u.a.	Mathematik 5. Ausgabe B. Hauptschule. Lehrerband. Offenburg 1985.
Radatz H./Schipper W.;	Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel 1983. Kap. 2.6.

1.13 Aufgaben

1. Erstellen Sie Übersichten für geeignete Systeme von Standardrepräsentanten für jeden der sechs grundlegenden Größenbereiche.

2. Geben Sie für jeden der 6 genannten Größenbereiche wichtige Aktivitätsformen für Schüler zu den in Abschnitt 1.8 dargestellten methodischen Stufen an.

3. Welche Aufgaben- und Aktivitätsformen sind zur Diskrimination von nahen Größenpaaren (Volumen - Gewicht; Umfang - Flächeninhalt; Oberfläche - Rauminhalt) wichtig, hilfreich und notwendig?
Geben Sie für jedes Beispiel konkrete Aktivitäten bzw. geeignete Aufgaben an.

4. Stellen Sie ein Programm zur Behandlung der Größe „Flächeninhalt“ nach dem Spiralprinzip von Klasse 5 bis Klasse 9 auf.

5. Arbeiten Sie die angegebene Literatur durch. Bewerten und vergleichen Sie.

6. Gibt es auch zusammengesetzte Größen? Kann man kg mit h multiplizieren?

   Denken Sie an die Fallbeschleunigung: $9{,}81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81 \ \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}$.

   d. h. die Geschwindigkeit erhöht sich beim freien Fall um 9,81 m/s in jeder Sekunde.

7. Was ist grundfalsch an folgendem „Umrechnungsschema“ für Schüler:

   1 m $\xrightarrow{\square 10}$ 10 dm $\xrightarrow{\square 10}$ 100 cm $\xrightarrow{\square 10}$ 1000 mm

   Die „Umrechnungszahl“ für Längenmaße ist 10.

   Warum sind solche Darstellungen eine echte Katastrophe und stiften nur Verwirrung? **So also bitte nicht!**

8. Was misst man beim Einsatz eines „Messbechers“ im Haushalt? Ist es korrekt, wenn an den Skalen z. B. „100 g Zucker“ steht? Wie kann man Schülern den Unterschied zwischen Volumen und Masse (Gewicht) klar machen?
   Warum ist die Gleichung „ 1 Liter = 1 Kilogramm“ grundfalsch, obwohl doch 1 Liter Wasser 1 kg wiegt?

9. Aufbau der Größenbereiche

   a) Welche Größenbereiche werden in der Schule üblicherweise behandelt? Zählen Sie mindestens sechs verschiedene Größenbereiche auf.

   b) Welche Schritte sind grundsätzlich bei der Einführung von Größen zu beachten? Welche Messgeräte stehen für die jeweiligen Größenbereiche zur Verfügung

   c) Größen werden definiert mit Hilfe geeigneter Äquivalenzrelationen für die Repräsentanten. Geben Sie für jeden Größenbereich die passenden Repräsentanten und die zugehörige Äquivalenzrelation an.

10. Schüler sollten konkrete Vorstellungen von Größen und ihren Einheitensystemen erwerben. Dazu ist es notwendig, Systeme von ***Standardrepräsentanten*** aufzubauen. Stellen Sie für jeden Größenbereich ein geeignetes System von Standardrepräsentanten zusammen. Warum ist die Kenntnis solcher Systeme unabdingbare Voraussetzung für sinnvolles Schätzen?

11. a) Wie lauten die Axiome eines mathematischen Größenbereiches G(<, +)?

    b) Zeigen Sie, dass N(<, +), Q+(<, +) und ebenso R+ (<, +) Größenbereiche sind.

    c) Definieren Sie das Vervielfachen von Größen mit natürlichen Zahlen durch Rückgriff auf das Addieren von Größen.

d) Welcher der in b) genannten Größenbereiche besitzt die Teilbarkeitseigenschaft (T)?
(T): Für alle $n \in N$ und für alle $g \in G$ gibt es $x \in G$ mit der Eigenschaft: $n * x = g$.
Was bedeutet das? Welche der bekannten sechs Größenbereiche besitzen (T) welche nicht?

e) Ein Größenbereich G besitzt die Eigenschaft der Kommensurabilität, wenn gilt:
(K): Für alle $x, y \in G$ gibt es $k, n \in N$ mit der Eigenschaft: $k * x = n * y$.
Was bedeutet dies?

12. Zeigen Sie:

a) Ein Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft besitzt kein kleinstes Element.

b) Jeder Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft kann als Modell für die Bruchrechnung dienen.
D. h.: Nimmt man eine beliebige Größe $e \in G$ als Einheit, so enthält G alle Größen der Form $p/q * e$ mit p, q beliebig aus N. Anders ausgedrückt: $B * e \subseteq G$.

c) In einem Größenbereich mit (K) kann man jedes Element e als Einheit wählen. Alle anderen Elemente lassen sich darstellen als rationale Vielfache dieser Einheit (Bruchzahlen als Maßzahlen). Anders ausgedrückt: $G \subseteq B * e$.

13. a) Nennen Sie Gründe für die besonderen Schwierigkeiten der Schüler mit dem Größenbereich der Flächeninhalte.

b) Geben Sie Übungsaufgaben zur Diskrimination zwischen Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren an.

c) Geben Sie Möglichkeiten an, wie Sie Schülern den Unterschied zwischen Rauminhalt und Gewicht klarmachen können.

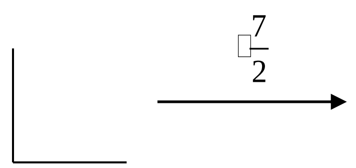
d) Worin bestehen die besonderen Schwierigkeiten des Größenbereichs der Zeitdauern?

14. Formulieren Sie einige inhaltliche Divisionsaufgaben über Größen, in denen die unterschiedliche Bedeutung des ***Aufteilens oder Messens*** auf der einen und des ***Teilens oder Verteilens*** auf der anderen Seite inhaltlich zum Tragen kommt.

15. Operatoren wirken auf Größen nicht auf Repräsentanten!

Untersuchen Sie nebenstehendes Beispiel.

Welche verschiedenen Lösungen sind denkbar?



16. Nachhaltiges Lernen erfordert mehr als die einmalige singuläre Behandlung einer Sache im Unterricht. Das Spiralprinzip des Lernens versucht solch nachhaltiges Lernen abzusichern.

    a) Informieren Sie sich über das „Spiralprinzip“ in der Literatur:
    Wittmann, E; Grundfragen des Mathematikunterrichts; 1974. S. 66 – 69.
    Bruner, J.S.; Der Prozess der Erziehung; 1973 (3. Aufl.) S. 61ff.
    Oehl, W.; Der Rechenunterricht in der Hauptschule; 1976 (6. Aufl.) S. 146 – 149.

    b) Stellen Sie ein Programm zur Behandlung der Größe „Flächeninhalt“ nach dem Spiralprinzip von Klasse 5 bis Klasse 9 auf. Vergleichen Sie mit den Inhalten in den gültigen Bildungsplänen.

17. Untersuchen Sie die gängigen Schulbücher vor allem für Klasse 5, wie bei diesen die Behandlung der Größen vorgenommen wird.
    Welche der erarbeiteten Grundsätze werden eingelöst, welche nicht?
    Versuchen Sie eine Bewertung der verschiedenen Lehrbücher entsprechend den aufgestellten Grundsätzen.

18. Gibt es auch zusammengesetzte Größen? Kann man kg mit h multiplizieren?

    a) Denken Sie an die Fallbeschleunigung: $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81\ \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}$ („die Geschwindigkeit erhöht sich beim freien Fall um 9,81 m/s in jeder Sekunde“).

    b) Man kann Größen beliebig miteinander multiplizieren und dividieren und so neue „zusammengesetzte“ Größen erzeugen. Die Einheiten werden wie bei der normalen Multiplikation üblich behandelt, d. h. es gilt das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und man darf Kürzen. Es gibt dabei formal keine Probleme. Nicht alle derartigen „zusammengesetzten Größen“ sind auch von Bedeutung bzw. machen realen Sinn. Erinnern Sie sich an Ihre Kenntnisse aus der Physik.

    c) Nennen Sie Beispiele zusammengesetzter Größen aus dem täglichen Leben.

    d) Was ist die Einheit für die elektrische Leistung, was für die elektrische Energie? Was muss man bei der „Stromrechnung“ bezahlen und in welcher Einheit?

1.14 Aspekte für die Behandlung der Größen im Mathematikunterricht

1. Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts bei der Behandlung der Größen ist die Ausbildung eines gesicherten Begriffs über die jeweilige Größenart, eine Übersicht über die wichtigsten (nicht alle!) Einheiten für die betreffende Größenart und der Aufbau konkreter Vorstellungen zu Größenangaben mit Hilfe eines geeigneten Systems von Standardrepräsentanten.

2. Der Messprozess ist das bedeutsamste Mittel zur Grundlegung eines sicheren Größenbegriffs. Schüler erfahren dabei, was eigentlich mit Gewicht, Rauminhalt, Flächeninhalt, ... gemeint ist. Sie werden mit den wichtigsten Einheiten und Messverfahren (Messgeräten) vertraut und bauen in natürlicher Weise ein System von Standardrepräsentanten auf.

3. Gerade bei den Größen, die üblicherweise nicht gemessen, sondern berechnet werden (sogenannte "abgeleitete" Größen wie Rauminhalt oder Flächeninhalt) müssen Schüler zur Bildung gesicherter Begriffe ausreichende Erfahrungen im Messen sammeln können. Von außerhalb der Schule bringen sie diese nicht mit - ganz im Gegensatz etwa zu den Größenarten wie Zeit oder Geldwert. Besonders problematisch: Flächeninhalte.

4. Sinnvolles Schätzen einer Größe setzt die Verfügbarkeit über ein geeignetes System von Standardrepräsentanten voraus, denn Schätzen heißt „Vergleichen mit Bekanntem“, in Bezug setzen, Eingrenzen. So bedingen und fördern sich diese beiden Aktivitäten gegenseitig (Bsp.: Flächeninhalt eines DIN-A4-Blattes; Volumen eines erwachsenen Menschen; etc.).

5. Überschlägiges Bestimmen (sehr großzügig) von Größenangaben kann (und wird häufig) durch gedanklich nachvollzogene Messprozesse ersetzt bzw. unterstützt werden. (Bsp.: Fläche einer Schreibtischplatte, Inhalt einer Badewanne, Volumen eines Erwachsenen, Höhe eines Hochhauses, ...)

6. Schüler müssen Langzeiterfahrungen mit Standardrepräsentanten machen können. Ins Klassenzimmer gehört eine entsprechende Sammlung von Material:

Wägestücke/Gegenstände:	1 g	10 g	100 g	1 kg	10 kg ...
Körper oder Gefäße:	1 cm^3	10 cm^3	100 cm^3	1 dm^3	10 dm^3 ...
Flächenstücke (Wandplakat):	1 cm^2	10 cm^2	1 dm^2	10 dm^2	1 m^2 ...

7. Die Kenntnisse über Größen müssen bei den Schülern laufend (re-)aktiviert werden z. B. durch klärende Vorfragen bei Sachaufgaben:

   - Was will man wissen?

- Kann man das direkt messen (Messgerät? Einheit? Schätzung der Größe!) oder muss man es berechnen?
- Aus welchen anderen Größen kann man es berechnen?
- Wie kommt man zu diesen Größen (Messen? Berechnen? Vorgabe?)?

Anregung hierzu: Man könnte z. B. als „Thema des Monats“ für jeweils 5 Minuten jeder Mathematikstunde das Thema "Flächeninhalt" wählen.

8. <u>Mathematikunterricht ist mehr als Rechnen:</u>

   "Ich weiß zwar nicht was ich rechne, aber dafür rechne ich unheimlich genau!"

   Begriffsbildung statt blinder Umrechnungsakrobatik!

   Konkrete Standardrepräsentanten statt Umrechnungszahlen!

   Messprozesse statt Berechnungsverfahren, ggf. nur gedanklich!

   Strategien statt Formeln!

9. Wir wollen im Mathematikunterricht nicht Taschenrechner nachbilden (die erhält man im Kaufhaus äußerst billig), sondern Menschen bilden, die ihrer Umwelt angemessen und verständig gegenübertreten können. **Verständiges Umgehen mit Größen ist in dieser Hinsicht eines der wertvollsten Bildungsziele des Mathematikunterrichts.**

2. Prozentrechnung

Prozentrechnung in der Schule

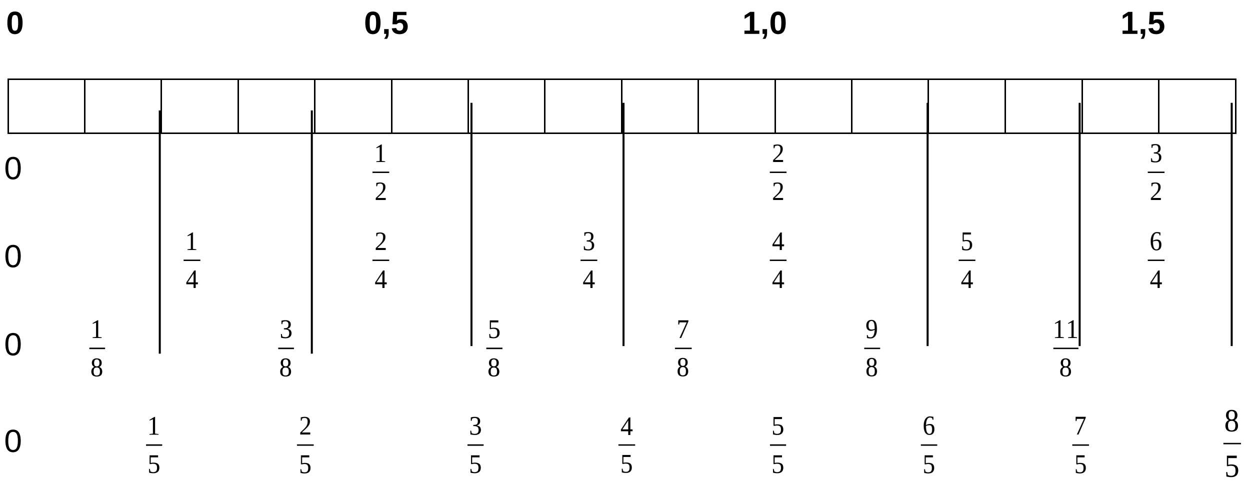
Motto: "50% kapiert ist halb kapiert!"

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie ein problemorientierter und anschaulicher Weg zur Prozentrechnung in der Schule begangen werden könnte und welche Aspekte, Zielvorstellungen und Methoden dabei hilfreich sein könnten.

Die Prozentrechnung ist eigentlich nichts anderes als „***Bruchrechnung in dezimaler Form***“ (genauer in „***Hundertstelform***“). Während gewöhnliche Brüche oder Brüche in dezimaler Form hauptsächlich als Maßzahlen für Größen, zur Beschreibung von Anteilen und zur Angabe relativer Vergleiche benutzt werden, kommen Prozentsätze in der Regel nur zur Angabe von relativen Vergleichen und von Anteilen (z. B. Wahrscheinlichkeiten) vor, nie jedoch als Maßzahlen für Größen.

2.1 Vorbereitende Lernschritte: Bruchform und Dezimalform

Die Schüler müssen tragende Vorstellungen über die Größe von Dezimalzahlen und Brüchen und deren Äquivalenz entwickeln, am besten durch Darstellung an einer linearen Skala (Zahlenstrahl). Dabei wird jeweils den einfachen Brüchen (Halbe, Viertel, Achtel; Fünftel, Zehntel; *evtl. auch noch Zwanzigstel*, *Fünfundzwanzigstel*) die zugehörige dezimale Form gegenübergestellt:

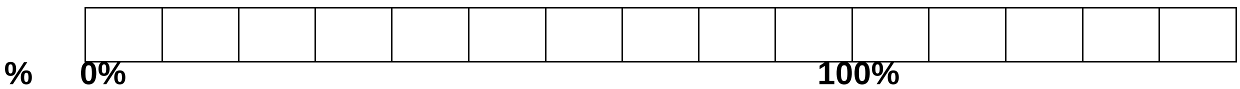


Usf.

Die Schüler sollen in regelmäßigen Übungen spätestens ab Klasse 7 mit diesen Beziehungen (einfache Brüche in Dezimalform umwandeln u. u.) vertraut werden. Bereits in dieser Phase kann der Prozentbegriff in einfachster Form als ein Synonym für Hundertstel verwendet werden: $13\,\% = \frac{13}{100} = 0{,}13$. $\quad \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\% = 0{,}40$

2.2 Grafischer Zugang zum Grundschema der Prozentrechnung

Zunächst zeichnen wir eine Skala mit der Einheitsstrecke von 10 cm = **100 mm**. Diese Einteilung dient dazu, dass man *Prozentsätze als Millimeter mit dem Messlineal abmessen* kann.

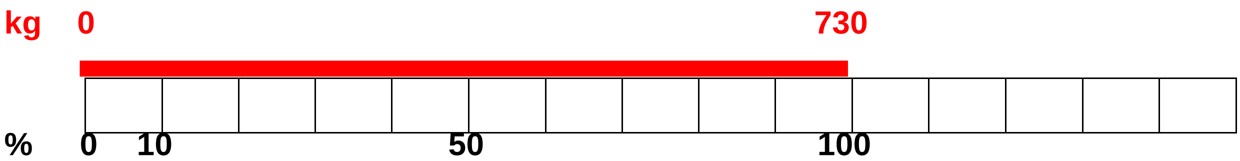


Diese Prozentskala wird durch wenige weitere Eintragungen bei der Marke 50 (Halbierung), 150 und 10 (Zehntelung) ergänzt. Anfangs empfiehlt es sich jeweils das Prozentzeichen noch dazuzuschreiben.

Der zentrale Begriff der Prozentrechnung ist der **Grundwert**. Er kommt je nach Anwendungssituation vor als „das Ganze“, Basiswert, Ausgangswert, Anfangswert, Bezugswert, Vergleichsgröße, etc.

Dieser wird bei der Prozentrechnung – also Hundertstelrechnung – eingeteilt in 100 gleiche Teile. Wir verdeutlichen dies nachfolgend in einer anschaulichen und einprägsamen Weise und wählen als Beispiel die Bestimmung von „**65 % von 730 kg**“:

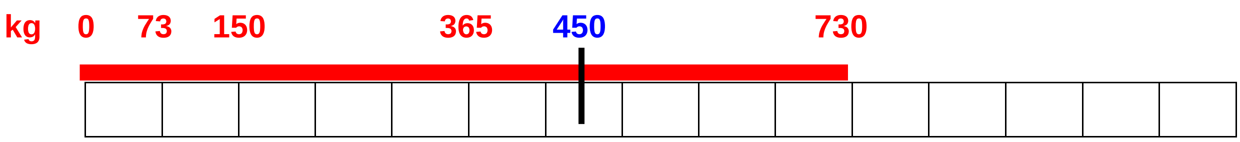
Der Grundwert von 730 kg wird nun – wie die Butter auf dem Brot – gleichmäßig auf dem Streifen von 0 bis 100 verteilt und die Grafik mit einer kg-Skala ergänzt.



Nun sind alle Vorbereitungen getroffen und man kann die zu 50% und zu 10% evtl. auch schon die zu 150% gehörigen kg-Werte leicht eintragen, wobei immer großzügig gerundet wird.

Durch Zusammenstückeln bzw. durch Verdoppeln, Halbieren, Zehnteln, Verzehnfachen etc. kann man sich nun an die Skalenwerte für 65% und den zugehörigen kg-Wert von etwa 450 kg herantasten.

Es kommt dabei nicht auf den genauen Wert an, sondern auf die Art und Weise, wie man ihn bekommen kann. Oft lässt sich durch die „Methode des scharfen Hinsehens“ ohne jegliche Zwischenrechnungen ein Näherungswert für das gesuchte Ergebnis angeben:



% 0 10 50 65 100

Lösen Sie mit dieser grafischen Methode die Aufgabe „Grundwert gesucht“ für folgendes Beispiel:

Aufgabe 1:

Von einer Kiste Äpfel waren 13 kg, das sind 30 % aller Äpfel, verdorben.
Wie viel kg wog die ganze Kiste?

2.3 Vorteile der Doppelleistendarstellung

- Einfache Handhabung auf Karopapier
- Eindimensional und daher gut überschaubar
- Anlehnung an Zahlenstrahl und Streifendiagramm sowie Bruchstreifen aus Klasse 6
- Einfache Parallelisierung mit anderen Darstellungsformen: Dezimalform, Bruchform
- Skalenverlängerung führt ohne Weiteres zu Prozentsätzen über 100% hinaus
- Ermöglicht einfache (visuelle) Ermittlung und Notation von Überschlägen
- Alle drei Grundaufgaben sind am einheitlichen einfachen Schema darstellbar
- Die Doppelleiste als Darstellungsmittel für allgemeine Zuordnungen - insbesondere bei proportionalen Zuordnungen - wird vorbereitet (Dreisatz-Schema).

2.4 Das Grundanliegen der Prozentrechnung: Relativer Vergleich

Motiviert wird die Prozentrechnung durch den Wunsch nach relativen Vergleichen.

Aufgabe 2:

In der Klasse 7a haben 6 Schüler die Note „sehr gut“ in Sport, in der Klasse 7b dagegen nur 5 Schüler.
Kann man behaupten, die Klasse 7a habe mehr Spitzensportler als die 7b?

Zusatzinformation:
In Klasse 7a sind insgesamt 30 Schüler in Klasse 7b dagegen nur 20.

In welcher Klasse ist die ***Anzahl***, in welcher der ***Anteil*** der Spitzensportler größer?

Wir stellen die Grundgedanken von absolutem und relativem Vergleich gegenüber:

Karin erhält 40 € monatliches Taschengeld Ulrike dagegen 50 €.

Absoluter Vergleich	Relativer Vergleich
80 € $\xrightarrow{+?}$ 100 €	80 € $\xrightarrow{\bullet ?}$ 100 €
„um wie viel mehr“ ?	„wie viel mal soviel“?
Es interessiert der Unterschied:	Es interessiert das Verhältnis:
Differenzbildung:	Quotientenbildung:
100 € – 80 € = 20 €	**100 € : 80 € =** $\frac{100}{80} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\,$**%**

Selbstverständlich wird man bei der Einführung nicht unbedingt ein Beispiel mit einem über 100 % liegenden Vergleich wählen, sondern etwa folgendes Beispiel:

Hans hat von seinem Taschengeld von 20 € schon 5 € für einen Kinobesuch ausgegeben. Welcher Anteil ist das?

2.5 Prozentsätze haben multiplikativen Charakter

Aufgabe 3:

Ein Kaufmann erhöht den Preis für einen gut gehenden Artikel zunächst um 20% und, weil sich der Artikel weiterhin gut verkauft, danach noch einmal um 50%.
Um wie viel Prozent hätte der Kaufmann den Preis mit einem Schritt auf den nun erreichten Endwert erhöhen müssen?

Prozentsätze haben immer multiplikativen Charakter. Man darf sie (fast) nie addieren oder subtrahieren. (Ausnahme: Nur bei gleichem Grundwert):

Falsche Vorstellung

$\cancel{\xrightarrow{+\,20\,\%}\quad\xrightarrow{+\,50\,\%}}$

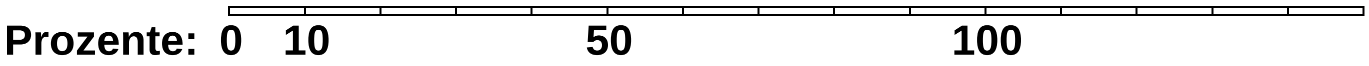
Richtige Vorstellung:

$\xrightarrow{\bullet\,1{,}20}\quad\xrightarrow{\bullet\,1{,}50}$

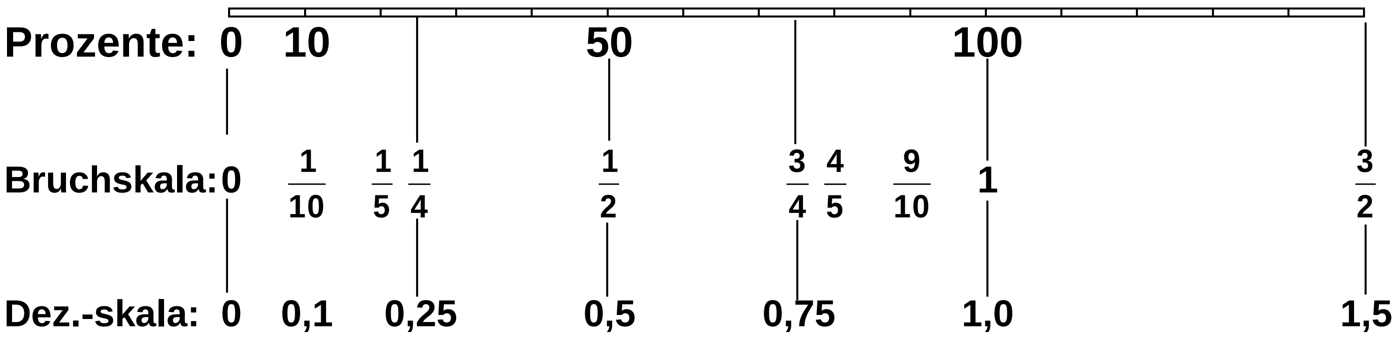
+ 70 % $\longrightarrow$

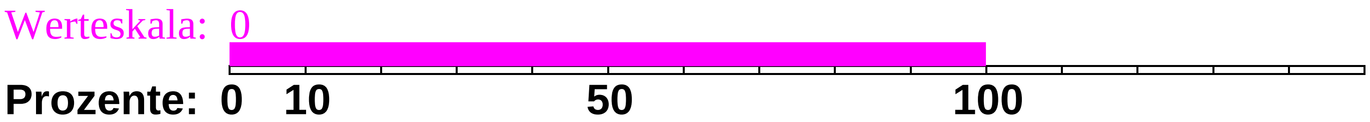
$\cdot$ 1,80 $\longrightarrow$

Prozentrechnung anschaulich und „ohne Rechnen“:



Auf der Prozentskala gilt: 1 mm entspricht genau 1%, man kann Prozentsätze also messen!





2.6 Stufenfolge im Unterricht

a) Zunächst wird der **Prozentbegriff** wie üblich eingeführt als andere Sprechweise für **Hundertstel**. Es wird gezeigt, wie er vor allem als **Verhältnisbegriff** beim relativen Vergleich (Frage: Wie viel mal soviel?) eine Rolle spielt. Bereits in dieser Stufe werden andere Zahlformen (gewöhnliche Brüche, Dezimalform) parallel verwendet: $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Die Umwandlung der Darstellungsformen von Bruchzahlen in diesen drei Formen (gewöhnlicher Bruch, Dezimalform, Prozentform) muss häufig und intensiv geübt werden und die einfachen Werte (Halbe, Viertel, Fünftel, Zehntel, Achtel) müssen zum sicheren Wissensbestand werden.

b) Danach wird die Frage nach dem **Grundwert** (**Bezugswert, Ausgangswert, Ganzes, Anfangswert, Vergleichsgröße, Basis, ...**) ins Spiel gebracht: Worauf bezieht sich der Vergleich? Die Schüler haben zunächst nichts anderes zu tun, als anzugeben, was der **Grundwert** beim gegebenen Sachverhalt (Aufgabe) ist. Die Begriffe *Prozentsatz* und *Prozentwert* sind zweitrangig, und man kann getrost auch ganz auf sie verzichten. ***Das A und O der Prozentrechnung ist der Grundwert.***

c) Nun beginnen wir mit der oben dargestellten **grafische**n **Veranschaulichung**.
An dieser behandeln wir die drei **Grundaufgaben** in überschlägiger Behandlung (Kopfrechnen schulen):

A … Prozentwert gesucht B … Prozentsatz gesucht C … Grundwert gesucht.

Die dritte Grundaufgabe bedarf einer gewissen Aufmerksamkeit in der Behandlung, weil der Eintrag des Grundwerts nicht von Anfang an möglich ist. Er wird nach Eintrag der bekannten Angaben durch grobes Extrapolieren ermittelt.

d) In diesem Stadium können alle Prozentaufgaben näherungsweise **ohne Rechnen, aber mit viel Verständnis** ("Einsicht"), gelöst werden. Man muss sich für diese Phase Zeit lassen. Die nachfolgende Rechenphase im Tabellenschema ist dann nur noch das Einsammeln vorher gemachter Erfahrungen!

e) In der anschließenden Phase werden unter Anwendung des **Dreisatzschemas** – angelehnt an die Vorstellung aus der grundlegenden Grafik – die Grundaufgaben der Prozentrechnung mit Hilfe des ETR zahlenmäßig exakt behandelt. Es wird dringend empfohlen, vor jeder Rechnung einen Überschlag an Hand einer groben Freihandskizze nach dem Grundschema der Prozentleiste durchzuführen und daran das Rechenergebnis zu kontrollieren.

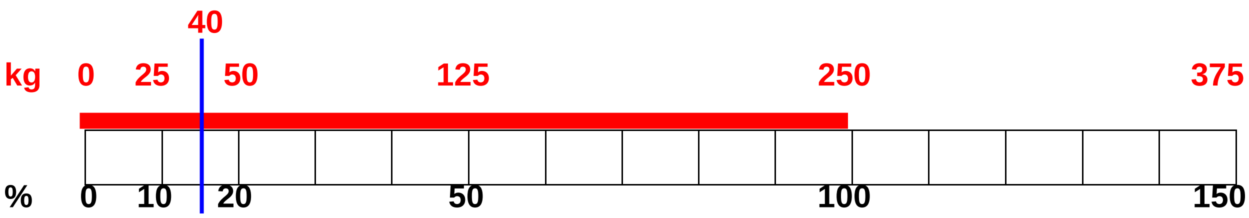
2.7 Lösungsformen für die Grundaufgaben der Prozentrechnung

Wir stellen die möglichen Lösungsformen anhand einfacher Beispiele dar und zwar für jede der drei Grundaufgaben der Prozentrechnung:

Grundaufgabe 1: Wie viel sind 16% von 250 €?

Zunächst empfehlen wir stets und immer bei Prozentaufgaben einen einfachen Überschlag an Hand der in Abschnitt 2 eingeführten Doppelleiste zu machen und zwar unabhängig von der gewählten Lösungsmethode. Im vorliegenden Fall etwa so:

Man trägt zunächst wie immer an der 100-mm-Leiste die Marken für 0%, 100%, 50%, 150% auf der Prozentskala und die dazugehörigen (gerundeten) Werte (hier Euro-Beträge) auf der Werteskala ein. Im vorliegenden Fall ergänzt man noch den 20% - Eintrag und erhält als Überschlag etwa den Mittelwert zwischen 10% und 20%.



- **Dreisatz mit Operatoren:**

  Eine erste und sehr empfehlenswerte Lösungsform ist der Dreisatz mit Operatoren bzw. das Tabellenschema mit Operatoren:

  Wir verzichten hier auf die Wiedergabe des Dreisatzschemas und verweisen diesbezüglich auf die Lösungsformen für Proportionalitäten (siehe in Teil 3. Zuordnungen).

- **Operatorschema:**

  $250\ € \xrightarrow{\cdot 0{,}16} 40\ €.$

  Hierbei wird man den Operator in Dezimalform angeben, wenn man mit dem Taschenrechner rechnet bzw. in Prozentform oder Bruchform, wenn man im Kopf rechnet.

- **Verhältnisgleichung:**

  $x : 250 = 16 : 100$ bzw. $\frac{x}{250} = \frac{16}{100}$ und daraus $x = \frac{16 \cdot 250}{100} = 40$

Grundaufgabe 2: Ein Preis wird von 60,00 € um 21,00 € auf 81,00 € erhöht. Wie viel Prozent beträgt die Erhöhung?

Auch in diesem Fall wird man unabhängig von der gewählten Lösungsform auf alle Fälle vorab eine Skizze mit der bekannten Doppelskala für einen einfachen Überschlag anfertigen. Führen Sie dies zur Übung selbst durch, auch um zu erkennen, welche Überlegungen dabei durchgeführt werden müssen.

- **Dreisatz mit Operatoren:**

  Ein Überschlag an Hand der Doppelskala aus 2.2 sollte vorangehen.

	60 €	sind	100%	
: 60				: 60
	1 €	ist	(100:60) %	
* 21				* 21
	21 €	sind	(100:60)*21 % = 35 %.	

- **Operatorschema:**

$$\begin{tikzcd} 60\,€ \arrow[rr, "\cdot ?"] \arrow[dr, ": 60"'] & & 21\,€. \\ & 1\,€ \arrow[ur, "* 21"'] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{21}{60} = 0{,}35 = 35\%$$

- **Verhältnisgleichung:**

  x : 100 = 21 : 60 bzw. $\frac{x}{100} = \frac{21}{60}$ daraus $x = \frac{21 \cdot 100}{60} = 35.$

Grundaufgabe 3: Im Schlussverkauf kostet eine Hose 42,00 € weniger. Das ist ein Preisnachlass von 30%. Wie hoch war der reguläre Preis?

Machen Sie zunächst einen Überschlag mit Hilfe der bekannten Doppelleiste.

- **Dreisatz mit Operatoren (**hier weggelassen**):**

30 %	sind	42,00 €
1 %	ist	(42,00 : 30) €
100 %	sind	(42,00 : 30) * 100 € = 140,00 €

- **Operatorschema:**

$$? \underset{:\,0{,}30}{\overset{\cdot\,0{,}30}{\rightleftarrows}} 42{,}00\ €$$

Rechnung: 42,00 € : 0,30 = 140,00 €.

- **Verhältnisgleichung:**

x : 42 = 100 : 30 bzw. $\frac{x}{42} = \frac{100}{30}$ daraus $x = \frac{100 \cdot 42}{30} = 140$

Die sicher einfachste und am leichtesten zu durchschauende Lösungsform ist der Dreisatz mit Operatoren. Sowohl das Operatorschema als auch die Verhältnisgleichung (erst recht die allgemeine algebraische Gleichung Pw = Gw * Ps bzw. P = G * p/100) erfordern bei der Anwendung jeweils einige algebraische Grundkenntnisse und Techniken.

Nach Einübung der Grundaufgaben erfolgt der Übergang zu den Änderungsfaktoren.

2.8 Erhöhter bzw. verminderter Grundwert. Änderungsfaktoren

Der entscheidende Schritt bei der Prozentrechnung ist der Übergang von den Prozentsätzen zu den Faktoren, also von der Änderungsrate zum Änderungsfaktor. Wir erläutern dies an einem Beispiel:

Aufgabe 4:

a) Beim Winterschlussverkauf werden alle Preise um 35 % gesenkt. Wie kann man ganz einfach aus den regulären Preisen auf die Endpreise schließen, ohne Berechnung der Preisreduktion?

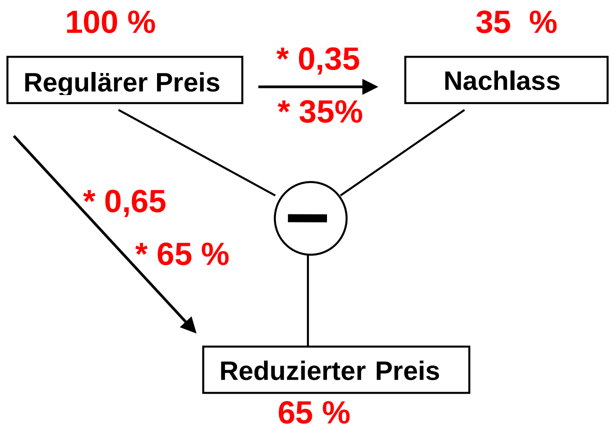
b) Durch die Mehrwertsteuer werden alle Nettopreise um 16 % erhöht. Wie kann man ganz einfach aus den Nettopreisen auf die Endpreise schließen, ohne Berechnung der Mehrwertsteuer?

Bei beiden Aufgaben findet also gegenüber den bisherigen Grundaufgaben eine Wendung der Fragestellung im folgenden Sinne statt:

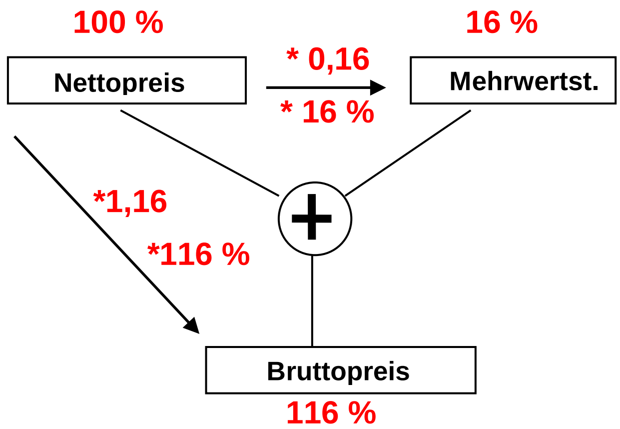
An Stelle der Frage „**um welchen Betrag ändert sich der Preis**“ stellt man die Frage „**auf welchen Betrag ändert sich der Preis**“.

Wir stellen dies übersichtlich in zwei Diagrammen für die in Aufgabe 3 gegebenen Beispiele dar:

Grundwertverminderung



Grundwerterhöhung

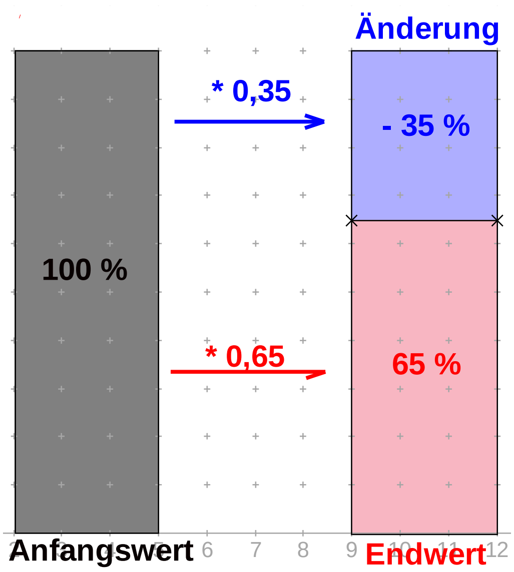


Wenn wir also nicht fragen **um** welchen Prozentsatz, sondern **auf** welchen Prozentsatz sich eine Größe ändert, dann erhalten wir den **Änderungsfaktor**, mit dem sich sofort auf den Endwert schließen lässt.

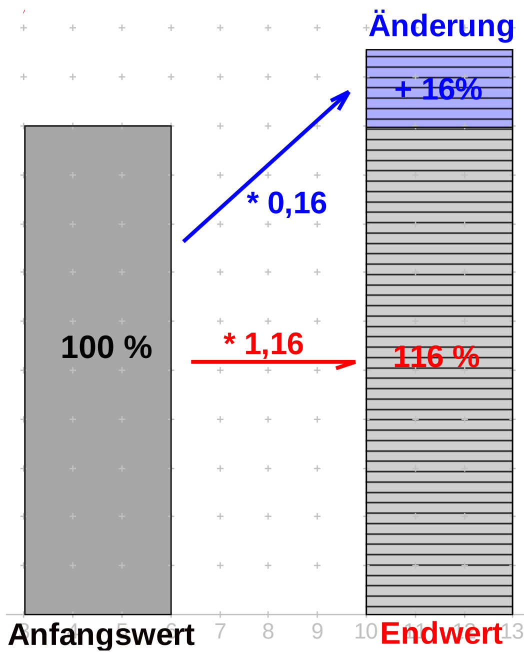
- Einer Reduzierung um 35 % entspricht ein Endwert von 65 %, und daher ein Änderungsfaktor von 0,65.
- Einer Erhöhung um 16 % entspricht ein Endwert von 116 % und daher ein Änderungsfaktor von 1,16.

Wenn sich dieser ***Übergang von der Änderungsrate zum Änderungsfaktor*** bei Schülern vermitteln lässt, dann hat man einen großen Schritt zum verständnisvollen Umgang mit Prozentsätzen erreicht. Man muss zu diesem Zweck den Sachverhalt an vielen einzelnen Beispielen durchdenken, durchrechnen und anschaulich darstellen. Neben den oben angegebenen Diagrammen in Form von Rechenbäumen eignen sich dafür besonders auch die folgenden Formen von Streifendiagrammen:

Grundwertverminderung



Grundwerterhöhung



1. Bruchform – Prozentform – Dezimalform

Man kann Zahlen in verschiedenen Formen angeben. Fülle die Tabelle aus wie in den folgenden Beispielen:

$\frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\ \%$ $\qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$ $\qquad 116\% = \frac{116}{100} = 1{,}16$ $\qquad \frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$

Bruchform	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{5}$												$\frac{5}{4}$
Dezimalform	0,60			0,10	0,80	1,30	0,15					0,75	0,125	0,16	
Prozentform	60%							3,5%	120%	116%	98%				

2. Prozentuale Änderungen

Prozentuale Änderungen können durch Änderungsfaktoren angegeben werden. Ergänze die folgende Tabelle.

Änderungsfaktor = 1 ± Prozentsatz = 1 ± $\frac{p}{100}$ = 100% ± p% **(+ bei Zunahme; – bei Abnahme).**

Änderung **um**	$+\frac{3}{8}$	- 2%	+ 16%	$+\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$									$+\frac{7}{10}$
Änderung **auf**	$\frac{11}{8}$	98%				$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$						
Änderungsfaktor	•1,375	•0,98							•1,75	•1,035	•0,97	•1,05	•1,80	

3. Einfaches Rechnen mit Änderungsfaktoren

Anfangswert • Änderungsfaktor = Endwert **A • q = E**

$\boxed{\text{Anfangswert}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor}} \boxed{\text{Endwert}}$

Anfangswert	75,00	125,00	250,00				170,00	1234,00	760,00			225,00	350,00
Änderungsfaktor	•1,160	•0,850		•1,375							•1,44		
proz. Änderung	+ 16%		+ 3,5%		+ 16%	- 2%			+ 25 %	- 35 %			
Endwert	87,00			555,50	377,00	346,92	182,75	2345,00		876,54	567,89	250,00	1050,00

4. Mehrere prozentuale Änderungen:

$\boxed{\text{Anfangswert}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor1}} \boxed{\text{Zwischenwert 1}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor2}} \boxed{\text{Endwert}}$

• (Änderungsfaktor1 • Änderungsfaktor2)

Anfangswert	175 €	175	432 kg	1236 m	680 €	276 €			570 kg		650 €
Änderungsfaktor1	• 1,16	• 0,8	• 0,6	• 1,2	• 1,25	$\bullet\ \frac{3}{4}$		$\bullet\ \frac{3}{4}$		$\bullet\ \frac{6}{5}$	• 1,20
Änderungsfaktor2	• 0,8	• 1,16	• 1,6		• 0,8		• 1,25		$\bullet\ \frac{3}{4}$		
Ges. Änd.-faktor	• 0,928			• 1,44		• 1	• 1,5	$\bullet\ \frac{3}{5}$			
Ges. proz.Änderung	- 7,20%								+ 25%	- 40%	+ 80%
Endwert	162,40 €						360	630 €		720	

2.9 Zinsen für Teile eines Jahres

Ein einfaches und zugleich wichtiges Beispiel für die Verkettung von Änderungsfaktoren ist die Berechnung der Zinsen für Teile eines Jahres. Wir zeigen dies an einem Beispiel:

Ein Kapital von 1234,- € wird bei einem Zinssatz von 3% p. a. nur 7 Monate lang verzinst. Wie viel Euro erhält man an Zinsen für diesen (unterjährigen) Zeitraum?

Hinweis: Die Angabe „p. a.“ bei Zinssätzen bedeutet „per annum“, also pro Jahr.

Lösung in Operatorform:

$$1236.\text{- €} \xrightarrow{\cdot 0{,}03} 37{,}08\ € \xrightarrow{\cdot \frac{7}{12}} 21{,}63\ €$$

$$\textbf{Kapital} \xrightarrow{\cdot Zinssatz} \textbf{Jahreszins} \xrightarrow{\cdot Zeitfaktor} \textbf{Zeitzins}$$

Allein schon die grafische Anordnung zeigt die zentrale Stellung des Jahreszinses. Man kann daraus schon für alle Aufgaben in diesem Sachkontext die Empfehlung aussprechen:

Berechne stets zuerst den Jahreszins!

Eine Anordnung nach der ***Dreisatzmethode*** zeigt die hintereinander geschachtelten Dreisätze für die beiden Teilaufgaben:

1. Berechnung des Jahreszinses:

100 %	sind	1236.- €
1 %	ist	12,36 €
3 %	sind	37,08 €

2. Berechnung des Zeitzinses:

Für 12 Monate	gibt es	37,08 € Zinsen
Für 1 Monat	gibt es	37,08 : 12 = 3,09 € Zinsen
Für 7 Monate	gibt es	3,09 * 7 = 21,63 € Zinsen.

Auch in dieser Anordnung erkennt man wieder die zentrale Stellung der Jahreszinsen.

Aufgabe 5:

Von den 4 Größen Kapital, Zinssatz p. a., Verzinsungszeit und Zeitzinsen müssen drei gegeben sein um die vierte berechnen zu können.
Lösen Sie je eine selbst gestellte Aufgabe zu jedem Typ. Wo gibt es Schwierigkeiten?

2.10 Aufgabenbeispiele zur Prozentrechnung

Aufgabe 6: Grundwerterhöhung und -verminderung

a) Der Preis für eine Fahrkarte wurde um 15 % erhöht auf 27,60 €. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

b) Im Winterschlussverkauf werden alle regulären Preise um 25 % herabgesetzt, so dass eine Jacke nur noch 146,25 € kostet. Wie hoch war der reguläre Preis und um wie viel Euro wurde er herabgsetzt?

Aufgabe 7: Versteckte Preiserhöhung

a) Ein Teeladen erhöht die Preise dadurch, dass er die Packung, die seither 5 g Tee enthielt, künftig nur noch mit 4 g füllt, aber den Preis beibehält. Die Menge wird also um 20% reduziert, der Preis bleibt gleich. Um welchen Prozentsatz wird dadurch der Preis erhöht?

b) Ein Beutel Zitronen enthielt bisher 4 Stück. Nun sollen sie billiger werden, indem der Preis für eine Packung beibehalten wird, aber künftig 5 Zitronen in der Packung sind, d.h. die Menge wird um 25 % erhöht, der Preis bleibt gleich. Um welchen Prozentsatz wird dadurch der Zitronenpreis verbilligt?

c) Geben Sie für diese Modellfälle allgemeine Aussagen an:
Welcher Preiserhöhung entspricht die Verminderung der Menge um x %?
Welcher Preisreduktion entspricht die Erhöhung der Menge um x %?

Aufgabe 8: Mehrwertsteuer

a) Die Regierung eines Landes will die Mehrwertsteuer, die bisher 25 % betrug, zur Reduzierung des Staatsdefizits auf 30 % erhöhen. Die Opposition wettert: „Künftig wird alles um 5% teurer!“ Die Regierung hält dagegen: „Dafür reduzieren wir die Mehrwertsteuer für Lebensmittel von bisher 25 % auf 20 %. Alle Lebensmittel sind also künftig um 5 % billiger.“ Nehmen Sie als aufgeklärter Bürger Stellung zu diesen Aussagen und stellen Sie diese richtig.

b) Auf dem Kassenzettel im Supermarkt steht:
“Zu zahlender Endbetrag 272,02 €. Dieser Betrag enthält 16 % Mehrwertsteuer.“
Wie viel Prozent des Endbetrags beträgt die Mehrwertsteuer?
Welcher Betrag an Mehrwertsteuer ist im Endbetrag enthalten?

Aufgabe 9: „Wahlanalysen“

Partei XYZ hat bei der vorhergehenden Wahl 8% , diesmal aber nur noch 6% der Stimmen erhalten.
Folgende Kommentare sind zum Wahlergebnis im Fernsehen zu hören:

(1) „Die XYZ hat einen leichten Verlust in Höhe von nur 2% zu verkraften."

(2) „Die XYZ hat einen Verlust in Höhe von 25% hinnehmen müssen."

(3) „Die XYZ hat zwei Prozentpunkte eingebüßt."

(4) „Die XYZ hat ein Viertel ihrer Wähler verloren."

(5) „Die XYZ ….

a) Wer hat wohl welche Aussage gemacht und mit welcher Absicht?

b) Welche der Aussagen sind sachlich richtig und welche sind sachlich falsch?

Aufgabe 10: Gewinn oder Verlust?

Ein Händler verkauft zwei Autos zum selben Preis von 4800 €, eines mit 20% Gewinn, das andere mit 20% Verlust. Am Abend erzählt er seiner Frau, heute sei er gerade noch mit einem blauen Auge davongekommen und habe finanziell weder gewonnen noch verloren. Nehmen Sie sachlich Stellung zu dieser Aussage.

Aufgabe 11: Wer ist der günstigste Anbieter?

Ein Fahrrad kostet laut Katalog 1234.- € (Katalogpreis KP). ,
Welcher Händler macht das günstigste Angebot? Schätzen Sie zuerst.

A: Katalogpreis + 16% Mehrwertsteuer, darauf dann 20% Rabatt

B: Katalogpreis mit 20% Rabatt, darauf dann + 16% Mehrwertsteuer

C: Katalogpreis mit 4% Nachlass (4 % = 20 % – 16 %).

Bei welchem Händler kauft man am günstigsten ein?

Aufgabe 12: Gewichtsverlust

100 kg Erdbeeren mit 99% Wassergehalt werden so lange getrocknet bis der Wassergehalt nur noch 98% beträgt. Wie hoch ist der dabei auftretende Gewichtsverlust bzw. wie viel kg wiegen die Erdbeeren nach dem Trocknen?

Wenn Sie die vorstehende Aufgabe 12 richtig gelöst haben, werden Sie über das Ergebnis überaus erstaunt sein und es zunächst nicht glauben wollen. Es stellt sich jedoch ganz anders dar, wenn man dieselbe Aufgabe anders formuliert:

Aufgabe 12a: Gewichtsverlust

100 kg Erdbeeren haben einen Gehalt von 1% (bzw. 10%) an Trockensubstanz, der Rest ist Wasser. Sie werden nun getrocknet, bis der Gehalt an Trockensubstanz auf 2% (bzw. 20%) gestiegen ist. Wie viel kg Wasser ist dabei verdampft?

Lösungsansatz:

Grundgedanke: Beim Trocknen bleibt die Trockensubstanz gleich, nur Wasser wird verdampft.

	Wassergehalt	Trockensubstanz
Vor dem Trocknen	**99% bzw. 99 kg**	**1% bzw. 1 kg**
Nach dem Trocknen	**98 % bzw. ????**	**2% bzw. 1 kg**

Aufgabe 13: Heizkostenersparnis

Die Innung der Heizungsbauer wirbt mit folgender Zeitungsannonce:

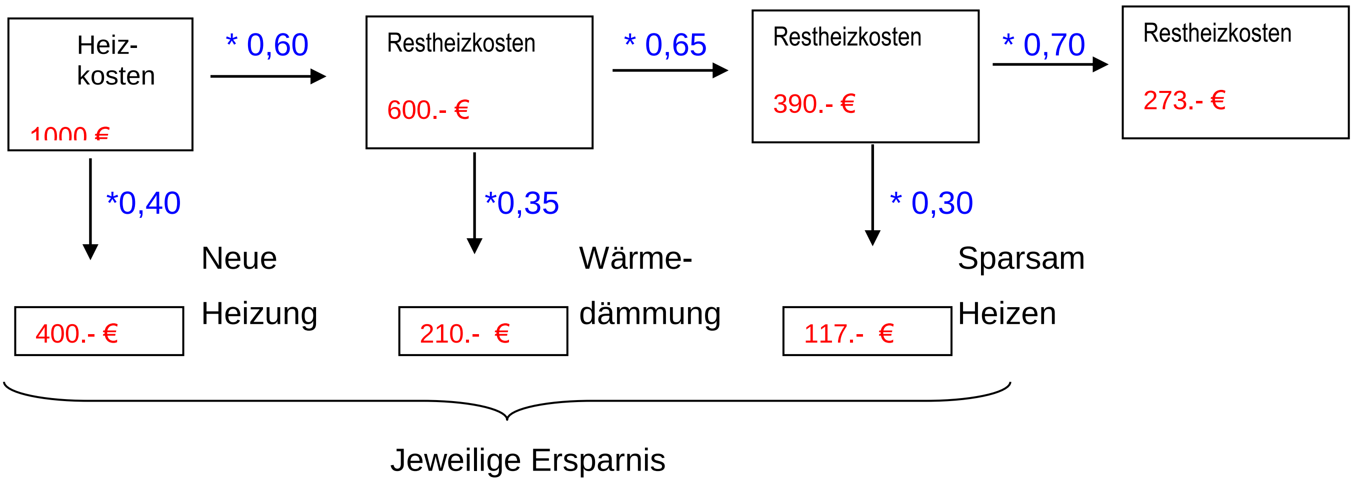
So kann man Heizkosten sparen: *Durch eine neue Heizanlage bis zu 40%,*
durch Wärmedämmung am Haus bis zu 35%,
durch sparsames Heizen bis zu 30%.

Max Schlau hat gleich alle drei Maßnahmen realisiert. Hat er noch Restheizkosten?

Wir bieten für diese interessante Aufgabe einen Lösungsvorschlag und Hinweise zur Methodik im Unterricht an:

Lösungsvorschlag:

Nach Schätzungen und Voraussagen wird in einem ersten Durchgang ein leeres Raster erstellt, das nur den Sachverhalt repräsentiert. Die blauen und roten Einträge sind also im ersten Durchgang nicht vorhanden:



Erst nachdem dieses Leerraster mit Beschriftungen erstellt ist, kümmert man sich um die quantitative und rechnerische Seite der Sache (Mathematik ist mehr als Rechnen!):

Jetzt werden die Daten aus der Aufgabe übernommen und eingetragen (hier blau) bzw. ergänzt.
Eine weitere Hilfe für Schüler könnte sein, von einem konkreten Betrag der Heizkosten auszugehen und die Sache damit durchzurechnen (roter Eintrag).

Aufgabe 14: Verdopplung bzw. Halbierung.

a) Ein Händler will den Preis für einen gut gehenden Artikel durch 5-malige Erhöhung um jeweils 20 % verdoppeln. Was meinen Sie dazu?

b) Ein schlecht laufender Artikel soll durch 5-malige Reduzierung um jeweils 10 % auf den halben gegenwärtigen Preis reduziert werden. Kommt das hin?

Aufgabe 15: Eine komplexe Aufgabe zur Prozentrechnung (Zinseszinsen)

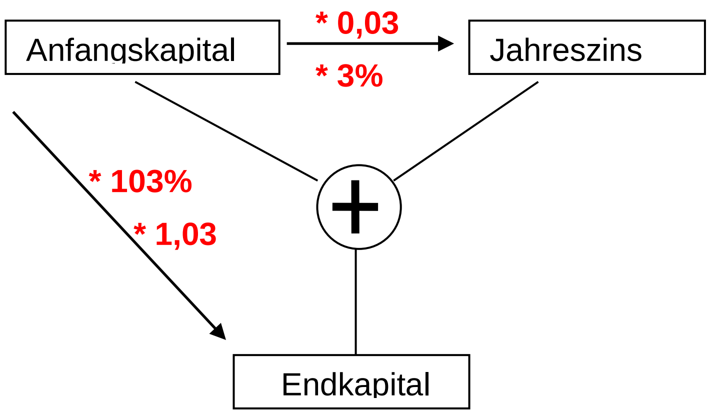
Wie viel Geld hätte man heute samt Zins und Zinseszins, wenn man zur Zeit von Christi Geburt 1 € angelegt hätte und dieser mit 3% verzinst worden wäre?

Wir geben einen kurzen Überblick über eine mögliche Behandlung in der Schule (als integrierende und wiederholende problemorientierte Aufgabe):

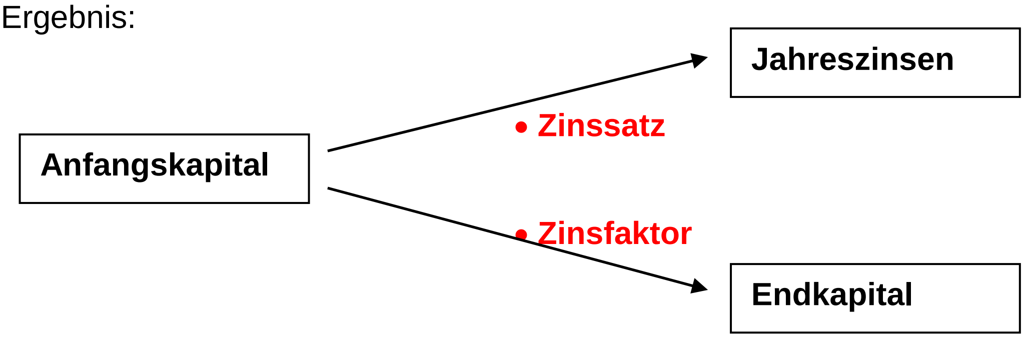
Schritt 1: Schätzungen abgeben und damit Erwartungshaltungen wecken.
Einfacher Zins? Dieser ist zumindest eine Untergrenze.

Schritt 2: Vorbereitende Übungen zu Veränderungsfaktoren:
Zunahmen um 3% bedeutet * 1,03.
Abnahme um 20% bedeutet * 0,8.
Zunahme um 16 % bedeutet * 1,16.
…..

Schritt 3: Anwendung des Schemas vom vermehrten Grundwert auf die Zinsrechnung.
Herausarbeiten des Zusammenhangs und des Unterschieds von **Zinssatz** und **Zinsfaktor.** Der formelmäßige Zusammenhang $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist dabei unwichtig. Wichtig ist das Erfassen des inhaltlichen Zusammenhangs:
Wird das Kapital (100%) um den Jahreszins (3%) vermehrt, so erhält man das Endkapital (103%).



Ergebnis:



Schritt 4: Verketten von Veränderungsfaktoren:

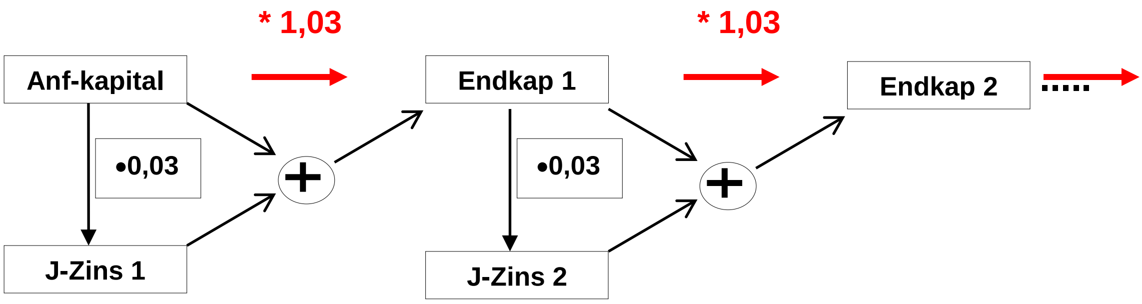
*2 verkettet mit *3 ergibt *6 und nicht *5.

Man arbeitet zuerst mit ganzen Zahlen (bitte nicht am Beispiel *2 *2) die Verkettung von Multiplikationsoperatoren: $\xrightarrow{\bullet 3}\xrightarrow{\bullet 4} = \xrightarrow{\bullet 12}$

Bei den Beispielen der Art $\xrightarrow{\bullet 1{,}03}\xrightarrow{\bullet 1{,}04}$ kommen nochmals gravierende Schülerfehler vor, auf die man achten muss. Welche?

Schritt 5: Anwendung auf die eingangs gestellte Fragestellung:

Nun kann man die bisher gemachten Erfahrungen auf die Problemstellung anwenden und ein Berechnungsschema für die Zinseszinsaufgabe entwickeln:



Mit Hilfe des Zinsfaktors kann man nun die Ausrechnung des Endkapitals nach n Jahren vereinfachen:

$K_0 \xrightarrow{*q} K_1 \xrightarrow{*q} K_2 \xrightarrow{*q} K_3$ ..... $\xrightarrow{*q} K_n$ bzw. $K_n = K_0 * q^n$.

Als Lösung unseres Ausgangsproblems ergibt sich daher:

K_{2000} = 1 € * $1{,}03^{2000}$ = 47255178755828605388683227,53 €
= 47,255 * 10^{24} €.

Was könnte man mit dieser unvorstellbaren Summe nicht für jeden einzelnen Menschen auf der Erde ausrichten?

2.11 Zwei Ergänzungen für Lehrer

Man kann für die vorhergehende Aufgabe zur Verzinsung mit Zinseszinsen über 2000 Jahre eine einfache Überschlagsrechnung anstellen, wenn man ***zwei außerordentlich hilfreiche Einzelkenntnisse*** verwendet, die jeder Mathematiklehrer für die Sekundarstufe kennen und zur Verfügung haben sollte:

a) Die p * d ≈ 70 – Regel:

Ändert sich ein bestimmter Wert regelmäßig mit gleich bleibenden Prozentsätzen von jeweils p%, so verdoppelt bzw. halbiert sich der Wert nach d solchen Änderungsschritten und es gilt $p * d \approx 70$.

Wir beweisen diese Regel für eine Zunahme (d. h. p ist positiv). Für eine Abnahme verläuft der Beweis ganz analog:

Es gelte $K_n = K_0 * q^n$ wobei $q = 1 + p\%$ der Änderungsfaktor ist.

Nach $n = d$ Schritten soll Verdopplung stattfinden, also muss gelten:

$K_d = K_0 * q^d = 2 * K_0$ woraus folgt: $2 = q^d$.

Nun lässt sich die Zahl q darstellen als Potenz der Eulerschen Zahl e: $q = e^{\ln(q)}$.

Setzen wir dies in die erhaltene Gleichung ein und logarithmieren auf beiden Seiten, so erhalten wir unter Verwendung des natürlichen Logarithmus:

$\ln(2) = d * \ln(q)$.

Für kleine Werte von x gilt nun die Beziehung $\ln(1+x) \approx x$, wie man durch einzelne Beispiele mit Hilfe eines ETR leicht bestätigen kann. Ansonsten ist dies das Anfangsglied der Reihenentwicklung für ln(1+x). Wir verwenden diese Beziehung:

$\ln(2) = d * \ln(q) = d * \ln(1+\frac{p}{100}) \approx d * \frac{p}{100}$. Nun ist $\ln(2) \approx 0{,}7$ womit unsere Regel bewiesen ist.

Sie ist außerordentlich hilfreich bei Abschätzungen der Folgen von prozentualem Wachstum oder prozentualer Abnahme.

Beispiele:

- Die Bevölkerungszahl eines Landes wächst jährlich um 2,5 %.
  Nach der $p * d \approx 70$ – Regel wird sich die Bevölkerungszahl etwa alle 28 Jahre verdoppeln, in einem Jahrhundert also auf das 16-fache anwachsen!!!
- Der Ölverbrauch eines Landes kann jedes Jahr um 5% gesenkt werden.
  Folglich kann man dadurch in einem Zeitraum von 14 Jahren eine Halbierung des derzeitigen Verbrauchs erreichen.
- Der Luftdruck nimmt mit je 100 m Höhenzunahme um jeweils ca. 1,4% ab.
  In welcher Meereshöhe herrscht nur noch der halbe normale Luftdruck?

Wie hoch ist der Luftdruck noch in ca. 8000 m Höhe auf dem Mt. Everest?
Was bedeutet das für einen Bergsteiger?

- Die Halbwertszeit eines bestimmten radioaktiven Materials beträgt 140 Jahre.
  Um wie viel Prozent nimmt das Material pro Jahr durch Verstrahlung ab?
- u. v. a. m.

b) Es gilt $2^{10} \approx 10^3$. Denn $2^{10} = 1024$ und $10^3 = 1000$.

Wir zeigen, wie man mit diesen beiden Kenntnissen das Verzinsungsproblem über 2000 Jahre einer einfachen Überschlagsrechnung unterziehen kann:

Prozentuale Zunahme um jeweils 3% pro Jahr bedeutet nach der $p * d = 70$ – Regel eine Verdopplung in ca. 25 Jahren, also etwa vier Verdopplungen in einem Jahrhundert, d. h. das $2^4 = 16$ - fache nach je 100 Jahren.

In 20 Jahrhunderten kommt man daher auf eine Veränderung mit dem Faktor

$(2^4)^{20} = 2^{80} = (2^{10})^8 \approx 10^{24}$. Dieser einfache Überschlag steht in bester Übereinstimmung mit unserem oben errechneten Ergebnis!

<u>Eine kleine Anmerkung zum Schluss:</u>

Was macht eine Problemaufgabe aus?

- **Offenheit der Aufgabenstellung**
- Nicht unbedingt eindeutige Lösung
- Ausreichende Problemvermittlung und dadurch Motivation (Voraussagen!). Dazu gehört auch eine hinreichende Sachverhaltsklärung wie die Vermittlung von Alltagswissen: Non scholae, sed vitae discimus!.
- Betroffenheit der Schüler vom Problem: Aufbau von Erwartungshaltungen.
- Herausforderung (Widerspruch, Verführung, Anstoß) in der Aufgabenstellung.
- Erwartungswidrige, unglaubliche oder zumindest zweifelhafte Lösungen.
- U. a. m.

Bemerkung:

Problemorientierung stellt nicht so sehr die routinemäßige Lösung der Aufgabe in den Vordergrund, sondern das Befassen mit der zu Grunde liegenden Fragestellung, das Ergründen der wirklichen Problemstellungen, das Wissenwollen um die Sachverhalte. Das kommt nicht unbedingt den üblichen Schülerhaltungen entgegen („Warum müssen wir beim Prozentrechnen nachdenken, warum dürfen wir nicht einfach rechnen?“). Schüler lieben es eher, Rezepte zu verwenden mit denen sie jegliches Nachdenken und Befassen mit der Sache selbst umgehen und blind rechnen können.

Formeln und Rezepte sind oft der sicherste Weg, das Nachdenken über einen Sachverhalt wirksam zu verhindern.

3. Zuordnungen

3.1 Einführende Beispiele

In vielen Bereichen des Alltags spielen Zuordnungen (meist sind es sogar Funktionen, also eindeutige Zuordnungen) zwischen Größenbereichen eine Rolle. Wir wollen dies durch die Aufzählung einer Reihe von Beispielen belegen:

- Warenmenge (Stückzahl, Gewicht, Volumen, Flächeninhalt, Länge, …) und Warenpreis (Geldwert) beim Einkaufen
- Lebensalter und Körpergewicht oder Körpergröße eines Menschen
- Briefgewicht und Briefporto
- Fahrstrecke und Taxikosten
- Energieverbrauch und „Strom“rechnung
- Telefontarife
- Füllhöhe eines Behälters in Abhängigkeit von der Füllzeit (bzw. Leeren)
- Zeitlicher Verlauf der Körpertemperatur bei einer Krankheit („Fieberkurve“)
- Zeitlicher Verlauf irgend einer beliebigen messbaren Größe
- Veränderung des Luftdrucks mit zunehmender Meereshöhe
- Veränderung des Schweredrucks mit zunehmender Meerestiefe
-

u. v. a. m.

Unter diesen Zuordnungen treten sehr häufig einige wenige Typen mit ganz besonderen Eigenschaften auf, die wir im Folgenden vorstellen bzw. erarbeiten wollen.

Aufgabe 1:

In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ist der Punkt P(6; 4) gegeben. Vom Punkt P(x; y) sind die Lote auf die Koordinatenachsen gezeichnet. Diese bilden zusammen mit den Achsen ein Rechteck R. Zeichnen Sie das Rechteck R im Koordinatensystem.

a) Zeichnen Sie mehrere weitere Rechtecke, die den ***gleichen Umfang*** wie das Rechteck R haben. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Seiten x und y der Rechtecksserie auf.
Welche Eigenschaften hat die Zuordnung s: $x \to y$, die durch diese Wertetabelle dargestellt ist? Welcher funktionale Zusammenhang besteht?
Wie lautet die Funktionsgleichung und auf welcher Kurve liegen die Punkte P?

b) Zeichnen Sie mehrere weitere Rechtecke, mit der ***gleichen Seitendifferenz*** $x - y$ wie beim Rechteck R. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Seiten x und y der Rechtecksserie auf.
Welche Eigenschaften hat die Zuordnung d: $x \to y$, die durch diese Wertetabelle dargestellt ist? Welcher funktionale Zusammenhang besteht?
Wie lautet die Funktionsgleichung und auf welcher Kurve liegen die Punkte P?

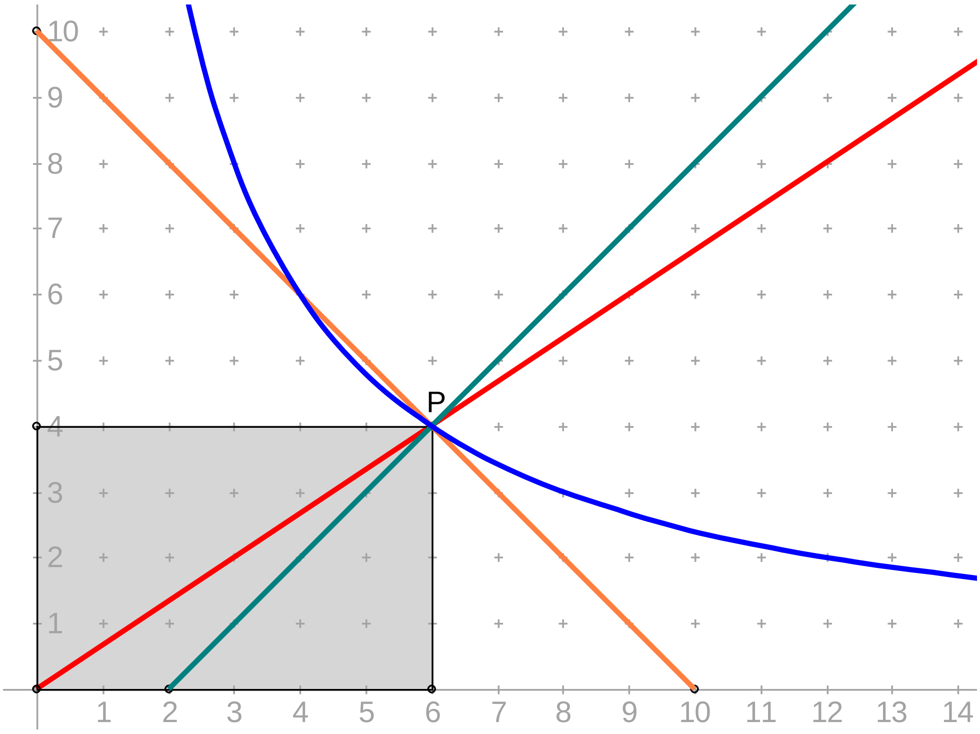
c) Zeichnen Sie mehrere weitere Rechtecke mit dem ***gleichen Seitenverhältnis*** $x : y$ wie beim Rechteck R. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Seiten x und y der Rechtecksserie auf.

Welche Eigenschaften hat die Zuordnung q: x→y, die durch diese Wertetabelle dargestellt ist? Welcher funktionale Zusammenhang besteht?
Wie lautet die Funktionsgleichung und auf welcher Kurve liegen die Punkte P?

d) Zeichnen Sie mehrere weitere Rechtecke mit dem ***gleichen Flächeninhalt*** wie beim Rechteck R. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Seiten x und y der Rechtecksserie auf.
Welche Eigenschaften hat die Zuordnung p: x→y, die durch diese Wertetabelle dargestellt ist? Welcher funktionale Zusammenhang besteht?
Wie lautet die Funktionsgleichung und auf welcher Kurve liegen die Punkte P?

e) Vergleichen Sie die vier Fälle miteinander. Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede erkennen Sie?

In jedem der vier Beispiele von Aufgabe 1 geht es um eine Zuordnung: Jeder Seitenlänge x (Breite des Rechtecks) ist jeweils in eindeutiger Weise eine Seitenlänge y (hier „Höhe“ des Rechtecks) zugeordnet. Es handelt sich also jeweils um eine Abbildung (Funktion, Zuordnung) von Längen, also innerhalb eines Größenbereichs. Wir setzen die üblichen Darstellungsformen für solche Zuordnungen (Wertetabelle, Schaubild, Gleichung etc.) als bekannt voraus. In folgender Abbildung sind alle vier Schaubilder der Teilaufgaben a) bis d) aus Aufgabe 1 dargestellt.

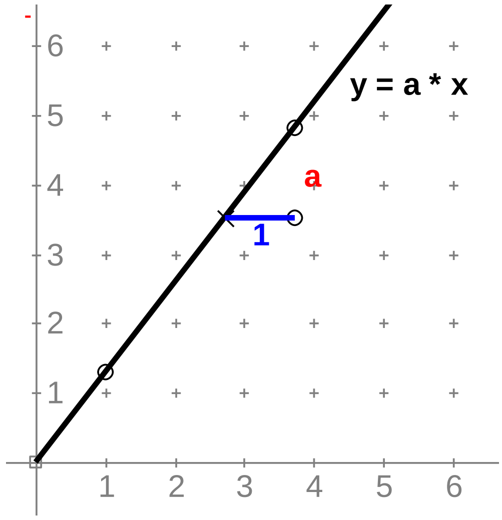


Wir wollen nun einige typische Sonderformen von Zuordnungen thematisieren, indem wir deren mathematischen Hintergrund beleuchten.

Hinweis:

Wir werden im Folgenden auf die detaillierte Untersuchung von Teilbarkeits- oder Kommensurabilitätsvoraussetzungen der Größenbereiche ebenso verzichten, wie auf Stetigkeitsüberlegungen der beteiligten Funktionen. Im Zweifelsfall setzen wir diese jeweils als gegeben voraus.

3.2 Die Proportionalität



Eine Zuordnung f: x → y = f(x) nennen wir eine **Proportionalität**, falls die zugeordneten Wertepaare (x; y) die Funktionsgleichung **y = f(x) = a * x** erfüllen, also die Punkte (x; y) des Schaubilds auf einer **Ursprungsgerade** liegen. Je nach Sachverhalt sind diese Funktionen nur für natürliche x-Werte (z. B. bei Stückzahlen) oder nur für rationale oder für alle positiven reellen Werte x definiert. Das hängt ganz von der Art der beteiligten Größenbereiche ab.

Wir werden im Folgenden einige wichtige Eigenschaften der Proportionalität ableiten und untersuchen, ob diese für die Proportionalität auch charakteristisch sind, d. h. ob umgekehrt jede Zuordnung mit der betreffenden Eigenschaft auch wirklich eine Proportionalität ist. Zuvor jedoch deuten wir diese Eigenschaften an Hand einer Wertetabelle der Funktion an:

+1 • 2 +

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
y	0	a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	15a

+ a • 2 +

(1) Eine erste Eigenschaft der Proportionalität ist die **Vervielfachungseigenschaft**:

Wird der x-Wert ver-k-facht, so wird auch der zugehörige y-Wert ver-k-facht,

d. h. es gilt: **f(k * x) = k * f(x)** **(A)**

Wir beweisen die Richtigkeit dieser Eigenschaft (A) für die Proportionalität unter Benutzung ihrer Funktionsgleichung:

f(k * x) = a * (k * x) = k * (a * x) = k * f(x).

Wir zeigen nun umgekehrt, dass aus der Vervielfachungseigenschaft (A) die Funktionsgleichung der Proportionalität folgt:

Wählen wir k = 0, so erhält man durch Einsetzen in (A): f(0) = f(0 * x) = 0 * f(x) = 0. Das Schaubild verläuft also mit Sicherheit durch den Ursprung.
Wählen wir x = 1 und setzen dies in (A) ein, so erhalten wir f(k * 1) = f(k) = k * f(1).
Setzt man f(1) = a, so erhält man daher allgemein f(x) = x * f(1) = a * x und unsere Behauptung ist bewiesen.

Jede Proportionalität erfüllt die Bedingung (A) und jede Funktion, die die Bedingung (A) erfüllt, ist eine Proportionalität.

(2) Eine weitere charakteristische Eigenschaft der Proportionalität ist die **Additionseigenschaft** oder **Summeneigenschaft**:

Man erhält den Funktionswert f(r + s), indem man die Funktionswerte f(r) und f(s) addiert, d.h. es gilt: **f(r + s) = f(r) + f(s)** **(B)**

Wieder beweisen wir die Richtigkeit der Behauptung, indem wir die Funktionsgleichung der Proportionalität benutzen:

f(r + s) = a * (r + s) = a * r + a * s = f(r) + f(s).

Nun zeigen wir umgekehrt, dass aus der Bedingung (B) die Funktionsgleichung folgt:

Mit r = s = 0 ergibt sich aus (B) die Eigenschaft f(0) = 0.

Mit r = s = 1 ergibt sich f(2) = 2 * f(1) und so fortfahrend (vollständige Induktion) für alle ganzen Zahlen k und x f(k * x) = k * f(x).
Unter Annahme weiterer vernünftiger Eigenschaften (Teilbarkeitseigenschaft und Kommensurabilitätseigenschaft) des Definitionsbereichs sowie der Stetigkeit für die Funktion f erhalten wir damit f(k * x) = k * f(x) für beliebige reelle k und x und daraus kann man gemäß (1) die Gleichung f(x) = a * x ableiten.

Jede Proportionalität erfüllt die Bedingung (B) und jede Funktion, die die Bedingung (B) erfüllt, ist eine Proportionalität.

(3) Eine Proportionalität hat die Eigenschaft der **Quotientengleichheit zugeordneter Wertepaare**. Auch dies ist eine charakteristische Eigenschaft der Proportionalität.

Die Quotienten aus zugeordneten Wertepaaren einer Proportionalität sind konstant,

d.h. es gilt: $$\boldsymbol{\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = const. = a} \qquad \textbf{(C)}$$

Zunächst folgt aus der Funktionsgleichung y = a * x sofort die Beziehung $\frac{y}{x} = a$ und damit die Konstanz der Quotienten zugeordneter Wertepaare. Selbstverständlich folgt umgekehrt aus der Konstanz des Quotienten aller zugeordneten Wertepaare die Funktionsgleichung einer Proportionalität. Man könnte die Wertetabelle der Proportionalität durch eine weitere Zeile mit den Werten $\frac{y}{x}$ ergänzen. In dieser Zeile würde an allen Stellen der konstante Wert a stehen.

Jede Proportionalität erfüllt die Bedingung (C) und jede Funktion, die die Bedingung (C) erfüllt, ist eine Proportionalität.

(4) Eine weitere Eigenschaft der Proportionalität ist die **Linearität** bzw. die Bedingung der „**gleichmäßigen Veränderung**“:

Nimmt der x-Wert um 1 zu, so nimmt der y-Wert stets um denselben Betrag a zu

d.h. es gilt: **f(x + 1) = f(x) + a** **(D)**

Wir beweisen auch diese Eigenschaft unter Benutzung der Funktionsgleichung der Proportionalität:

f(x + 1) = a * (x + 1) = a * x + a = f(x) + a.

Im Gegensatz zu den beiden ersten Bedingungen ist diese jedoch nicht charakteristisch für die Proportionalität, denn es gibt durchaus von der Proportionalität verschiedene Funktionen, die die Eigenschaft (D) ebenfalls erfüllen, z. B. g(x) = a * x + b mit von 0 verschiedenem Wert b. Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Aussage durch direktes Nachrechnen. Jede „lineare“ (ganzrational vom Grad 1) Funktion erfüllt die Bedingung (D), jedoch nur die mit f(0) = 0 sind Proportionalitäten.

Zwar erfüllt jede Proportionalität die Linearitätsbedingung (D), jedoch ist nicht jede Funktion, die die Linearitätsbedingung (D) erfüllt, eine Proportionalität.

<u>Zusammenfassung:</u>

Eine proportionale Funktion f: x → y = f(x) hat die Gleichung y = a * x.

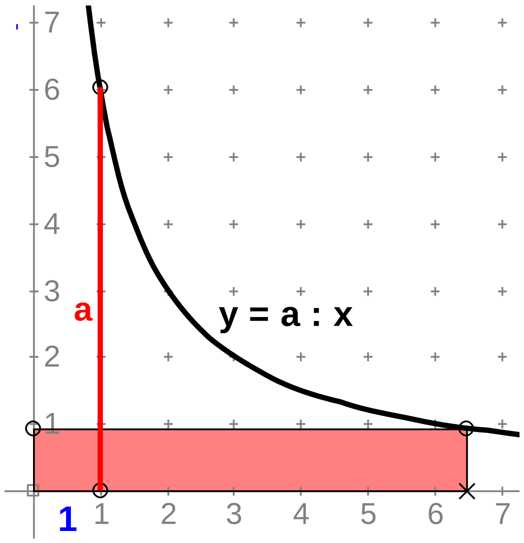
Ihr Schaubild ist eine Ursprungsgerade (im positiven Bereich nur eine Halbgerade).

Zugeordnete Wertepaare einer Proportionalität sind quotientengleich.

Die Vervielfachungseigenschaft f(k * x) = k * f(x), die Additionseigenschaft f(r + s) = f(r) + f(s) sowie die Quotientengleichheit zugeordneter Wertepaare f(x) : x = a = const. sind je einzeln charakteristische Eigenschaften der Proportionalität. Die Linearitätseigenschaft ist eine nicht charakteristische Eigenschaft der Proportionalität.

3.3 Die Antiproportionalität

Eine Zuordnung f: $x \rightarrow y = f(x)$ nennen wir eine **Antiproportionalität,** falls die zugeordneten Wertepaare (x; y) die Funktionsgleichung $\mathbf{y = f(x) = \frac{\mathit{a}}{\mathit{x}}}$ erfüllen, also die Punkte (x; y) des Schaubilds auf einer **rechtwinkligen Hyperbel** (in der Regel auf dem Ast im positiven Bereich) liegen.



Wir werden im Folgenden einige wichtige Eigenschaften der Antiproportionalität ableiten und untersuchen, ob diese für die Antiproportionalität auch charakteristisch sind. Zuvor jedoch deuten wir diese Eigenschaften an Hand einer Wertetabelle der Funktion an:

• 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
y	0	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{5}$	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{7}$	$\frac{a}{8}$	$\frac{a}{9}$	$\frac{a}{10}$	$\frac{a}{15}$

: 2

(1) Eine charakteristische Eigenschaft der Antiproportionalität ist die **inverse Vervielfachungseigenschaft:**

Zum k-fachen des x-Wertes gehört der k-te Teil des zugehörigen y-Wertes,

d. h. es gilt: $\mathbf{f(k * x) = \frac{1}{\mathit{k}} * f(x)}$ **(E)**

Wir beweisen die Richtigkeit dieser Eigenschaft (E) für die Antiproportionalität unter Benutzung ihrer Funktionsgleichung $f(k * x) = \frac{a}{k \cdot x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{a}{x} = \frac{1}{k} \cdot f(x)$

Wir zeigen nun umgekehrt, dass aus der inversen Vervielfachungseigenschaft (E) die Funktionsgleichung der Antiproportionalität folgt:

Wählen wir x = 1, so erhält man durch Einsetzen in (E), $f(k) = \frac{1}{k} \cdot f(1)$ oder mit der üblichen Variablen x als Argument und dem Wert a = f(1) die Gleichung $f(x) = \frac{a}{x}$. Damit ist unsere Behauptung bereits vollständig bewiesen (wieder verzichten wir auf die Untersuchung von Teilbarkeits-, Kommensurabilitäts- und Stetigkeitsfragen).

Jede Antiproportionalität erfüllt die Bedingung (E) und jede Funktion, die die Bedingung (E) erfüllt, ist eine Antiproportionalität.

(2) Eine Antiproportionalität hat die charakteristische Eigenschaft der **Produktgleichheit** zugeordneter Wertepaare.

Die Produkte aus zugeordneten Wertepaaren einer Antiproportionalität sind konstant,

d.h. es gilt: **$x * y = x * f(x) = const. = a.$** **(F)**

Zunächst folgt aus der Funktionsgleichung $y = \frac{a}{x}$ sofort die Beziehung $y * x = a$ und damit die Konstanz der Produkte zugeordneter Wertepaare. Selbstverständlich folgt umgekehrt aus der Konstanz des Produktes aller zugeordneten Wertepaare die Funktionsgleichung einer Antiproportionalität. Man könnte die Wertetabelle der Antiproportionalität durch eine weitere Zeile mit den Werten $y * x$ ergänzen. In dieser Zeile würde an allen Stellen der konstante Wert a stehen.

Jede Antiproportionalität erfüllt die Bedingung (F) und jede Funktion, die die Bedingung (F) erfüllt, ist eine Antiproportionalität.

Wie man durch Überprüfen an Hand der Wertetabelle bzw. unter Benutzung der Funktionsgleichung leicht nachprüft gibt es weder eine zur Additionseigenschaft noch zur Linearitätseigenschaft analoge Eigenschaft bei Antiproportionalitäten.

<u>Zusammenfassung:</u>

Eine antiproportionale Funktion g: $x \to y = g(x)$ hat die Gleichung $y = \frac{a}{x}$.

Ihr Schaubild ist eine rechtwinklige Hyperbel (im positiven Bereich nur ein Hyperbelast).

Zugeordnete Wertepaare einer Antiproportionalität sind produktgleich.

Die inverse Vervielfachungseigenschaft $f(k * x) = \frac{1}{k} * f(x)$ und die Produktgleichheit zugeordneter Wertepaare $x * f(x) = const.$ sind je einzeln charakteristische Eigenschaften der Antiproportionalität.

Die Antiproportionalität hat weder eine Additions- noch eine Linearitätseigenschaft.

3.4 Lineare Funktionen

Als „lineare Funktionen" wollen wir hier die „ganzrationalen Funktionen ersten Grades" bezeichnen. Sie haben als Schaubilder stets Geraden mit einer Gleichung von der allgemeinen Form $y = f(x) = a * x + b$ mit der Steigung a durch den Punkt S(0; b).

Vielfach wird der Begriff „linear" in engerem Sinne verwendet und die beiden folgenden Bedingungen dafür verlangt:

- Additionsbedingung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Multiplikationsbedingung: $f(x * y) = x * f(y)$.

Wie wir aus Abschnitt 3.1 jedoch bereits wissen, sind diese beiden Bedingungen charakteristisch für Funktionen vom Typ der Proportionalität, also Funktonen mit der Gleichung $y = a * x$ bzw. mit einer Ursprungsgerade als Schaubild.

Wenn wir hier „linear" im weiteren Sinne verwenden, so müssen wir dafür eine charakteristische Bedingung angeben:

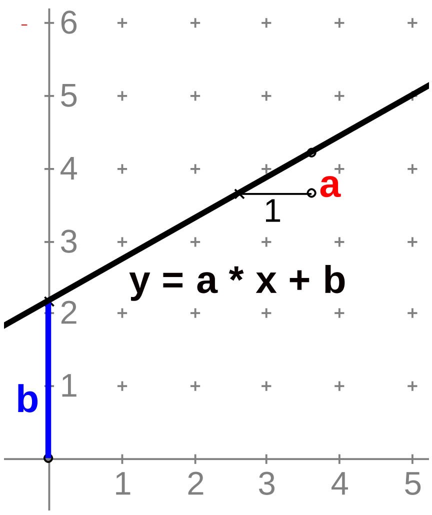
Wir bezeichnen eine Funktion $h: x \to y = h(x)$ als „**linear**", wenn die zu ihr gehörigen Wertepaare auf einer Geraden liegen. Dafür ist notwendig und hinreichend, die Eigenschaft der „**gleichmäßigen Veränderung**": ***Nimmt x um 1 zu, so verändert sich y stets um denselben Betrag a*** (ab- oder zunehmend, je nachdem a positiv oder negativ ist). Es gilt also folgende

„**Linearitätsbedingung**": $\mathbf{f(x + 1) = f(x) + a}$ **(L)**

Aus dieser Bedingung folgern wir:

$f(1) = f(0) + a$ $f(2) = f(1) + a = f(0) + 2 * a$

$f(3) = f(0) + 3 * a$ usf.



Mit den notwendigen Stetigkeitsbedingungen und dem Wert $f(0) = b$ erhalten wir damit die Funktionsgleichung $y = f(x) = a * x + b$, also eine „lineare Funktion" mit einer Geraden als Schaubild.

Lineare Funktionen treten häufig in Anwendungen auf, wenn man bestimmte Randbedingungen durch Idealisierung vernachlässigt. Selbstverständlich sind alle Proportionalitäten auch lineare Funktionen mit dem Sonderfall $b = 0$.

3.5 Prozentuales Wachstum. Exponentialfunktionen

Aufgabe 2:

a) Befindet man sich im Wasser in einer Tiefe x unter dem Wasserspiegel, so übt das Wasser durch sein Eigengewicht einen gewissen **Schweredruck** aus. Dieser nimmt mit jedem Meter Wassertiefe um 100 hPa = 100 Millibar zu. Stellen Sie eine Wertetabelle auf für den Schweredruck im Wasser für die folgenden Wassertiefen. Hinweis: 1 Millibar = 1 mbar = 1 Hektopascal = 1 hPa.

Tiefe x in m	0	1	2	3	4	5	10	20	30	100	200	1000
Schweredruck p in bar	0	0,1										

Zeichnen Sie ein Schaubild für die Funktion $x \to p$, die jeder Wassertiefe x den dort herrschenden Schweredruck zuordnet. Geben Sie eine Gleichung für diese Funktion an.

b) Weil Gase im Gegensatz zu Flüssigkeiten kompressibel sind, wird ihre Dichte mit zunehmendem Schweredruck größer bzw. mit abnehmendem Schweredruck kleiner. Daher ändert sich der **Luftdruck** mit zunehmender Meereshöhe nach folgender Gesetzmäßigkeit: Auf Meereshöhe beträgt der normale Luftdruck 1000 mbar bzw. 1000 hPa. Mit je 100 m Höhenzunahme nimmt der Luftdruck jeweils um 1,4 % seines augenblicklichen Wertes ab. Stellen Sie eine Tabelle auf für folgende Meereshöhen:

Höhe x in m	0	100	200	300	400	500	1000	2000	3000	4000	5000	10000
Luftdruck p in hPa	1000	986						754				

Zeichnen Sie ein Schaubild für die Funktion $x \to p$. Berechnen Sie die Funktionsgleichung für diese Funktion. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von a).

Aufgabe 3:

Ein Anfangskapital K wird jährlich mit 7% verzinst. Die Zinsen werden am Jahresende dem Kapital zugeschlagen und im nächsten Jahr ebenfalls mit verzinst (man spricht daher von „Zinseszinsen“). Wie verändert sich das Kapital K im Verlauf von 20 Jahren? Nach welcher Zeit hat es sich verdoppelt? Erstellen Sie eine Wertetabelle. Zeichnen Sie ein Schaubild. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Zuordnung „Anzahl der Jahre $\to$ Endkapital“. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ...?

In den Beispielen der Aufgabe 2 b) und Aufgabe 3 haben wir es mit einer besonderen Art des Wachstums bzw. der Abnahme zu tun, dem „prozentualen Wachstum“. ***Der Funktionswert ändert sich in jeweils gleichen Perioden (d. h. mit stets gleicher Zunahme des x-Wertes) jeweils mit demselben Faktor***. Dieser Faktor wird Änderungsfaktor genannt und man erhält daraus die Funktionsgleichung:

Ändert sich ein Anfangswert K_o schrittweise jeweils mit demselben Faktor q, dann erhält man den Wert nach x Änderungsschritten zu $K(x) = K_o * q^x$.

- Ist q > 1 so liegt prozentuales bzw. exponentielles Wachstum vor.
- Ist dagegen 0 < q < 1, so hat man prozentuale bzw. exponentielle Abnahme.

Aufgabe 4:

Ein Anfangswert a nimmt schrittweise um jeweils 5% ab (z. B. die Erdölvorräte der Erde). Nach wie vielen Jahren ist nur noch die Hälfte des Vorrats vorhanden? Stellen Sie eine Wertetafel auf. Ermitteln Sie die Gleichung und zeichnen Sie ein Schaubild.

Die Exponentialfunktion f mit der Gleichung $y = f(x) = a * q^x$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) $f(0) = a$ b) $f(x + 1) = q * f(x)$ c) $f(x + s) = q^s * f(x)$

Nimmt x um 1 zu, so ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor q.

Wir wollen die behaupteten Eigenschaften der Exponentialfunktion kurz beweisen:

a) Durch Einsetzen von 0 für x erhält man aus der Funktionsgleichung f(0) = a.

b) Wir setzen x + 1 ein und erhalten:

$f(x + 1) = a * q^{(x+1)} = a * q^x * q$

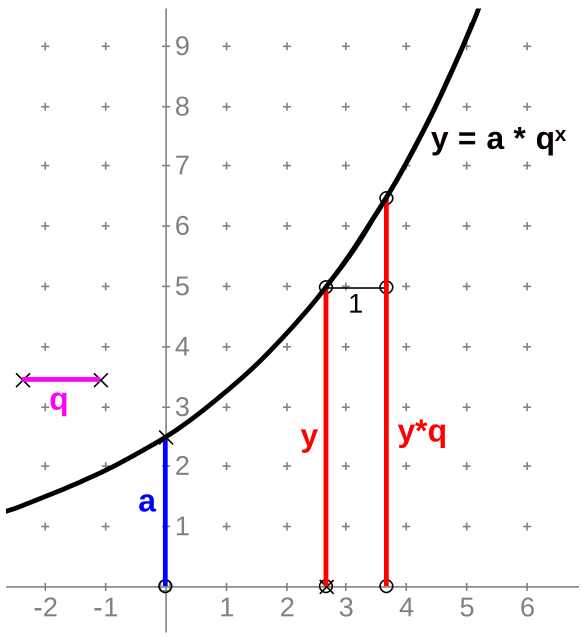
$= q * f(x)$

c) Wir setzen x + s ein und erhalten:

$f(x + s) = a * q^{(x+s)} = a * q^x * q^s$

$= q^s * a * q^x = q^s * f(x)$

Während die ***lineare*** Funktion bei gleichen Zunahmen des x-Wertes sich jeweils ***um denselben Betrag*** ändert (additiv), verändert sich die ***<u>Exponentialfunktion</u>*** bei gleichen Zunahmen des x-Wertes jeweils ***<u>um denselben Faktor</u>*** (multiplikativ).



Wie man leicht nachprüft, gilt für die einfache Exponentialfunktion $y = q^x$ mit dem Anfangswert f(0) = a = 1 folgende Funktionalgleichung**: $f(x + y) = f(x) * f(y)$**.
Überprüfen Sie, ob diese Gleichung auch für von 1 verschiedene Anfangswerte a = f(0) gilt.

Wir wollen noch eine für den Alltag wichtige und hilfreiche Beziehung für Funktionen mit exponentiellem bzw. prozentualem Wachstum bzw. Abnahme zeigen, die vielfach verwendbare „**p * d = 70 – Regel**“.

Aufgabe 5:

a) Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital bei einem jährlichen Zinssatz von p % durch Zinseszinsen verdoppelt? Ermitteln Sie diese Verdopplungszeit d für folgende Werte p und tragen Sie Ihre Ergebnisse in folgende Tabelle ein.
(Verwenden Sie einen Taschenrechner oder ein Tabellenkalkulationssystem.)

Zinssatz p in %	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Verdopplungszeit d in Jahren												
p * d												

b) Ein Vorrat a nimmt jährlich um p % ab. Nach wie vielen Jahren ist nur noch die Hälfte des anfänglichen Vorrats vorhanden? Ermitteln Sie diese Halbwertszeit h für folgende Werte von p und tragen Sie Ihre Ergebnisse in folgende Tabelle ein:

Prozentsatz p in %	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Halbwertszeit h in Jahren												
p * h												

Die $p * d \approx 70$ – Regel:

Nimmt ein Wert schrittweise jeweils um p % zu oder ab, so ist nach d Schritten der doppelte bzw. halbe Wert erreicht, wenn gilt:

$$p * d \approx 70.$$

Bevor wir die Regel beweisen, sei auf ihre Nützlichkeit für überschlägige einfache aber weitreichende Überlegungen in Anwendungen hingewiesen:

- Sparen wir jedes Jahr 5% unseres Energieverbrauchs ein, so haben wir unseren Energieverbrauch nach etwa 14 Jahren halbiert. Man glaubt es kaum!
- Ein Kapital, das mit 7 % jährlich verzinst wird, verdoppelt sich in 10 Jahren. Wird es dagegen nur mit 3,5 % verzinst, so dauert dies sogar 20 Jahre. Bei Verzinsung mit 7% hätte man in 20 Jahren das Kapital sogar vervierfacht!
- Eine jährliche Inflationsrate von 3 % reduziert den Wert eines Kapitals in rund 25 Jahren auf die Hälfte.
- Eine jährliche Bevölkerungszunahme in einem Land von nur 2% bedeutet in 35 Jahren eine Verdopplung der Bevölkerung.

- ….

Nun führen wir den Beweis für unsere Regel:

Es gilt $f(x) = a * q^x$, wobei der Änderungsfaktor q sich durch den Prozentsatz p % errechnet zu $q = 1 + p/100$ (bei Abnahmen $q = 1 – p/100$).

Wir suchen $x = d$ so, dass gilt $f(d) = 2 * a = a * q^d$.
Folglich muss gelten $2 = q^d$ unabhängig vom Anfangswert a.

Wir nehmen auf beiden Seiten der letztgenannten Gleichung den Logarithmus und erhalten $\ln(2) = d * \ln(q)$. Da für kleine Werte von x gilt: $\ln(1 + x) \approx x$ erhalten wir:

$\ln(2) \approx d * p/100$ und daraus $d * p \approx 100 * \ln(2) \approx 70$.

Für prozentuale Abnahmen erhält man die Rechnung ganz analog. Führen Sie dies selbständig durch.

Rückblickend wollen wir noch einmal den **Vergleich von linearem und exponentiellem Wachstum** betrachten:

- Die **reine Proportionalität** mit der Gleichung **y = a * x** ist gekennzeichnet durch die Funktionalgleichung **f(x + y) = f(x) + f(y)**, d. h. zur Summe der Argumentwerte gehört die *Summe* der Funktionswerte.
- Die **allgemeine lineare Funktion** mit der Gleichung **y = a * x + b** ist gekennzeichnet durch die Funktionalgleichung **f(x + 1) = f(x) + a**, d. h. gleichen Zunahmen des x-Wertes entsprechen gleiche *Zunahmen* des y-Wertes.

- Die **reine Exponentialfunktion** mit der Gleichung **y = f(x) = q^x** ist gekennzeichnet durch die Funktionalgleichung **f(x + y) = f(x) * f(y)**, d. h. zur Summe der Argumentwerte gehört das *Produkt* der Funktionswerte.
- Die **allgemeine Zuordnung mit exponentiellem Wachstum und Anfangswert a** mit der Gleichung **y = f(x) = a * q^x** ist gekennzeichnet durch die Funktionalgleichung **f(x + 1) = q * f(x)**, d.h. zu gleichen Zunahmen des x-Wertes gehören gleiche *Änderungsfaktoren* für den y- Wert.

3.6 Sonstige Zuordnungen

Neben den bisher angeführten Typen von Funktionen (Proportionalitäten, Antiproportionalitäten, lineare Funktionen, Exponentialfunktionen) treten bei alltäglichen Zuordnungen noch andere Typen auf, die wir nach „je mehr – desto mehr“ bzw. nach „je mehr – desto weniger“ grob in zwei Gruppen unterteilen können.

Zuordnungen vom Typ „je mehr – desto mehr“:

Aufgabe 6:

a) Zur Zeit (im Jahr 2005) verlangt die Deutsche Post Portogebühren für Briefe in Abhängigkeit vom Gewicht gemäß folgender Tabelle (wir lassen Formatfragen außer Acht):

Briefgewicht in g	bis 20	von 20 bis 50	von 50 bis 500	von 500 bis 1000
Briefporto in €	0,55	0,95	1,44	2,20

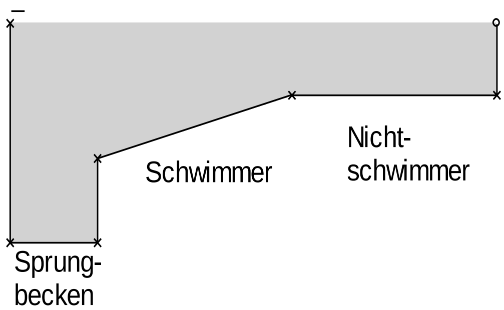
Zeichnen Sie ein Schaubild der Zuordnung Briefgewicht $\rightarrow$ Briefporto.

b) Geben Sie Beispiele an, bei denen als Zuordnungen ebenfalls „Treppenfunktionen“ der Art „je mehr – desto mehr“ auftreten.

c) Bei einem Würfel mit der Kantenlänge x nehmen sowohl die Oberfläche O als auch der Rauminhalt V zu, wenn die Kantenlänge x zunimmt. Beide Zuordnungen sind also vom Typ „je mehr – desto mehr“. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen sie die Schaubilder der Funktionen $x \rightarrow O$ bzw. $x \rightarrow V$. Handelt es sich um Proportionalitäten?

d) Klaus beginnt einen Sparvertrag. Er zahlt am Anfang jedes Jahres 1000 € ein und sein Kapital wird mit 7 % verzinst. Legen Sie eine Wertetabelle an. Zeichnen Sie ein Schaubild der Zuordnung Jahr $\rightarrow$ Kapital. Auf welchen Endbetrag ist der Sparvertrag nach Ablauf von 20 Jahren angewachsen? Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationssystem z. B. EXCEL.

e) Ein rechteckiges Schwimmbad hat den nebenstehenden Längsschnitt. Es wird gefüllt, indem ein gleichmäßiger Wasserzulauf geöffnet wird. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Wasserhöhe im Bad.



f) Eine Gruppe von drei Läufern läuft eine Runde in 20 Minuten. Wie lange benötigt dafür eine Gruppe von 4 Läufern?

Zuordnungen vom Typ „je mehr – desto weniger“:

Aufgabe 7:

a) Ein Bauherr tilgt sein Darlehen in Höhe von 100 000 €, das er mit 8% verzinsen muss, durch eine Zahlung von 10 000 € für Zins und Tilgung zum Ende jedes Jahres. Stellen Sie einen Tilgungsplan auf. Zeichnen Sie ein Schaubild für die Zuordnung Jahre → Schuldenstand. Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationssystem.

b) Eine Leiter der Länge 10 m steht auf waagrechtem Boden an einer senkrechten Wand. Je größer der Abstand x des Leiterfußes von der Wand ist, desto geringer ist die Höhe y bis zu der die Leiter reicht.
Zeichnen Sie ein Schaubild der Zuordnung $x \to y$. Geben Sie die Gleichung an.

c) Eine Großmutter vererbt ein Kapital von 20 000 € an ihre zwei Enkel Tim und Anne je nachdem, wie sich jeder von beiden um sie kümmert. Je mehr Tim erbt, desto weniger erhält Anne. Zeichnen Sie ein Schaubild. Geben Sie die Gleichung der Zuordnung „Erbe Tim → Erbe Anne“ an.

d) Eine Jugendgruppe mietet für eine Ausfahrt einen Bus. Dieser kostet 1 200 € für den Ausflugstag. Je mehr Teilnehmer mitgehen, desto weniger muss der Einzelne bezahlen. Stellen Sie eine Wertetabelle auf. Zeichnen Sie ein Schaubild. Geben Sie die Gleichung der Zuordnung Teilnehmeranzahl → Fahrpreis an.

e) Eine Henne brütet 15 Eier in 23 Tagen aus. Wie lange benötigt sie zum Ausbrüten von 12 Eiern?

f) Ein Händler für Heizöl gibt „Mengenrabatt“. Skizzieren Sie das Schaubild der Zuordnung „Bezugsmenge in Litern → Literpreis“. Von welchem Typ ist diese Zuordnung?

3.7 Lösungsformen für Zuordnungen in der Schule

1. Proportionalitäten

Wir stellen am Beispiel einer einfachen Aufgabe Lösungsformen für die Schule vor, die sich an den einzelnen Eigenschaften der Proportionalität orientieren.

Aufgabe 8:

Der Preis für 7 Zitronen beträgt 4,20 €. Wie viel kosten 8 Zitronen?

Lösung 1: Dreisatz mit Operatoren

Vorüberlegung: „Wenn man doppelt so viel kauft, muss man auch doppelt so viel bezahlen“. „Zur doppelten, dreifachen, … Menge gehört der doppelte, dreifache, … Preis.“ Die Zuordnung Zitronenanzahl → Preis ist also eine Proportionalität.

	7 Zitronen kosten	4,20 €	
: 7			: 7
	1 Zitrone kostet	(4,20:7) €	
* 8			* 8
	8 Zitronen kosten	(4,20:7)*8 €	

Zitronen	Euro
7	4,20
1	0,60
8	4,80

Diese Lösungsform mit dem klassischen „Dreisatz mit direktem Verhältnis“ – unterstützt durch die den Gedankengang demonstrierenden Operatoren – benutzt die charakteristische Vervielfachungseigenschaft der Proportionalität zur Lösung. Eine Variante dieser Lösung ist die Tabellendarstellung, bei der an Stelle der Sätze nur eine tabellarische Zuordnung benutzt wird (rechte Spalte). Auch bei dieser (hier vereinfacht dargestellten) Lösungsform sollte auf die den Gedankengang klärenden Operatoren nicht verzichtet werden.

Lösung 2: Additionsschema

Vorüberlegung: „Wenn man zuerst 7 und dann noch eine Zitrone kauft, muss man soviel bezahlen, wie wenn man gleich 8 Zitronen kauft“.

7 Zitronen kosten 4,20 €

: 7 : 7

1 Zitrone kostet 0,60 €

---

8 Zitronen kosten 4, 80 €

Wir addieren auf der einen Seite die Mengen und auf der anderen Seite die Preise. Dabei wird offensichtlich die Additionseigenschaft verwendet. Diese Lösungsform ist nur in seltenen Fällen vorteilhaft anzuwenden und deshalb weniger empfehlenswert als die erste.

Lösung 3: Verhältnisgleichung

Vorüberlegung: „Der Preis für eine Zitrone ist stets der gleiche, egal wie viele man kauft“.

Einzelpreis = x : 8 = 4,20 : 7 bzw. $\frac{x}{8} = \frac{4{,}20}{7}$.

Daraus berechnet man durch algebraische Umformung (!) x = 0,60 * 8 = 4,80.

Diese Lösungsform benutzt die Quotientengleichheit entsprechender Größenpaare. Sie erfordert schon einfachste algebraische Umformungstechniken. Eine außerordentlich einfache und angemessene Lösungsform, wenn man die Umformung beherrscht.

Lösung 4: Lösung mit Funktionsgleichung

Vorüberlegung: „Die Zuordnung Zitronenzahl → Kaufpreis ist eine Proportionalität mit der Gleichung y = f(x) = a * x.“ Wir ermitteln die Proportionalitätskonstante a aus dem gegebenen Wertepaar (7; 4,20). Durch anschließendes Einsetzen von x = 8 erhalten wir den Preis f(8) für 8 Zitronen.

y = f(x) = a * x.
Mit x = 7 und y = 4,20 erhält man a = 0,60.
Damit ergibt sich f(8) = 0,60 * 8 = 4,80.

Diese Lösung bewegt sich auf hohem Niveau in Bezug auf algebraische Kenntnisse und Kenntnisse über Funktionen und ist deshalb nur für Schüler mit entsprechenden Vorkenntnissen leistbar. Sie ist jedoch dem Sachverhalt „Zuordnungen“ am nächsten und daher als Endziel anzustreben. Natürlich wird auch bei ihr die Quotientengleichheit ausgenutzt. Daher kann von Lösung 3 aus leicht auf Lösung 4 hingearbeitet werden.

2. Antiproportionalitäten

Auch die zu diesem Zuordnungstyp passenden Lösungen stellen wir beispielhaft an Hand einer einfachen Aufgabe vor:

Aufgabe 9:

Eine Jugendgruppe organisiert einen Ausflug.
Wenn alle 36 Mitglieder mitfahren, kostet der Bus 20 € für jeden.
Wie teuer ist die Busfahrt für jeden Teilnehmer, wenn nur 30 Mitglieder mitfahren?

Lösung 1: Dreisatz mit Operatoren

Vorüberlegung: „Wenn doppelt so viele mitfahren, kostet es für jeden nur halb so viel.“
„Zur doppelten, dreifachen, … Teilnehmerzahl, gehört der halbe, drittel, … Fahrpreis“.

Bei 36 Teilnehmern kostet es 20 €

: 36   * 36

Bei 1 Teilnehmer kostet es 20 * 36 €

* 30   : 30

Bei 30 Teilnehmern kostet es (20*36): 30 €

Wie im Falle der Proportionalität kann diese „Dreisatzdarstellung mit indirektem (umgekehrtem) Verhältnis“ auch kürzer in Tabellenform mit Operatoren ersetzt werden.

Die Lösung benutzt die „inverse Vervielfachungseigenschaft“ der Antiproportionalität.

Lösung 2: Produktgleichheit.

Vorüberlegung: „Der Gesamtpreis für das Busunternehmen ist jeweils der gleiche, ob nun viele oder wenige Teilnehmer mitfahren.“

Gesamtkosten = x * 30 = 20 * 36.

Daraus erhält man durch algebraische Umformung (!) $x = \frac{20 \cdot 36}{30} = 24.$

Diese Lösungsform benutzt die Produktgleichheit entsprechender Größenpaare. Sie erfordert schon einfachste algebraische Umformungstechniken. Eine außerordentlich einfache und angemessene Lösungsform, falls man die Umformungen beherrscht.

Lösung 3: Lösung mit Funktionsgleichung

Vorüberlegung: „Die Zuordnung Teilnehmerzahl $\rightarrow$ Fahrpreis ist eine Antiproportionalität mit der Gleichung y = f(x) = $\frac{a}{x}$.“ Wir ermitteln die Konstante a (Gesamtpreis für den Bus) aus dem gegebenen Wertepaar (36; 20). Durch Einsetzen von x = 30 erhalten wir f(30).

y = f(x) = $\frac{a}{x}$ bzw. y * x = a.
Mit x = 36 und y = 20 erhält man a = 720.
Damit ergibt sich f(30) = 720 : 30 = 24.

Diese Lösung bewegt sich auf hohem Niveau in Bezug auf algebraische Kenntnisse und Kenntnisse über Funktionen und ist deshalb nur für Schüler mit entsprechenden Vorkenntnissen leistbar. Sie ist jedoch dem Sachverhalt „Zuordnungen“ am nächsten und daher als Endziel anzustreben. Natürlich wird auch bei ihr die Produktgleichheit zugeordneter Größenpaare ausgenutzt. Daher kann von Lösung 2 aus leicht auf Lösung 3 hingearbeitet und umgelenkt werden.

3. Lineare Funktionen

Bei linearen Funktionen bietet sich eine Lösung an, die die konstante Zunahme der y-Werte bei konstanter Zunahme der x-Werte benutzt.

Aufgabe 10:

Herr Müller und Herr Maier haben denselben „Stromtarif“. Sie bezahlen eine feste Grundgebühr und für jede verbrauchte kWh einen festen Arbeitspreis.
Herr Müller hat 3234 kWh im Jahr verbraucht und muss 868,50 € für das Jahr bezahlen.
Herr Maier hat 2678 kWh verbraucht und muss 729,50 € bezahlen.
Wie hoch ist die Grundgebühr und wie hoch der Arbeitspreis?

Lösung: Lösung durch Verwendung der konstanten Zunahme.

Für den Mehrverbrauch von (3234 – 2678) kWh = 556 kWh muss Herr Müller (868,50 – 729,50) € = 139 € mehr bezahlen.

Daher kostet eine kWh (139 : 556) € = 0,25 €.

Mit diesem Wert kann man den Grundbetrag ermitteln zu
(868,50 – 0,25 * 3234) € = 60 €.

Die Zuordnung „Verbrauch x in kWh $\rightarrow$ Strompreis y in €“ hat daher die Gleichung

y = 60 + x * 0,25.

Selbstverständlich kann man auch eine ***Lösung mit Hilfe der Funktionsgleichung*** y = b + a * x ansetzen und die Koeffizienten a und b bestimmen aus einem linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen, indem man die beiden bekannten Wertepaare einsetzt, aber dazu muss man den zugehörigen algebraischen Formalismus beherrschen. Mit der oben benutzten inhaltlichen Überlegung kann man das umgehen.

Die Lösungen derartiger Gleichungen hängen sehr eng mit der Behandlung der entsprechenden Funktionentypen zusammen. Deshalb empfiehlt sich bei der Behandlung in der Schule immer die gekoppelte Behandlung von bestimmten Typen von Gleichungen (linearen, quadratischen, …) mit dem dazugehörigen Typ von Funktionen.

4. Prozentuales Wachstum. Exponentialfunktionen

Wie bereits bemerkt, wird man nach Möglichkeit Gleichungen eines bestimmten Typs immer zusammen mit dem entsprechenden Typ von Funktionen behandeln. Nun sind die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung, die Logarithmusfunktion, bereits sehr anspruchsvoll und werden nicht immer gründlich in Funktionsform behandelt. Wir wollen daher versuchen, Lösungsformen für diese Art von Gleichungen zu finden, die auch ohne vertiefte Kenntnis der Funktionen dieses Typs möglich sind.

Wir gehen aus von einem Anfangswert a, der sich in Schritten stets mit demselben Änderungsfaktor q verändert. Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = a * q^x$.

Je nachdem, welcher der vier Werte x, f(x) = W, a bzw. q in der Funktionsgleichung gefragt ist, können folgende Grundaufgaben auftreten:

G1: Gesucht ist der Endwert W = f(x), die drei anderen Werte sind gegeben.

Man erhält den Wert W = f(x) durch fortgesetztes Multiplizieren von a mit q bzw. durch Potenzieren von q mit x und Multiplikation mit a.

G2: Gesucht ist der Anfangswert a, die drei anderen Werte sind gegeben.

Man ermittelt $a = f(x) : q^x$.

Diese beiden Grundaufgaben sind einfach und mit den Grundrechenarten zugänglich. Nur die beiden folgenden erfordern zur exakten Lösung die Kenntnis des Logarithmus. Wir geben dafür Ersatzstrategien an.

G3: Gesucht ist die Schrittzahl x. Gegeben f(x), a und q.

Mit Hilfe eines Taschenrechners lässt sich diese Aufgabe leicht lösen. Man nimmt q in den Speicher und benützt diese Zahl als multiplikative Konstante. Nun wird a so oft mit q multipliziert (mitzählen), bis der gesuchte Wert f(x) erreicht bzw. überschritten ist.

G4: Gesucht ist der Änderungsfaktor q, die anderen drei Werte sind gegeben.

In diesem Fall bleibt nichts anderes übrig als durch systematisches Probieren mit verschiedenen Werten („Versuch und Irrtum“) den Wert q allmählich einzuschachteln.

Aufgabe 11:

Formulieren Sie zu jeder der vier Grundaufgaben ein Zahlenbeispiel etwa an Hand einer Zinseszinsaufgabe. Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe der angegebenen Methoden. Lösen Sie zur Kontrolle auch jede Aufgabe genau.

Wir wollen zum Schluss noch die exakten Lösungen für die beiden letzten Grundaufgaben G3 und G4 angeben:

Dazu gehen wir aus von der Gleichung $W = a * q^x$.
Wir nehmen auf beiden Seiten den Logarithmus (es ist gleichgültig zu welcher Basis, z. B. den Zehnerlogarithmus lg oder den natürlichen Logarithmus ln oder einen beliebigen) und erhalten:

$\ln(W) = \ln(a) + x * \ln(q)$. Je nachdem ob x oder q gefragt ist löst man weiter auf:

$x = \dfrac{\ln(W) - \ln(a)}{\ln(q)}$ bzw. $\ln(q) = \dfrac{\ln(W) - \ln(a)}{x}$ und daraus q.

Ein kleiner Nachtrag soll ein wohlbekanntes Problem behandeln, das in diesen Kontext passt. Radioaktive Substanzen haben die Eigenschaft, dass sie gemäß einem exponentiellen Gesetz zerfallen. Die nach t Jahren noch vorhandene (also noch nicht zerfallene und daher noch aktive) Substanz ändert sich nach folgendem Gesetz:

$S(t) = S_o * \exp(-\lambda * t) = S_o * e^{(-\lambda t)}$

Die Größe λ in der Einheit $\dfrac{1}{\text{Jahre}}$ nennt man „Zerfallskonstante". Sie ist eine charakteristische Größe für jede spezielle radioaktive Substanz. Wir wollen klären, wie diese Zerfallskonstante λ mit der sogenannten Halbwertszeit T zusammenhängt, also der Anzahl von Jahren, nach der sich die Substanzmenge halbiert hat:

$S(T) = S_o/2 = S_o * \exp(-\lambda * T)$. Daraus folgt: $½ = \exp(-\lambda*T)$ unabhängig von S_o.

Durch Logarithmieren folgt: $\ln(2) = \lambda * T = 0{,}6931\ldots \approx 0{,}7$.

Zerfallskonstante λ und Halbwertszeit T genügen der Gleichung $\lambda * T \approx 0{,}7$.

Man erinnert sich der $p * d \approx 70$ – Regel.

3.8 Sonstige Zuordnungen. Aufgabenbeispiele

Bei den sonstigen Zuordnungen, die nicht einem bestimmten Schema oder Typ zugeordnet werden können – und es gibt viele davon – muss man von Fall zu Fall überlegen, welche Verhältnisse vorliegen und welche Lösungsmethoden angemessen sind. Man kann hier keine allgemeinen Lösungsschemata angeben. Dennoch sind viele davon auch einer mathematischen Beschreibung oder zumindest einer Annäherung durch Modellbildung zugänglich.

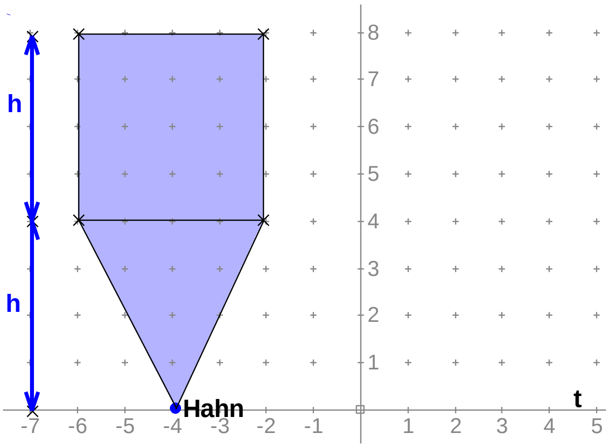
Aufgabe 12:

Eine Strecke der Länge s = 60 km wird von einem Fahrzeug, das mit der konstanten Geschwindigkeit v = 40 km/h fährt, in der Zeit t = 1,5 h Stunden zurückgelegt.

a) Geben Sie für dieses Fahrzeug die Zuordnung $t \to s$ in Form einer Wertetabelle, einer Gleichung und eines Schaubildes an. Welche Eigenschaften hat diese Zuordnung? Beschreiben Sie diese in Worten und formal.

b) Mit welchen konstanten Geschwindigkeiten v müssen Fahrzeuge fahren, damit sie die Strecke s = 60 km in 1, 2, 3, 4, …, 12 Stunden zurücklegen? Stellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion $t \to v$ auf. Geben Sie eine Gleichung an und zeichnen Sie ein Schaubild. Beschreiben Sie die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktion in Worten und formal.

Aufgabe 13:



Ein Behälter (z. B. ein Zementsilo) besteht aus einem Zylinder und einem darunter angesetzten Kegel mit derselben Höhe wie der Zylinder. Der Behälter ist mit Wasser voll gefüllt. Nun wird (zum Zeitpunkt t = 0) ein unten an der Kegelspitze angebrachter Hahn aufgedreht, so dass das Wasser in gleichmäßigem und gleich bleibendem Strahl auslaufen kann.

a) Wie verändert sich die Wasserhöhe y im Behälter im Verlauf der Zeit? Skizzieren Sie ein Schaubild.

b) Geben Sie die Gleichung der Zuordnung $k: t \to y$ an. Zeichnen Sie das Schaubild genau. Wählen Sie selbst sinnvolle Werte, die Sie zusätzlich benötigen.
(Lösung siehe Seite 64)

Aufgabe 14:

a) Stellen Sie mit einem Tabellenkalkulationssystem einen Tilgungsplan für ein Annuitätendarlehen auf. Dabei soll jährlich am Ende eine feste Rate („Annuität“) für Zins und Tilgung gezahlt werden. Wählen Sie selbst geeignete Werte.

b) Richten Sie Ihr System so ein, dass die Darlehenshöhe, der Zinssatz und die Annuität (meist angegeben in Form eines anfänglichen Tilgungssatzes in Prozent) frei gewählt werden können.

Aufgabe 15:

a) Stellen Sie mit einem Tabellenkalkulationssystem einen Sparplan für einen Ratensparvertrag auf, bei dem zu Anfang jeden Jahres ein bestimmter Betrag („Sparrate“) eingezahlt wird. Wählen Sie selbst geeignete Werte.

b) Richten Sie nun Ihr System so ein, dass die Sparrate und der Zinssatz frei gewählt werden können.

Lösung zu Aufgabe 13:

a) Die Aufgabe scheint mir sehr gut geeignet, um funktionales Verständnis und geometrische Zusammenhänge testen zu können – und zwar ganz ohne mathematischen Kalkülaufwand („Mathematik ist die Kunst, Rechnungen zu umgehen.“). Ohne Rechnung sollten mit Begründung folgende drei Merkmale zum Erstellen einer qualitativen Kurvenskizze erkannt werden:

- Geradliniger Verlauf des Schaubilds im Bereich 2h $\geq y \geq$ h.
- Steiler werdende abfallende Kurve im Bereich h $\geq y \geq$ 0 mit glattem Übergang ohne Knick.
- Zeitintervall für den ersten Teil (Zylinderleerung) dreimal so lang wie für den zweiten Teil (Kegelleerung).

b) Für eine einigermaßen realistische Ausgestaltung sollten die Einheiten physikalisch konsistent und vernünftig gewählt werden, z. B.
Längen z. B. in Dezimetern (obwohl alltäglich kaum in Gebrauch)
Volumina in Litern (dm^3) *Zeiten* in Minuten (oder Sekunden)

Wir lösen die Aufgabe zunächst durch **Füllen** und werden die **Leerung** nachher anpassen:

1. Füllung des Kegels:

Durch konstanten Zulauf der Größe a (z. B. Liter pro Minute) wird in der Zeit t das Volumen V = a * t eingefüllt und der entstehende Wasserkegel hat das Volumen $V = \frac{1}{3} * \pi * \rho^2 * y$ wobei y die augenblickliche Füllhöhe und ρ der Radius des augenblicklichen Füllstandes ist. Dabei gilt **ρ : y = r : h.**

Mit dieser Beziehung erhält man die Füllhöhe y in Abhängigkeit von der Zeit t zu

$$y = \sqrt[3]{\frac{3*h^2*a}{\pi*r^2} * t} = k * \sqrt[3]{t} \qquad \text{mit } k = \sqrt[3]{\frac{3*h^2*a}{\pi*r^2}}.$$

Die Zeit für die Füllung des gesamten Kegels (y = h) beträgt $t_1 = \frac{h*\pi*r^2}{3*a}$.

Wir berechnen noch die Steigung der Füllkurve für den Endzeitpunkt t_1: $y'(t_1) = \frac{a}{\pi*r^2}$.
Diese muss übereinstimmen mit der Steigung des geraden Kurventeils (warum?).

2. Füllung des Zylinders:

Analog zu den Überlegungen beim Kegel erhalten wir für die Füllhöhe y (Grundkreis des Zylinders sei dabei in der Höhe y = 0) in Abhängigkeit von der Zeit t die Beziehung $y = \frac{a}{\pi*r^2} * t$ mit der Gesamtfüllzeit (y = h) zu $t_2 = \frac{h*\pi*r^2}{a} = 3 * t_1$.

Die Steigung dieser Geraden beträgt $\frac{a}{\pi * r^2}$ und stimmt mit der oben berechneten Kurvensteigung im Endzeitpunkt t_1 überein.

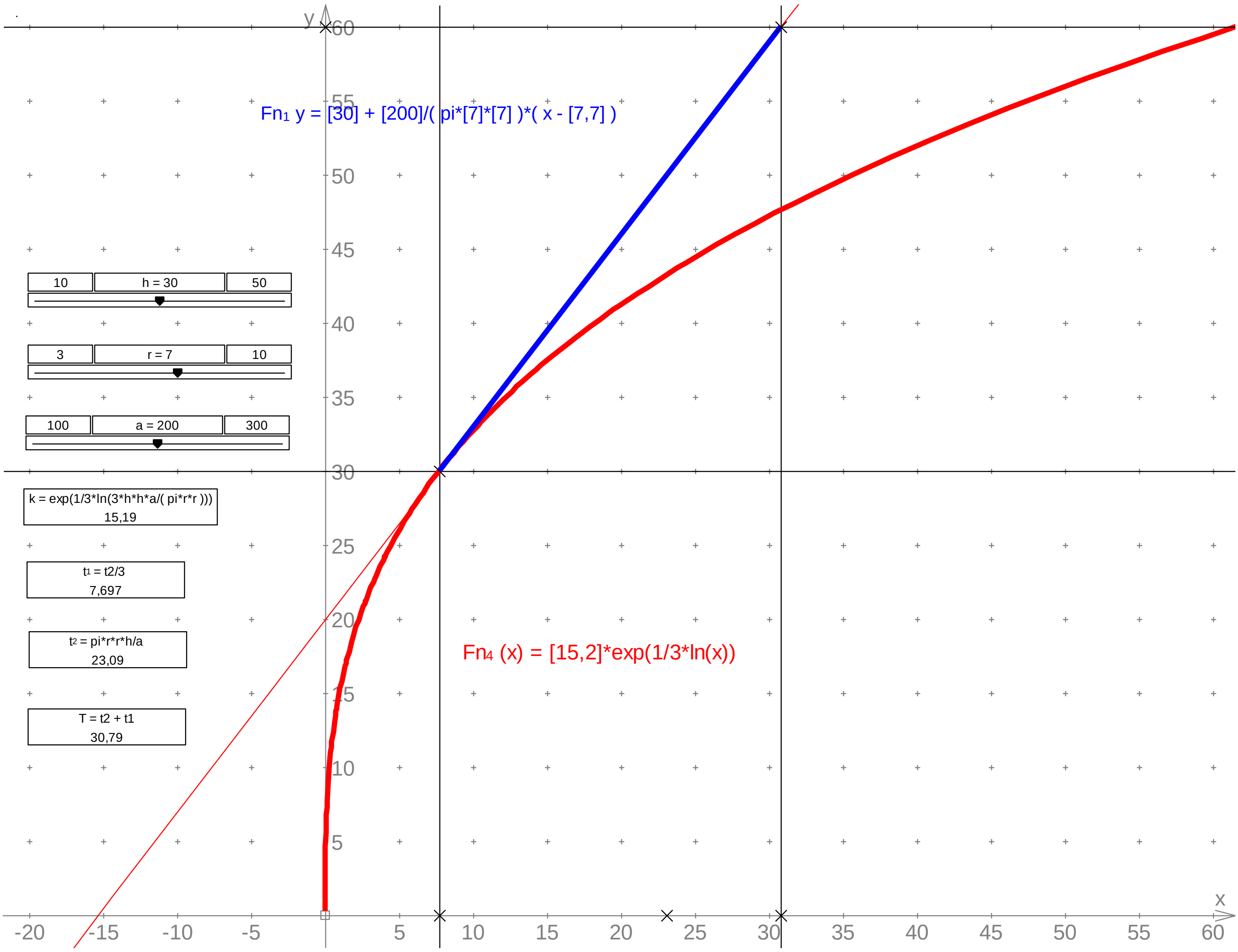
Nun können wir die Gleichungen für die Füllkurve für beide Teile angeben:

$y = \sqrt[3]{\frac{3*h^2*a}{\pi*r^2} * t} = k * \sqrt[3]{t}$ im Bereich $0 \le t \le t_1$ und

$y = h + \frac{a}{\pi*r^2} * (t - t_1)$ im Bereich $t_1 \le t \le T$

Gesamtfüllzeit $T = t_1 + t_2$.

Einfüllvorgang grafisch:



Wir benutzen die Ergebnisse der Füllvorgänge durch Umkehr für den Auslaufvorgang:
Die Gleichungen für den Auslaufvorgang lauten wie folgt:

$y = 2 * h - \frac{a}{\pi * r^2} * t$ im Bereich $0 \leq t \leq t_2$ und

$y = \sqrt[3]{\frac{3 * h^2 * a}{\pi * r^2} * (T - t)} = k * \sqrt[3]{T - t}$ im Bereich $t_2 \leq t \leq T = t_1 + t_2$

Auslaufvorgang grafisch: