Übungsaufgaben

Vektorgeometrie
und
Lineare Algebra

Sammlung von Übungsaufgaben und Klausuren aus Semesterveranstaltungen 1990 bis 1993

Prof. Siegfried Krauter
PH Ludwigsburg
Januar 2007

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei Vektoren **a** und **b**.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren **a** + **b**, **b** + **a**, **a** - **b**, **b** - **a**.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren 2**a** + 3**b**, 2**a** - 3**b**, 3**b** + 2**a**, 3**b** - 2**a**.

c) Bestimmen Sie die Vektoren aus a) und b) in Koordinaten, wenn **a**=(a_1, a_2) und **b**=(b_1, b_2) gegeben sind.

Aufgabe 2

Beweisen Sie vektoriell den Satz von der Mittelparallelen im Dreieck: Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Aufgabe 3

Ein Parallelogramm OACB wird durch die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ = **a** und $\overrightarrow{OB}$ = **b** aufgespannt.
M_1 bis M_4 sind die Mitten der Seiten OA, AC, CB, BO. M ist Schnittpunkt der Diagonalen.
a) Drücken Sie die Vektoren AB, OC und OM_i durch **a** und **b** aus.
b) Beweisen Sie, dass M beide Diagonalen halbiert.
c) Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte von OM_2 und OM_3 mit der Diagonale AB diese in drei gleiche Teile teilen.

Aufgabe 4

Beweisen Sie vektoriell den Satz von den Seitenhalbierenden im Dreieck:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

Aufgabe 5

Eine Strecke AB ist durch die Ortsvektoren **a** und **b** ihrer Endpunkte A und B gegeben.
T ist ein Punkt der Strecke AB und teilt diese im Verhältnis x : y.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** = $\overrightarrow{OT}$ durch **a** und **b** aus.

b) Ersetzen Sie x : y durch k.

c) Zeichnen Sie für k = 1/2, 3/4, 1, 2, 4, -4, -2, -3/2, -5/4, -1/4, -1/2, -3/4.

d) Rechnen Sie in Koordinaten mit A(0; 0) und B(6; 0).

e) Wie ändert sich k, wenn sich T von rechts bzw. von links an A bzw. an B annähert?

f) Zeigen Sie: Erhält man mit k den Teilpunkt T, so erhält man mit -k den vierten harmonischen Punkt S zu A, B und T.

g) Zeigen Sie: Teilen S und T die Punkte A, B harmonisch, so teilen auch A und B die Punkte S und T harmonisch.

Aufgabe 6

Zeigen Sie vektoriell: Die Seitenmitten jedes beliebigen (auch nicht ebenen!) Vierecks bilden ein Parallelogramm. Der Mittelpunkt des Mittenparallelogramms ist gleichzeitig Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten.

Aufgabe 7

Zeigen Sie für ein Tetraeder:

a) Die "Schwerlinien" (das sind die Verbindungen von einer Ecke zum Schwerpunkt der gegenüber liegenden Seitenfläche) schneiden sich in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien im Verhältnis 3:1.

b) Die drei "Mittellinien" (das sind die Verbindungslinien von Gegenkantenmitten) halbieren sich gegenseitig.

Aufgabe 8

Für drei kollineare Punkte A, T, B ist das Teilverhältnis k = TV(ATB) definiert durch die Beziehung
AT = k * **TB**.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** mit Hilfe der Ortsvektoren **a** und **b** aus.

b) Zeigen Sie: Je nachdem, ob T innerhalb oder außerhalb der Strecke AB liegt, ist k > 0 oder k < 0. Für T = A ist k = 0 und für T ---> B geht k ---> ∞.

c) Sind A(0; 0), T(t; 0) und B(1; 0) gegeben, so gilt k = t/(1 – t). Zeigen Sie dies. Zeichnen Sie ein Schaubild der Funktion t ---> k im Bereich -3 < t < +5 mit LE = 2cm.

d) Vertauscht man A mit B, so geht das Teilverhältnis über in den Kehrwert.
Es gilt also: TV(ATB) * TV(BTA)=1. Zeigen Sie dies.

e) Zeigen Sie, dass bei zyklischer Vertauschung der drei Punkte das Teilverhältnis übergeht in den Wert –1/(1+k), also TV(TBA) = – 1/(1+k).

f) Berechnen Sie aus TV(ATB) = k nach d) und e) die Teilverhältnisse für sämtliche 6 Permutationen von A, B und T.

g) Nun sei **AT** = x * **AB**. (x ist also der *Anteil* von AT an AB). Drücken Sie k durch x und umgekehrt x durch k aus. Ergebnis: k = x/(1-x) und x = k/(1+k)

Aufgabe 9

Gegeben sind die Funktionen g: x ---> 1/x sowie f: x---> -1/(1+x).

a) Berechnen Sie sämtliche Verkettungen f, f^2, f^3, ...und g, g^2, g^3,...(Hinweis: f^4=f, also f^3=Id und g^2=Id).

b) Zeigen Sie, dass die sämtlichen Produkte der Form $f^n g^k$ eine Gruppe bilden. Stellen Sie die Gruppentafel auf.

c) Um welche bekannte Gruppe handelt es sich? (D_3 bzw. S_3).

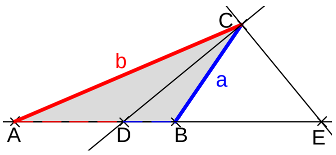
d) Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Aufgabe 8 d), e), f).

Hinweis: Teilverhältnisse sind vielfach anders als hier angegeben definiert. Bitte achten Sie auf Unterschiede in verschiedenen Literaturquellen! Gebräuchlich ist die Definition:
TV(A, B; T) = k durch $\overrightarrow{AT} = k * \overrightarrow{BT}$. Das ändert gegenüber unserer Konvention das Vorzeichen, der Mittelpunkt hat dann das Teilverhältnis k= – 1.

Aufgabe 10

a) Ist a die Länge des Vektors **a**, so hat $\mathbf{a}^0$ = **a**/a die Länge 1 (normiert). Zeigen Sie:
Die Vektoren $\mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0$ und $\mathbf{a}^0 - \mathbf{b}^0$ halbieren die Winkel zwischen den Vektoren **a** und **b**.
Zeichnen Sie eine Figur. Hinweis: Symmetrie einer Raute.

b) Beweisen Sie den Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:
Die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite des Dreiecks im Verhältnis der anliegenden Seiten. Es gilt also AD : DB = AE : EB = a : b.



Aufgabe 11* (Zusatz; schwierig)

Ein vollständiges Vierseit besteht aus 4 Geraden einer Ebene, die sich in 6 Punkten schneiden. Verbindet man je zwei dieser Punkte, so erhält man 3 neue Geraden, die "Diagonalen" des vollständigen Vierseits.

Beweisen Sie, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auf einer geraden Linie liegen.

Aufgabe 12

a) Gegeben sind A(-3; 5) und B(3: -4). Bestimmen Sie die Teilpunkte für die Teilverhältnisse TV(ATB) = 0,5 bzw. TV(ASB) = - 0,75. Kontrollergebnisse: T(-1; 2), S(-21; 32).

b) Gegeben sind die kollinearen Punkte A(3; -5), B(-1; 0) und C(0,6; -2). Bestimmen Sie den vierten harmonischen Punkt D, so dass AB und CD harmonisch liegen, also TV(ACB) = – TV(ADB) gilt.
Zeigen Sie, dass dann auch gilt: TV(CAD) = – TV(CBD). Kontrollergebnis: D(-9; 10).

c) Gegeben A(1; 1,6) und T(5; 4). Gesucht B, so dass TV(ATB)=0,4.
Kontrollergebnis: B(15; 10).

d) Man teile die Strecke AB mit A(-9; 15; -2) und B(-12; -6; 4) in drei gleiche Teile.
Kontrollergebnis: P(-11; 1; 2), Q(-10; 8; 0).

Aufgabe 13

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(0; 0), B(7; 0) und C(4,5; 6) in einem kartesischen Koordinatensystem. Kontrollzeichnung führen!
Kontrollergebnisse: T(15/4; 0), R(168/29; 84/29), S(7/3; 28/9), J(4; 2).

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Teilpunkt T auf AB für das TV(ATB) = k = 15/13.

c) Zeigen Sie: T liegt auf der Winkelhalbierenden von c.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt R der Winkelhalbierenden von a mit BC.
In welchem Verhältnis v teilt R die Strecke BC?

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt J von AR mit CT.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von AC mit BJ. In welchem Verhältnis m = TV(CSA) teilt S die Strecke CA?

g) Zeigen Sie, dass BS Winkelhalbierende von b ist.

h) Bestätigen Sie am vorliegenden Beispiel folgende Sätze:

Satz von Ceva: Drei Ecktransversalen AR, BS und CT eines Dreiecks ABC sind genau dann kopunktal, wenn gilt: TV(ATB) * TV(BRC) * TV(CSA) = 1.

Satz von der Winkelhalbierenden: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Satz von der Inkreismitte: Die Winkelhalbierenden im Dreieck sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt ist die Inkreismitte.

i) In welchem Verhältnis teilt J die Strecken AR, BS und CT?

Aufgabe 14

Beweisen Sie folgende Sätze über **Lineare Abhängigkeit** von Vektoren:

a) Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, so ist sie sicher linear abhängig.

b) Ist eine Menge von mindestens zwei Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen Vektor in der Menge, der sich aus den übrigen linear kombinieren lässt.

c) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge von Vektoren ist linear abhängig.

d) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ist linear unabhängig.

e) Ist $\mathbf{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig.

f) Ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig, so lässt sich $\mathbf{b}$ linear aus den $\mathbf{a}_i$ kombinieren.

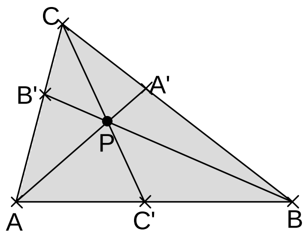
g) Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ ebenfalls linear unabhängig.

Lineare Algebra und Analytische Geometrie SS90 Blatt 4

Aufgabe 15

Beweisen Sie den Satz von Ceva:
Sind AA', BB' und CC' kopunktale (!) Ecktransversalen im Dreieck ABC so gilt: TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = 1.

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

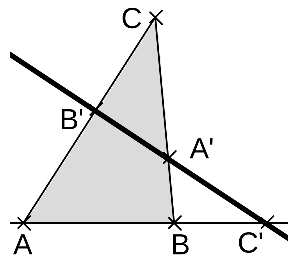


Aufgabe 16

Beweisen Sie den Satz von Menelaos:

Sind A', B' und C' drei kollineare (!) Punkte auf den drei Seitengeraden des Dreiecks ABC so gilt: TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = – 1.

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

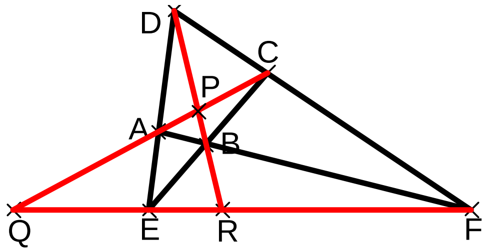


Aufgabe 17

Beweisen Sie den Satz vom vollständigen Vierseit:

Auf jeder Diagonalen werden die Ecken des Vierseits durch die beiden Diagonalpunkte harmonisch getrennt.
Also z. B. TV(ERF) = – TV(EQF) usf.

Hinweis: Benutzen Sie Ceva mit Punkt B und Menelaos mit Gerade CAQ für Dreieck DEF.



Aufgabe 18

Das Fünfeck ABCDE mit A(7; 4; 0), B(3; 4; 0), C(3; 4; 2), D(5; 4; 4,5) und E(7; 4; 2) ist Grundfläche eines Prismas, dessen Kanten parallel zur y-Achse verlaufen. Die Ebene (E) enthält die Punkte A, B und G(5; 1; 4,5).

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Prismenkanten mit der Ebene (E). Zeichnen Sie ein Schrägbild (a = 45°; k = 0,5). Deuten Sie die Figur als Bild einer Dachgaube.

Aufgabe 19

Die Gerade g enthält die Punkte A(2; 1; 3) und B(2; 0; 4), die Gerade h die Punkte C(2; 1; 7) und D(4; 0; 7). Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.
Welche Ebene (E) enthält die Gerade g und den Punkt P(8; 8; 5)?
Welche Gerade t durch P trifft sowohl die Gerade g als auch die Gerade h?
Ermitteln Sie die zugehörigen Schnittpunkte G und H.

Aufgabe 20

Die Ebene (E) geht durch die Punkte A(-5; 1; -2), B(-4; 3; -2) und C(-5; 3; -1).
Die Gerade g enthält die Punkte D(1; -3; 1) und E(3; -4; 4), h die Punkte F(2; -5; 3) und G(4; 3; 5) und k die Punkte H(-6; -3; -3) und K(-1; 3; -5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene (E) mit den Geraden g, h und k.

Aufgabe 21

Die Gerade g geht durch A(5; -10; 6) und B(5; -5; 4). Für a e R ist D_a(a+3; 10; 2) gegeben.
Die Gerade h_a geht durch C(3; 0; -2) und D_a. Für welche a schneiden sich g und h_a, für welche a sind g und h_a parallel?
Zeigen Sie: Alle D_a liegen auf einer Gerade und alle Geraden h_a liegen in einer Ebene.

Aufgabe 22

Zeigen Sie für beliebige Vektorräume:

a) k * **a** = **0** gilt genau dann, wenn k = 0 oder **a** = **0**.

b) Beweisen Sie das Untervektorraumkriterium.

c) Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist ein Vektorraum.

d) In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jedes linear unabhängige System von n Vektoren eine Basis.

e) Sind U_1 und U_2 zwei Teilräume so ist die Vereinigung von U_1 und U_2 genau dann wieder ein Teilraum, wenn U_1 Teilmenge von U_2 oder U_2 Teilmenge von U_1 ist.

Aufgabe 23

Sind folgende Mengen lineare Teilräume des R^3?

a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$ b) $B = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \}$

Aufgabe 24

a) Kombinieren Sie **b** = (0; 4; -2) linear aus $\mathbf{a}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{a}_2$ = (1; 2; 0) und $\mathbf{a}_3$ = (0; 1; -1).

b) Ist $\mathbf{b}_1$ = (3; -1; 1) **bzw.** $\mathbf{b}_2$ = (-1; 1; 0) linear abhängig von $\mathbf{a}_1$ = (1; 1; 1) und $\mathbf{a}_2$ = (0; 2; 1)?

Aufgabe 25

Im R^3 sind folgende Mengen gegeben:

U_1 = {(1; 3; 0), (-2; 1; 2)} U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 1,5)},

U_3 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)} U_4 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 2), (8; 13; 6)}.

a) Welche dieser Mengen sind linear unabhängig, welche bilden eine Basis des R^3?

b) Bestimmen Sie jeweils den Rang und eine Basis der von den Mengen aufgespannten Räume.

c) Geben Sie ein System von n+1 Vektoren des K^n an, von denen je n linear unabhängig sind. K sei dabei ein beliebiger Körper.

Aufgabe 26

a) Zeigen Sie, dass U = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)} eine Basis des R^3 ist.

b) Ersetzen Sie nach dem Austauschsatz von Steinitz zwei Vektoren in U durch die Vektoren $\mathbf{b}_1$ = (1; 3; 0) und $\mathbf{b}_2$ = (-2; 1; 2).

Aufgabe 27

Stellen Sie den Vektor **b** = (1; 3; 0) des R^3 bezüglich der beiden Basissysteme U_1 und U_2 dar:
U_1 = {(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)} und U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)}.

Aufgabe 28

A = {(1; 3; -2; 4), (-1; -1; 5; -9), (2; 0; -13; 23), (1; 5; 1; -2)}
B = {(2; 3; -1; 0), (-4; 5; 0; 1), (6; -2; 2; -2), (-2; 8; 1; 3)}

a) Stellen Sie die Vektoren jeweils als Zeilenvektoren einer Matrix dar.

b) Berechnen Sie jeweils den Zeilenrang und eine Basis für den von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraum.

c) Berechnen Sie jeweils den Spaltenrang und eine Basis für den von den Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 29

a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des von folgenden Vektoren aufgespannten Unterraumes des R^5: (1; 1; 0; 1; 1), (0; 0; 1; 1; 0), (0; 1; 0; 0; 0),.(1; 0; 0; 1; 1),.(1; 0; 1; 0; 1).

b) Es sei K der Restklassenkörper mod 5, also K={0, 1, 2, 3, 4}. Lösen Sie Aufgabe a) für den Vektorraum K^5.

Aufgabe 30

Es sei f eine lineare Abbildung von V in W. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Das Bild des Nullvektors aus V ist der Nullvektor in W.

b) Das Bild einer la-Teilmenge von V ist eine la-Teilmenge von W.

c) Das Urbild einer lu-Teilmenge von W ist eine lu-Teilmenge von V.

d) Das Bild von V ist ein Unterraum von W.

e) Das Bild irgendeines Unterraumes von V ist ein Unterraum von W.

f) Das Urbild eines Unterraums von W ist stets ein Unterraum von V.

g) Die Dimension des Bildraums von V ist höchstens gleich der Dimension von V.

h) Der Kern von f ist ein Unterraum von V.

i) Das Urbild $f^{-1}(\mathbf{w})$ eines Vektors **w** aus W ist eine Nebenklasse des Kerns: M = **v** + Kern(f).

Aufgabe 31

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen über eine lineare Abbildung f: V--->W:

(1) f ist bijektiv (also injektiv und surjektiv).

(2) Rang f = dim V = dim W.

(3) Ist { $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ } eine Basis von V, so ist { f($\mathbf{b}_1$), f($\mathbf{b}_2$), ..., f($\mathbf{b}_n$) } eine Basis von W.

Hinweis: In diesem Falle nennt man f einen **Vektorraumisomorphismus** und die Räume V und W sind isomorph.

Aufgabe 32

Gegeben sind die Punkte P(-1; 3), Q(1; -1) und R(1; 5) in einem Parallelkoordinatensystem. Führen Sie eine Kontrollzeichnung neben Ihrer Rechnung.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade PQ (Parameterdarstellung und Koordinatengleichung). Ermitteln Sie die Schnittpunkte X und Y von g mit den Koordinatenachsen. In welchem Verhältnis teilen X bzw. Y die Strecke PQ?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung von h = QR an. Beschreiben Sie die besondere Lage von h. Wie und in welchem Verhältnis teilt die x-Achse die Strecke QR?

c) Bestimmen Sie den Punkt T auf PR mit dem TV(PTR) = - 0,6. Ermitteln Sie den vierten harmonischen Teilpunkt U für die Strecke PR.

d) Eine Gerade k hat die Achsenabschnitte s = 2,5 auf der x-Achse und t = - 2,5 auf der y-Achse. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von k mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von k und zeigen Sie, daß k zu PR parallel ist.

e) Berechnen Sie Seitenmitten und Schwerpunkt des Dreiecks PQR. Bilden Sie Dreieck PQR durch Punktspiegelung am Schwerpunkt S ab auf Dreieck P'Q'R'. Zeigen Sie, dass S auch Schwerpunkt von Dreieck P'Q'R' ist.

f) Es sei r die Schrägspiegelung an der Gerade g in Richtung der Gerade k. Durch r geht die Gerade h in h^* über. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung, eine Koordinatengleichung und die Achsenabschnitte von h^*.

g) Die Gerade a habe folgende Eigenschaft: Schrägspiegelung an a in Richtung g bildet die x-Achse auf die y-Achse ab. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung für a.

Aufgabe 33

Gegeben sind die Ebene E...2x - 3y - 6z + 12 = 0 und die Gerade g... **x** = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1).

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden von E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen.
Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen.
(Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen).

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen. Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den v = - 2w gilt. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse TV(BAC), TV(CBA) und TV(ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r; s; t) auf P'(r'; s'; t') ab. Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist. Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

f) Gegeben ist die Gerade h... **x** = (6; - 6; 7) + l * (3; 2; 0).
Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Aufgabe 34

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A beschreibt eine lineare Abbildung z des R^4 in den R^3.

a) Zeigen Sie, dass { **a**, **b**, **c** } einen dreidimensionalen Unterraum U des R^4 aufspannen.
Ermitteln Sie die Bilder von **a**, **b** und **c** sowie die Dimension und eine Basis von z(U).

b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $z(R^4)$. Wie groß ist der Rang von z?
Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns von z. Bestätigen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

c) Berechnen Sie z^{-1}(1; - 5; 2).

d) Zeigen Sie, dass keiner der Basisvektoren des R3 bei z ein Urbild im R4 besitzt.

Aufgabe 35

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A'} = \begin{pmatrix} -t & -2 \\ 6 & 7-t \end{pmatrix}$$

a) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^2 in sich. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist.
Hinweis: Benutzen Sie die einschlägigen Sätze.

b) Bestimmen Sie die **Eigenvektoren** der durch A vermittelten Abbildung, also die Vektoren **x** mit der Eigenschaft **x**' = A * **x** = t * **x**. (Hinweis: Dazu ist das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix A' nichttrivial zu lösen. Benützen Sie ein Computerprogramm z. B. MAPLE).
Ergebnisse: t = 4 ergibt (-1; 2) und t = 3 ergibt (-2; 3).

c) Wählen Sie nun die beiden in b) berechneten Eigenvektoren als Basis des R^2 und stellen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis auf.

d) Verfahren Sie mit den Matrizen B und C, die Abbildungen des R^3 in sich darstellen, gemäß a) bis c). Ergebnisse:
B: t = 2: (1; 0; 0), t = 4: (0; 0; 1), t = 1: (15; -1,5; 1)
C: t = 18: (2; 1; 0), t = 27: (0,5; 0; 1), t = 9: (0; 2; 1).

Aufgabe 36

Eine lineare Abbildung z: R^3 ----> R^4 ist durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren bestimmt: z($\mathbf{e}_1$) = (1; - 3; 2; 4), z($\mathbf{e}_2$) = (5; - 3; 0; 2), z($\mathbf{e}_3$) = (- 2; 0; 1; 1) .
Bestimmen Sie den Kern, den Rang und den Defekt der Abbildung.

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{a}_1$ = (2; 1; -1), $\mathbf{a}_2$ = (1; 0; 3), $\mathbf{a}_3$ = (-1; 2; 1) bzw. durch $\mathbf{b}_1$ = (1; 1), $\mathbf{b}_2$ = (1; -1) je eine Basis des R^3 bzw. des R^2 gegeben ist.

b) A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt bezüglich der kanonischen Basen des R^3 und des R^2 eine lineare Abbildung z: R^3 ----> R^2.

c) Welche Matrix hat z bezüglich der Basen {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$} des R^3 und {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$} des R^2?
Welche Koordinaten hat der Bildvektor des Vektors (4; 1; 3) hinsichtlich der Basis {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$}?

Aufgabe 38

M = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ Die Matrix M beschreibt eine lineare Abbildung z: V ---> W.

a = (3; 2; 1; 1), **b** = (1; 0; -2; -3), **c** = (-2; 5; 5; 0) sind drei Vektoren aus V.

a) Bestimmen Sie den Rang von z und die Bilder von **a**, **b** und **c**.

b) Welche Dimension besitzt der von **a**, **b** und **c** aufgespannte Unterraum U und welche Dimension besitzt sein Bild z(U)?

Aufgabe 39

A = {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$} bzw. B = {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$} seien Basis des R^4 bzw. des R^3.

Durch z($\mathbf{a}_1$) = - $\mathbf{b}_1$ + 6$\mathbf{b}_2$ - 12$\mathbf{b}_3$ z($\mathbf{a}_2$) = 2$\mathbf{b}_1$ - $\mathbf{b}_2$ + 5$\mathbf{b}_3$
z($\mathbf{a}_3$) = 3$\mathbf{b}_1$ + 4$\mathbf{b}_2$ - 2$\mathbf{b}_3$ z($\mathbf{a}_4$) = 4$\mathbf{b}_1$ + 9$\mathbf{b}_2$ - 9$\mathbf{b}_3$

ist eine lineare Abbildung z: R^4 ----> R^3 bestimmt.

a) Ermitteln Sie die Bildvektoren zu **u** = (2; 3; 1; 1), **v** = (0; 1; -2; -3) und **w** = (5; -2; 5; 0).
Berechnen Sie außerdem das Bild z(**t**) des Vektors **t** = **u** + 2**v** + **w**.

b) Geben Sie die Abbildungsgleichungen für z an. Warum kann z nicht injektiv sein?

c) Ermitteln Sie Rang und Kern der Abbildung z. Geben Sie eine Basis des Kerns an.
Folgern Sie, dass z auch nicht surjektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Menge Y aller Urbilder von **y'** = -15$\mathbf{b}_1$ + 2$\mathbf{b}_2$ - 28$\mathbf{b}_3$ in R^4.
Zeigen Sie, dass es zu **z'** = 11$\mathbf{b}_1$ und damit auch zu $\mathbf{b}_1$ kein Urbild in R^4 gibt.

e) Es sei U der von **u**, **v** und **w** aus a) aufgespannte Unterraum des R^4. Ermitteln Sie die Dimensionen von U und von z(U). Was folgt hieraus über den Unterraum U $\cap$ (Kern z)?
Geben Sie eine Basis von U $\cap$ (Kern z) an.

f) Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die zu U gehörenden Urbilder des Vektors **y'** aus d).

g) Ermitteln Sie eine Basis C = { $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$ } des R^4 und eine Basis D = { $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ } des R^3, so dass die lineare Abbildung z bezüglich dieser Basen durch eine Matrix der Gestalt

M = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Welche Werte nehmen a, b und c dabei an?

Aufgabe 40 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie A * B, B * A, C * D und D * C. (Kontrolle mit Computerprogramm!).

Aufgabe 41

Es sei M eine n-n-Matrix, **x** und **x'** Vektoren eines Vektorraumes K^n über einem Körper K.
Die Gleichung **x'** = M * **x** lässt zwei verschiedene Deutungen zu:

1. Der Vektor **x'** ist das Bild von **x** bei einer linearen Abbildung von K^n in sich.
   x und **x'** sind also *verschiedene Vektoren (i. Allg. bezüglich derselben Basis*).
2. Ein und derselbe Vektor wird bezüglich zweier verschiedener Basen A und B dargestellt durch die beiden Koordinatenvektoren **x** und **x'**.
   x und **x'** beschreiben also *denselben Vektor nur bezüglich verschiedener Basen.*
   Die Gleichung **x'** = M * **x** beschreibt also eine *Basistransformation*.

Gegeben sind $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_A$ und $\mathbf{w'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$

a) **x'** = M * **x** beschreibt den Übergang von der kanonischen Basis A zu einer Basis B im R^3.
Stellen Sie den Vektor **v** (gegeben in der kanonischen Basis A) in der neuen Basis B dar.
Stellen Sie ebenso die kanonischen Basisvektoren in der neuen Basis B dar.
Welche Bedeutung haben die Spalten von M?

b) Welche Koordinaten bezüglich der alten Basis A haben die Basisvektoren $\mathbf{b}_1 = (1; 0; 0)_B$, $\mathbf{b}_2 = (0; 1; 0)_B$ und $\mathbf{b}_3 = (0; 0; 1)_B$ der neuen Basis B?

c) Zeigen Sie, dass N die zu M inverse Matrix ist. Daher gilt: **x** = N * **x'**.
Vergleichen Sie die Spalten von N mit den Ergebnissen in b). Welche Koordinaten bezüglich A hat der Vektor $\mathbf{w'} = (5; 4; 3)_B$?

d) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{s} = (2; 0; 1)_A$ dar bezüglich B, indem Sie die Darstellung direkt berechnen. Vergleichen Sie mit M * s.

e) Welche Bedingung muss eine n-n-Matrix erfüllen, damit sie eine Basistransformation beschreiben kann? (Hinweis: Die ursprünglichen Basisvektoren müssen selbstverständlich auch in der neuen Basis lu sein!). Welche der folgenden Matrizen beschreiben Basistransformationen? Bestimmen Sie dazu jeweils den Spaltenrang.

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

f) Begründen Sie nun den folgenden Satz:
Die m-n-Matrizen D und E beschreiben genau dann dieselbe lineare Abbildung des K^n in den K^m, wenn es reguläre (= invertierbare) Matrizen S (m-m-Matrix) und T (n-n-Matrix) gibt, so dass E = S * D * T ist bzw. $D = S^{-1} * E * T^{-1}$ gilt.

g) Wenden Sie den Satz aus f) auf folgendes Beispiel an und berechnen Sie die Matrix E.
$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ S = L aus e) und T = N aus a). Von welcher einfachen Art ist also die durch D vermittelte Abbildung?

Aufgabe 42

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Geraden im R² ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Dreiecksecken: g ... x + 3y = 5 h ... 3x + 2y = 8 i ... 2x - 2y = - 6.

Ergebnis: P(2; 1), Q(-1; 2), R(2/5; 17/5).

Aufgabe 43

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der folgenden vier Ebenen des R³. Zeigen Sie, dass die Ebenen einem Ebenenbüschel (alle Ebenen durch eine gemeinsame Gerade als Achse) angehören und bestimmen Sie die Büschelgerade.

E ... x + 4y - 2z = 3 F ... 3x + 2y = 1 G ... 4x + y + z = 0 H ... 3x - 8y + 6z = - 7

Ergebnis: Achse a... **x** = (-1/5; 4/5; 0) + t * (-2; 3; 5)

Aufgabe 44

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem mit der untenstehenden Koeffizientenmatrix A. Ergebnis: **x** = t * (1; -2; 3; 2).

b) Lösen Sie die inhomogenen linearen Gleichungssysteme mit den untenstehenden erweiterten Matrizen B und C.
Ergebnisse: B...**x** = (2; -3; 5). C...**x** = (-3; 0; -3; 0) + r * (-3; 1; 0; 0) + t * (5; 0; 2; 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right)$$

Aufgabe 46 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

Die vorstehende Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^4 in sich und zwar bezüglich der kanonischen Basis.

a) Bestimmen Sie den Bildraum der linearen Abbildung sowie eine zugehörige Basis.

b) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung sowie die Urbilder der folgenden Vektoren:
a = (1; 1; 1; 1); **b** = (4; -14; -8; 8); **c** = (1; 0; 0; 0); **d** = (2; 2; -22; -14).

c) Bestätigen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 47

Im R^4 wird durch die Vektoren $\mathbf{a}_1$ = (2; -1; 3; 5), $\mathbf{a}_2$ = (5; -2; 5; 8), $\mathbf{a}_3$ = (-5; 3; -8; -13) ein Unterraum U und durch $\mathbf{b}_1$ = (4; 1; -2; -4), $\mathbf{b}_2$ = (-7; 2; -6; -9), $\mathbf{b}_3$ = (3; 0; 0; -1) ein Unterraum V aufgespannt. Berechnen Sie eine Basis des Durchschnitts von U und V.

Aufgabe 48

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3$	$= t+3$	$= t-3$
$10x_1 + 4x_2 - 13x_3$	$= -4$	$= 4$
$14x_1 - 2x_2 + (t-5)x_3$	$= -2$	$= 2$
	(I)	(II)

a) Formen Sie die Koeffizientenmatrix und beide rechte Spalten I und II in einem Arbeitsgang in Dreiecksform (Staffelform) um. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der beiden Systeme für $t = 0$.

c) Ermitteln Sie alle Lösungen der beiden Systeme, für welche $x_3 = 0$ ist.

d) Für welchen Wert t_1 von t besitzt das homogene System einen eindimensionalen Lösungsraum? Bestimmen Sie diesen Lösungsraum.
Beschreiben Sie den Lösungsraum des homogenen Systems für $t \neq t_1$.

e) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Wert t_2 von t, für den das System (I) keine Lösung besitzt. Geben Sie t_2 an. Wie viele Lösungen besitzt das System (I) im Falle $t \neq t_2$?

f) Bestimmen Sie für $t = 2$ die Lösungsmenge des Systems (II).
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von (II) für $t \neq 2$.

Aufgabe 49

Gegeben sind die drei linearen Gleichungssysteme (I), (II) und (III) mit derselben Koeffizientenmatrix A:

$x_1 + 3x_2 + x_3$	$= 0$	$=1$	$=1$
$2x_1 + 2x_2 + x_3$	$= 0$	$=1$	$=1$
$4x_2 + tx_3$	$= 0$	$=2$	$=1$
	(I)	(II)	(III)

a) Lösen Sie die drei Gleichungssysteme durch elementare Umformungen in einem Arbeitsgang. Ermitteln Sie die Lösungsmenge von (I) in Abhängigkeit von t.

b) Für welche t besitzen (II) bzw. (III) Lösungen, für welche sogar eindeutige? Für welche t sind (II) bzw. (III) unlösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösungsmengen von (II) und (III) in Abhängigkeit von t.

d) Zeigen Sie: Für $t = 2$ ist die durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A * \mathbf{x}$ definierte lineare Abbildung f ein Isomorphismus des R^3 auf sich. Berechnen Sie die Urbilder der kanonischen Basisvektoren. Durch welche Matrix B wird daher die Umkehrabbildung f^{-1} beschrieben?

e) Untersuchen Sie die für $t = 1$ wie in d) gegebene lineare Abbildung g des R^3 in sich. Bestimmen Sie insbesondere Rang(g) und Kern(g). Beschreiben Sie den Bildraum $g(R^3)$ und interpretieren Sie ihn geometrisch. Gehören die kanonischen Basisvektoren des R^3 zu $g(R^3)$?

f) Bestimmen Sie die "Fixpunkte" der Abbildungen f und g, also die Vektoren **x** mit der Eigenschaft $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{g(x)} = \mathbf{x}$.

g) Untersuchen Sie die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ auf Rang, Kern, Bildraum und Fixpunkte.

Aufgabe 50

Beweisen Sie unter Verwendung des Skalarprodukts für Vektoren die folgenden Sätze:

a) Das Mittenviereck einer Raute (eines Rechtecks) ist ein Rechteck (eine Raute).

b) Thalessatz: Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter.

c) Sind a, b und c die Winkel eines Vektors **v** mit den Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems im R^3, so gilt: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$.

d) Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Aufgabe 51

Gegeben sind die beiden lu Vektoren **a** und **b**, die ein Dreieck OAB aufspannen.

a) Welche Lösungen besitzt die Gleichung $\mathbf{x} * \mathbf{a} = \mathbf{b} * \mathbf{x}$?

b) Beweisen Sie vektoriell den Satz über die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden (S), der Mittelsenkrechten (M) bzw. der Höhen (H).

c) Zeigen Sie: S, M und H liegen auf einer Geraden ("Euler-Gerade").
Berechnen Sie das Teilverhältnis TV(H, S, M).

d) Zeigen Sie: Die Eulergerade von Dreieck OAB ist auch Eulergerade des Mittendreiecks PQR von Dreieck OAB.

e) F sei Umkreismitte des Seitenmittendreiecks PQR. Folgern Sie, dass F ebenfalls auf der Eulergerade liegt. Zeigen Sie: M und F teilen die Punkte H und S harmonisch.

Aufgabe 52

a) Gegeben sind die Punkte A(8; 0), B(10; 11) und C(0; 6).
Fertigen Sie eine Kontrollzeichnung an.

b) Berechnen Sie Seitenlängen und Winkel des Dreiecks ABC.

c) Bestimmen Sie die Gleichungen (Parameterdarstellung und Normalenform) der Dreieckshöhen, die Längen der Höhenstrecken, die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H und der Höhenfußpunkte.

d) Vom Ursprung wird das Lot auf h_a gefällt.
Bestimmen Sie den Fußpunkt und die Länge des Lots.

e) Zeigen Sie: Die Gerade g...$3x + 4y - 40 = 0$ ist zu AC parallel. Bestimmen Sie den Schnittpunkt D von g mit BC. In welchem Verhältnis teilt D die Seite BC?

f) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S, die Umkreismitte M und die Gleichung der Eulergeraden des Dreiecks ABC.

g) Welcher Punkt F teilt zusammen mit M die Strecke HS harmonisch?

h) Warum ist F Mittelpunkt des Mittendreiecks PQR von Dreieck ABC?

i) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkreise K_1 von Dreieck ABC und K_2 von Dreieck PQR.
Zeigen Sie, dass die Höhenfußpunkte auf K_2 liegen.

j) Zeigen Sie: Die Mittelpunkte von HA, HB und HC liegen ebenfalls auf dem Kreis K_2.
Hinweis: K_2 heißt "Feuerbachscher Neunpunktekreis" des Dreiecks ABC.

k) Auf welcher Ortslinie bewegt sich die Umkreismitte M (der Höhenschnittpunkt H bzw. der Schwerpunkt S) von Dreieck ABC, wenn C auf der y-Achse wandert?

LÖSUNGEN ZU EINZELNEN AUFGABEN

Blatt 1

Aufgaben 1 bis 4: Durch einfaches Nachrechnen mit Vektoren zu lösen**.**

Aufgabe 5:

a) $\vec{t} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1+\lambda}$ b) $\vec{t} = \frac{y \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}}{x+y}$

Mit A(0; 0) und B(1; 0) erhält man folgende Funktion: $\lambda = \frac{1}{1-x}$ bzw. $x = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

Aufgabe 6:

Man erhält den Mittelpunkt des Mittenvierecks (Eckenschwerpunkt) $\vec{m} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

Aufgabe 7: Nachrechnen mit Vektoren. Man erhält $\vec{s} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

Blatt 2

Aufgabe 8:

Siehe Aufg. 5. d) Ist TV(ATB) = λ so ist TV(BTA) = $\frac{1}{\lambda}$,

TV(TBA) = $\frac{-1}{1+\lambda}$, TV(ABT) = – (1 + λ), TV(BAT) = – $\frac{\lambda+1}{\lambda}$, TV(TAB) = – $\frac{\lambda}{\lambda+1}$

Aufgabe 9:
Man erhält als Gruppe die symmetrische Gruppe S_3 (isomorph zur Diedergruppe D_3) mit g als erzeugender Spiegelung von Ordnung 2 und f als erzeugender Drehung von Ordnung 3 und der Gleichung $f \circ g = g \circ f^2$.

Aufgabe 10: Nachrechnen mit Hilfe von Vektoren.

Aufgabe 11:
Man wählt A als Ursprung und ABC, sowie ADE jeweils kollinear und F = BE $\cap$ CD. Dann setzt man an: $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AE} = \mu \cdot \overrightarrow{AD}$ an. Dann bestimmt man F und zeigt schließlich, dass die drei Mittelpunkte kollinear liegen.

Blatt 3

Aufgabe 13:
a) AB = 7; BC = 6,5; CA = 7,5. b) T(15/4; 0) c) vektoriell

d) R(168/29; 84/29); TV = 14/15. e) J(4; 2) f) S(7/3; 28/9) TV(CSA) = 13/14

g) vektoriell; h) 15/14 * 14/15 * 13/14 = 1.

i) TV(AJR) = 29/13 TV(BJS) = 9/5 TV(CJT) = 2.

Aufgabe 14:

a) Man kann den Nullvektor nichttrivial aus den Vektoren kombinieren.

b) Mindestens ein Koeffizient λ_k ist von 0 verschieden, also kann man nach dem Vektor $\mathbf{a_k}$ auflösen.

c) Bei der nichttrivialen LK des Nullvektors kann man die zusätzlichen Vektoren mit Koeffizienten 0 hinzufügen.

d) Lässt sich der Nullvektor nicht nichttrivial kombinieren, so erst recht nicht von einer nichtleeren Teilmenge.

e) Man schreibt die Darstellung von **b** mit den ai um in eine nichttriviale LK des Nullvektors.

f) Es gibt eine nichttriviale LK des Nullvektors mit den $\mathbf{a_k}$ und **b**. Dabei ist sicher der Koeffizient von **b** ungleich 0 (sonst wären $\mathbf{a_k}$ la). Also kann man nach b) nach dem Vektor **b** auflösen.

g) Kontraposition zu f).

<u>Blatt 4</u>

Aufgabe 15:

Man wählt A als Ursprung sowie AB und AC als aufspannende Vektoren.

Aufgabe 16:

Ansatz wie bei 15.

Aufgabe 17:

z. B. TV(ERF) = – TV(EQF):

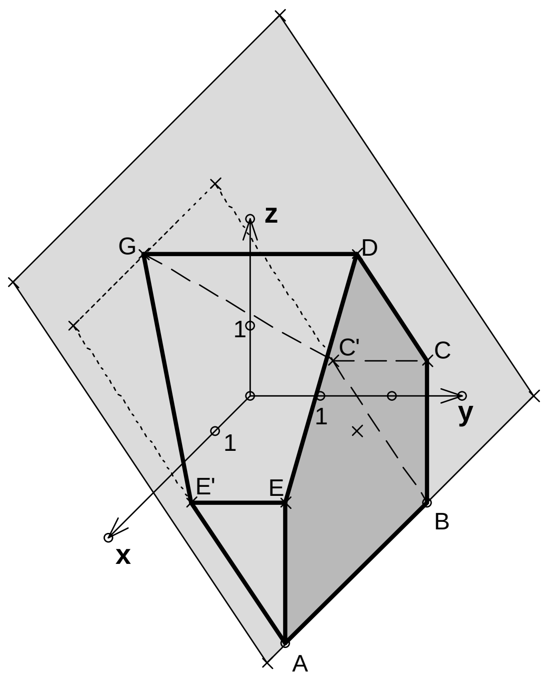
Ceva mit Punkt B für Dreieck EFD:

(ERF) * (FCD) * (DAE) = 1.

Menelaos mit Gerade CAQ für Dreieck EFD:

(EQF) * (FCD) * (DAE) = 1.

Daraus folgt die Behauptung. Analog F bzw. AC mit BDE und D bzw. EF mit ACB.



Aufgabe 18:

Achsenschnittpunkte: $S_y(0; 4; 0)$ $S_z(0; 0; 6)$.

E'(7; 8/3; 2) C'(3; 8/3; 2).

Aufgabe 19:

E….x = (2; 1; 3) + t * (0; -1; 1) + s * (6; 7; 2)

E schneidet h in H(4; 0; 7).

t….x = (8; 8; 5) + r * (-4; -8; 2)

t schneidet g in G(2; -4; 8).

Aufgabe 20:

Schnittpunkt von g mit Ebene E: G(-3; -1; -5)

h ist parallel zu E im Abstand 10

k liegt in der Ebene E.

Aufgabe 21:

Für beliebige reelle a ist stets g nicht parallel zu ha.

Für a = 4 existiert ein Schnittpunkt S(5; 5; 0).

Alle Da liegen auf der Geraden x = (3; 10; 2) + a * (1; 0; 0).

Alle ha liegen in der Ebene 2y – 5z – 10 = 0.

Blatt 5

Aufgabe 22:

e) Die Vereinigung sei Teilraum W.
Fall 1: Es gibt Vektor v in U1 aber nicht in U2. Dann wählen wir w aus U2 beliebig. Es ist dann u = w + v sicher in W also u aus U1 oder aus U2. Wäre nun u aus U2, so auch v im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist u aus U1 und damit auch w aus U1 also U2 enthalten in U1.
Fall 2: Existiert kein v der angegebenen Art, so ist U1 enthalten in U2.
Die Umkehrung ergibt sich leicht

Aufgabe 23:

a) Ja, aufgespannt von (-1; 0; 2) und (1; 1; 0).

b) Nein, denn z. B. (1/2; 0; 0) in V jedoch (1; 0; 0) nicht.

Aufgabe 24:

a) (-1; 1; 2) b) $\mathbf{b_1}$ ja: (3; -2) $\mathbf{b_2}$ ja: (-1; 1)

Aufgabe 25:

a) U_1 und U_2 haben den Rang 2; U_3 und U_4 haben den Rang 3.

b) Siehe a).

c) Alle Einheitsvektoren und zusätzlich a = (1; 1; …; 1).

Aufgabe 27:

a) bezüglich U_1: (-2; 3; 0) bezüglich U_2: (-1; 0; 2)

Aufgabe 28:

A hat den Zeilenrang 3.
Der Zeilenraum wird aufgespannt von (-1; -1; 5; 0), (0; 2; 3; 0) und (0; 0; 0; 1).

B hat den Zeilenrang 4.

Blatt 6

Aufgabe 30:

Beweise ergeben sich leicht mit der Homorphiebedingung f(**a** + **b**) = **f(a)** + **f(b).**

Aufgabe 31:

Genau dann ist f bijektiv, wenn der Kern der Nullraum ist, also Rang(f) = dim(V) = dim(W).

Jeder Vektor von V lässt sich als LK der Basis darstellen, also auch sein Bild als LK der Bilder der Basisvektoren.

Aufgabe 32:

a) PQ… $2x + y – 1 = 0$ X(1/2; 0) Y(0; 1). TV(PXQ) = 3; TV(PYQ) = 1 (Mitte).

b) h = QR … $x = 1$; A(1; 0). TV(QAR) = 1/5.

c) T(-4; 0) U(1/4; 15/4).

d) k … $2x – 2y – 5 = 0$. k ist parallel zu PR.

e) S(1/3; 7/3). P'(5/3; 5/3); Q'(-1/3; 17/3); R'(-1/3; -1/3).

f) h* … $x + 2y + 1 = 0$

g) a … $y = ½ * x$

<u>Blatt 7</u>

Aufgabe 33:

Aufgabe 34:

a) Der Rang der von den drei Vektoren gebildeten Matrix ist 3. Die drei Vektoren bilden also eine Basis des R^3. a' = (2; 2; 10); b' = (1; 1; 5); c' = (-2; -2; -10), also sind diese drei Vektoren la vom Rang 1.
Daher ist (1; 1; 5) eine Basis von φ(U) und dieser eindimensional.

b) Die Spalten der Abbildungsmatrix A sind die Bilder der Basisvektoren des R4, sie spannen den Bildraum auf.
A hat Rang 2. Der Bildraum hat z. B. die Basis B = {(-1; 7; 1); (0; 2; 1)}.
Kern von φ hat die Dimension 2 und z. B. die Basis K = {(-1; -5; 2; 0); (-1; -3; 0; 2)}.
Es gilt der Dimensionssatz: dim(V) = dim(Bild(V)) + dim(Kern(φ)) = 2 + 2 = 4.

c) Man erhält eine Nebenklasse des Kerns: (0; 2; 0; -1) + Kern

d) Keiner der drei kanonischen Basisvektoren des R^3 lässt sich aus den Basisvektoren des Bildraums kombinieren (Nachrechnen).

Aufgabe 35:

a) Man erhält Rang(A) = 2, also ist die Abbildung bijektiv.

b) Siehe Aufgabe.

c) Mit den Eigenvektoren von A als Basis erhält man die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten 4 bzw. 3 auf der Diagonale.

<u>Blatt 8</u>

Aufgabe 36:

Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren. Man erhält Rang(A) = 2, also ist der Defekt = 1 = dim(Kern). Eine Basis des Kerns ist (-1; 1; 2).

Aufgabe 37:

a) Die drei Vektoren **a** sind lu ebenso wie die beiden Vektoren **b**.

b) φ(a1) = (-1; 0); φ(a2) = (9; 1); φ(a3) = (7; -5).
Dargestellt bezüglich der bi ergibt sich: (-1/2; -1/2) bzw. (5; 4) bzw. (1; 6).

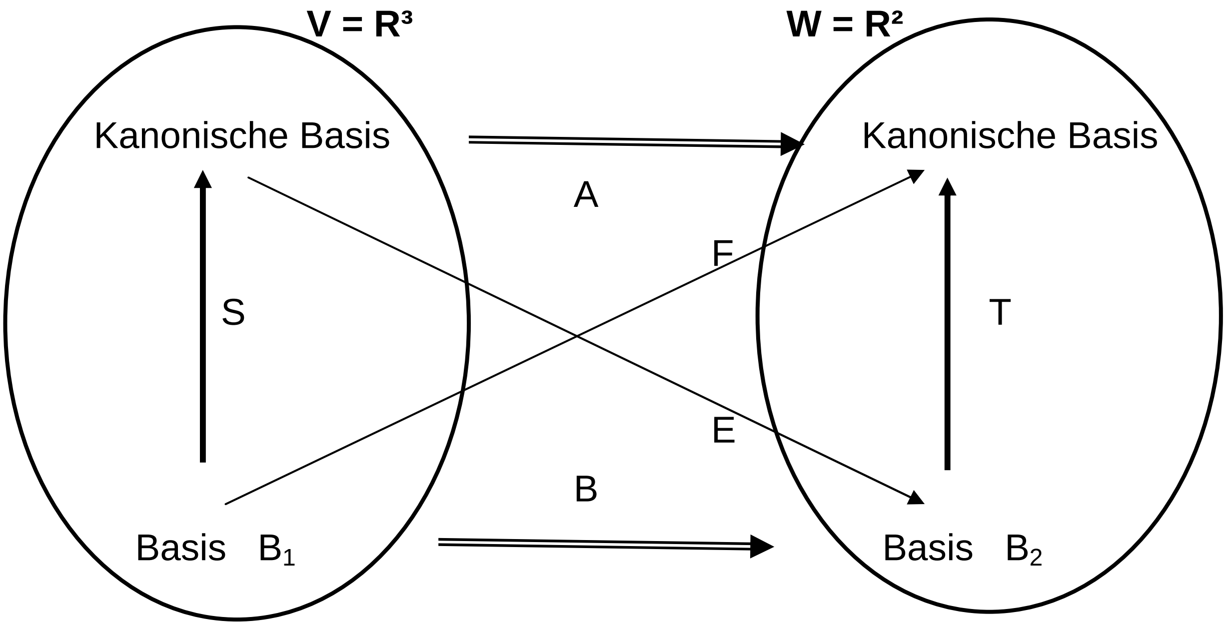
Damit erhält man die Abbildungsmatrix $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

A * (4; 1; 3) = (11; 2). Bezüglich b_k: (13/2; 9/2).

<u>Bemerkungen zum Problem der Basistransformation:</u>

x' = T • x **x bezieht sich auf die Basis B_1, dagegen x' auf die Basis B_2**

Die Spalten der Transformationsmatrix T sind die Koordinaten der alten Basisvektoren der Basis B_1 bezüglich der neuen Basis B_2.



A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **S =** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **T =** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

B = T^{-1} A S= $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 6 \end{pmatrix}$ **E = T^{-1} A =** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ **F = A S =** $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Lineare Algebra SS 90; Aufgabe 37. BASISTRANSFORMATION. MAPLE-Bearbeitung.

A ist die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung vom R3 in den R2 bezüglich der jeweils kanonischen Basen.

```
> A := matrix(2,3,[0,2,3,1,-2,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

S ist die Matrix einer Basistrafo im R3. Die Spalten von S sind die Basisvektoren der neuen Basis B1 des R3.

S ist also die Trafomatrix, die einen im System B1 gegebenen Vektor in das System mit der kanonischen Basis des R3 transformiert.

```
> S := matrix(3,3,[2,1,-1,1,0,2,-1,3,1]);
```

$$S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> S1:= inverse(S);
```

$$S1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{-1}{6} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

T ist die Matrix einer Basistrafo im R2. Die Spalten von T sind die Basisvektoren der neuen Basis B2 des R2.

T ist also die Trafomatrix, die einen im System B2 gegebenen Vektor in das System mit der kanonischen Basis des R2 transformiert.

```
> T := matrix(2,2,[1,1,1,-1]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> T1 := inverse(T);
```

$$T1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> E:= multiply(T1,A);
```

$$E := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

```
> F:= multiply(A,S);
```

$$F := \begin{bmatrix} -1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> B:= multiply(T1,A,S);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 5 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 38:

a) Rang(A) = 2.   b) a' = (11; 22; -20); b' = (-16; -36; 36); c' = (6; 52; -80).

c) Rang(U) = 3 = dim(U). Rang(U') = 2.

Aufgabe 39:

a) u' = (11; 22; -20) v' = (-16; -36; 36)   w' = (6; 52; -80)   t' = (-15; 2; -28)

b) Matrix A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 4 & 9 \\ -12 & 5 & -2 & -9 \end{pmatrix}$

Rang(A) ist höchstens 3 daher ist dim(Kern) mindestens 1 und die Abbildung nicht injektiv

c) Rang(A) = 2. Damit wird dim(Kern) = 2. Basis des Kerns: {(-2; -3; 0; 1); (-1; -2; 1; 0)}

d) y = (-1; -8; 0; 0) + Kern   Urbild2 existiert nicht. z' liegt nicht im Bildraum.

e) Rang(U) = 3. Rang(φ(U)) = 2. Damit hat U ∩ Kern(φ) die Dimension 1. Eine Basis dvon ist (33; 50; -1; -16).

f) Gemäß a) und d) ist y' = t'. Daher ist y = t = (-1; -8; 0; 0) + Kern

g) Die Vektoren a1' und a2' bilden eine Basis des Bildraums. Wir wählen für den Ausgangsraum neben a1 und a2 noch zwei Kernvektoren als Basis C. Mit dem Bild des ersten Kernvektors werden a1' und a2' zu einer Basis D des Zielraums ergänzt.

Dann ergibt sich folgende Abbildungsmatrix: M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Blatt 9</u>

Aufgabe 40:

$$AB := \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$CE := \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$EC := \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

Das Produkt B*A ist aus Formatgründen nicht möglich. (E wurde statt D als Name gewählt).

Aufgabe 41:

a) v' = M * v = $(5; 4; 3)_B$.

Die transformierten der kanonischen Basisvektoren sind:

a1' = M * a1 = $(0; 1; 1)_B$; a2' = $(1; 0; 1)_B$; a3' = $(1; 1; 0)_B$. Diese bilden die Spalten der Trafomatrix M. Die Spalten von M sind also die Koordinatenvektoren der alten Basis A dargestellt bezüglich der neuen Basis B.

b) Nun werden umgekehrt die Basisvektoren der neuen Basis B dargestellt durch ihre Koordinatenvektoren bezüglich der alten Basis A: Dazu muss die Trafomatrix M invertiert werden, da folgende Gleichung zu lösen ist: M * x = (1; 0; 0) etc.

Man erhält die Spalten von M1 = M^{-1}: $M1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

c) w' = $(5; 4; 3)_B = (1; 2; 3)_A$ = M1 * w'.

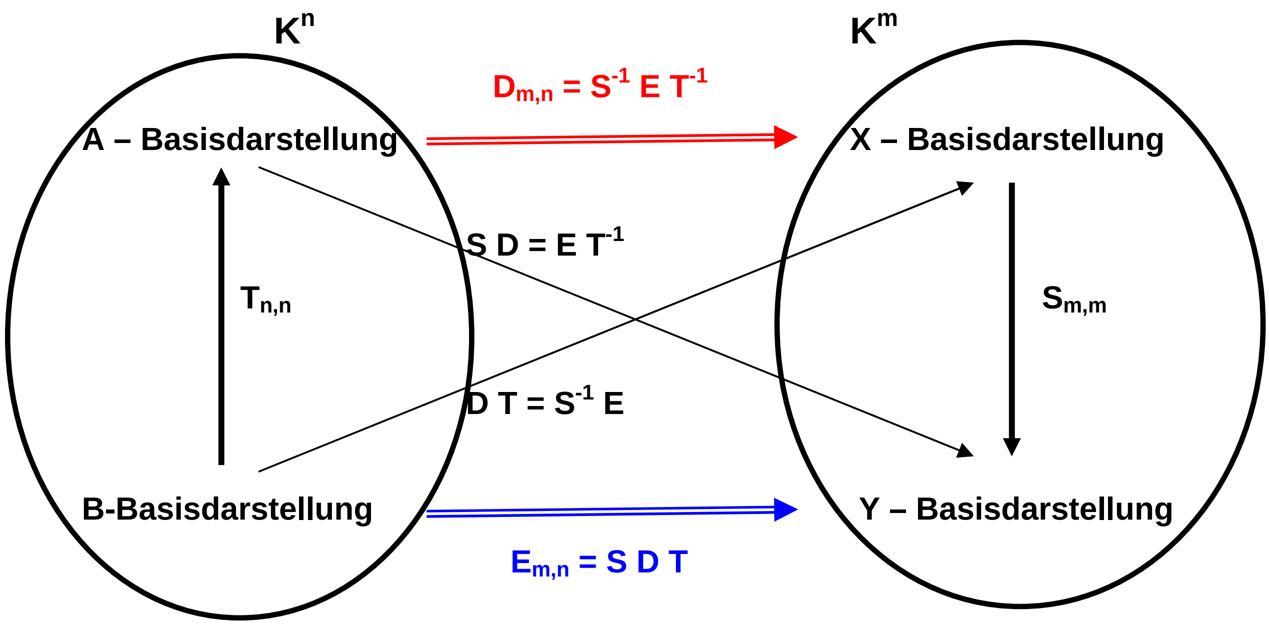
d) s = $(2; 0; 1)_A = (1; 3; 2)_B$ = M * s.

e) Die alte Basis muss auch bezüglich der neuen lu sein, d. h. der Spaltenrang der Trafomatrix M muss n sein, also M quadratisch und regulär vom Rang n.

F, H und L sind regulär, dagegen G und K nicht.

f) $\mathbf{x} \xrightarrow[\text{Basistrafo in } K^n]{T\bullet} \mathbf{x'} \xrightarrow[\text{lineare Abbildung}]{D\bullet} \mathbf{y'} \xrightarrow[\text{Basistrafo in } K^m]{S\bullet} \mathbf{y}$

g) E = S * D * T = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ * M1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.



$$x_B \xrightarrow{T\cdot} x_A = T\,x_B \xrightarrow{D\cdot} y_X = D\,T\,x_A \xrightarrow{S\cdot} y_Y = (S\,D\,T)\,x_B$$

Blatt 10

Aufgabe 44:

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} .6666666667 & -.6666666667 & .3333333333 \\ -.6666666667 & -1.333333333 & .6666666667 \\ .3333333333 & .6666666667 & .6666666667 \end{bmatrix}$$

$$C1 := \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E1 := \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & 22 & -29 & \frac{27}{2} \\ 1 & -11 & 15 & -7 \\ \frac{3}{2} & -15 & 20 & \frac{-19}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 46:

```
> A:= matrix(4,4,[2,0,1,-1,-7,3,1,5,-4,-6,-11,-1,4,-6,-7,-5]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A); colspace(A);
```

$$2$$

$$\{[1, 0, -9, -5], [0, 1, -2, -2]\}$$

```
> kernel(A);
```

$$\{[1, 3, -2, 0], [0, -2, 1, 1]\}$$

```
> a1:= vector(4,[1,1,1,1]); b1:= vector(4,[4,-14,-8,8]);
c1:=vector(4,[1,0,0,0]);
d1:=vector(4, [2,2,-22,-14]);
```

$$a1 := [1, 1, 1, 1]$$

$$b1 := [4, -14, -8, 8]$$

$$c1 := [1, 0, 0, 0]$$

$$d1 := [2, 2, -22, -14]$$

```
> linsolve(A,a1);
> linsolve(A,b1);
```

$$[\_t_2, -\_t_2 + 2 - 2\,\_t_1, \_t_1, 2\,\_t_2 + \_t_1 - 4]$$

```
> linsolve(A,c1);
> linsolve(A,d1);
```

$$[\_t_2, 3\,\_t_2 - 2\,\_t_1, -2\,\_t_2 + 2 + \_t_1, \_t_1]$$

Aufgabe 47:

Ergebnis: Alle Linearkombinationen von (-3, 3, -8, -13) und (-1, -1, 2, 3).

<u>Blatt 11</u>

Aufgabe 48:

```
> At:= matrix(3,3,[2,-3,5,10,4,-13,14,-2,t-5]);
```

$$At := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & -13 \\ 14 & -2 & t-5 \end{bmatrix}$$

```
> a:=vector(3,[t+3,-4,-2]);
```

$$a := [t + 3, -4, -2]$$

```
> b:=vector(3,[t-3,4,2]);
```

$$b := [t - 3, 4, 2]$$

```
> linsolve(At,a);
```

$$\left[\frac{1}{19}\,\frac{-23\,t - 38 + 2\,t^2}{-2 + t}, -\frac{1}{19}\,\frac{85\,t + 114 + 5\,t^2}{-2 + t}, -2\,\frac{t + 2}{-2 + t}\right]$$

```
> linsolve(At,b);
```

$$\left[\frac{2}{19}\,t - 1, -\frac{5}{19}\,t - 3, -2\right]$$

```
> A2:= matrix(3,3,[2,-3,5,10,4,-13,14,-2,-3]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & -13 \\ 14 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A2,vector(3,[0,0,0]));
```

$$\left[\frac{1}{2}\,\_t_1, 2\,\_t_1, \_t_1\right]$$

a) Rang der Koeffizientenmatrix ist 3. Nur für t = 2 ist der Rang 2.

b) t = 0: (I) ergibt als Lösung: (1; 3; 2) (II) ergibt (-1; -3; -2).

c) Im Falle (I) muss zur Lösbarkeit t = - 2 sein und man erhält (-4/19; -9/19; 0)
Im Falle (II) muss zur Lösbarkeit t = 2 sein und man erhält: (4/19; 9/19; 0).

d) Nur für t = 2 ist Rang(A) = 2. Man erhält den Basisvektor (1; 4; 2).

e) Nur für t = 2 ist die Gleichung (I) unlösbar. In allen anderen Fällen ist die Lösung eindeutig, weil Rang(A) = 3 ist.

f) Siehe c) und d): Man erhält: (4/19; 9/19; 0) + r * (1; 4; 2) falls k = 2 ist.
Andernfalls erhält man (2/19 * k – 1; -5/19 * k – 3; - 2) als Lösung.

Aufgabe 49:

```
> At:=matrix(3,3,[1,3,1,2,2,1,0,4,t]);
```

$$At := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(At);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

```
> a:=vector(3,[0,0,0]);
```

$$a := [0, 0, 0]$$

```
> b:=vector(3,[1,1,2]);
```

$$b := [1, 1, 2]$$

```
> c:=vector(3,[1,1,1]);
```

$$c := [1, 1, 1]$$

```
> linsolve(At,a);
```

$$[0, 0, 0]$$

```
> linsolve(At,b);
```

$$\left[\frac{1}{4}\frac{t-2}{t-1}, \frac{1}{4}\frac{t-2}{t-1}, \frac{1}{t-1}\right]$$

```
> linsolve(At,c);
```

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right]$$

```
> A1:= matrix(3,3,[1,3,1,2,2,1,0,4,1]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A1,a);
```

$$[\_t_1, \_t_1, -4\,\_t_1]$$

```
> linsolve(A1,b);
> linsolve(A1,c);
```

$$[\_t_1, \_t_1, -4\,\_t_1 + 1]$$

```
> A2:= matrix(3,3,[1,3,1,2,2,1,0,4,2]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A2inv:=inverse(A2);
```

$$A2inv := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A1); kernel(A1); colspace(A1);
```

$$2$$

$$\{[1, 1, -4]\}$$

$$\{[1, 0, 2], [0, 1, -1]\}$$

Der Bildraum ist eine Ebene durch den Ursprung mit der Gleichung x = r * (1; 0; 2) + s * (0; 1; -1).
Die kanonischen Basisvektoren des R^3 gehören ganz offenbar nicht zum Bildraum.

```
> FG:=multiply(A1,A2);
```

$$FG := \begin{bmatrix} 7 & 13 & 6 \\ 6 & 14 & 6 \\ 8 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> rank(FG); kernel(FG);colspace(FG);
```

$$2$$

$$\left\{\left[1, 1, \frac{-10}{3}\right]\right\}$$

$$\{[1, 0, 2], [0, 1, -1]\}$$

```
> Gf:=multiply(A2,A1);
```

$$Gf := \begin{bmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 6 & 14 & 5 \\ 8 & 16 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> rank(Gf);kernel(Gf); colspace(Gf);
```

$$2$$

$$\{[1, 1, -4]\}$$

$$\left\{\left[1, 0, \frac{4}{5}\right], \left[0, 1, \frac{2}{5}\right]\right\}$$

a) Die Koeffizientenmatrix hat den Rang 3 außer für t = 1, dann ist der Rang 2.
   (I) Für t = 1 erhält man (s; s; -4s). Für $t \neq 1$ ist der Nullvektor einzige Lösung.

b) (II): Für t = 1 erhält man keine Lösung, sonst ist die Lösung eindeutig:

(-1/4*(-1 + 1/(t-1)); -1/4 * (-1 + 1/(t-1)); 1/(t-1))

(III): Für t = 1 erhält man (¼; ¼; 0) + s * (-1; -1; 4)

Sonst die eindeutige Lösung (¼ ; ¼; 0).

Das homogene System hat nur für t = 1 eine nichttriviale Lösung (siehe oben) ansonsten besitzt es nur den Nullvektor als Lösung.

c) Siehe b) bzw. a).

d) Siehe MAPLE-Lösung.

e) Siehe MAPLE-Lösung

f) Es gibt jeweils nur den Nullpunkt als Fixpunkt.

g) Siehe MAPLE-Lösung

Blatt 12

Aufgabe 50:

Einfaches Nachrechnen.

Aufgabe 51:

Einfaches Nachrechnen.

Aufgabe 52:

Einfaches Nachrechnen.

Aufgabe 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie A * B, B * A, C * D und D * C. (Kontrolle mit Computerprogramm!).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Geraden im R^2 ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Dreiecksecken: g ... x + 3y = 5 h ... 3x + 2y = 8 i ... 2x - 2y = - 6.
Ergebnis: P(2; 1), Q(-1; 2), R(2/5; 17/5).

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der folgenden vier Ebenen des R^3. Zeigen Sie, dass die Ebenen einem Ebenenbüschel (alle Ebenen durch eine gemeinsame Gerade als Achse) angehören und bestimmen Sie die Büschelgerade.
E ... x + 4y - 2z = 3 F ... 3x + 2y = 1 G ... 4x + y + z = 0 H ... 3x - 8y + 6z = - 7
Ergebnis: Achse a... **x** = (-1/5; 4/5; 0) + t * (-2; 3; 5)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

-3 1 -5 -2

Aufgabe 5

c) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem mit der untenstehenden Koeffizientenmatrix A. Ergebnis: **x** = t * (1; -2; 3; 2).

d) Lösen Sie die inhomogenen linearen Gleichungssysteme mit den untenstehenden erweiterten Matrizen B und C.
Ergebnisse: B...**x** = (2; -3; 5). C...**x** = (-3; 0; -3; 0) + r * (-3; 1; 0; 0) + t * (5; 0; 2; 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right)$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die drei linearen Gleichungssysteme (I), (II) und (III) mit derselben Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{array}{rccc} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 & =1 & =1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 & =1 & =1 \\ 4x_2 + tx_3 & = 0 & =2 & =1 \\ & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \end{array}$$

a) Lösen Sie die drei Gleichungssysteme durch elementare Umformungen in einem Arbeitsgang. Ermitteln Sie die Lösungsmenge von (I) in Abhängigkeit von t.

b) Für welche t besitzen (II) bzw. (III) Lösungen, für welche sogar eindeutige? Für welche t sind (II) bzw. (III) unlösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösungsmengen von (II) und (III) in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 7

	(I)	(II)
$2x_1 - 3x_2 + 5x_3$	$= t+3$	$= t-3$
$10x_1 + 4x_2 - 13x_3$	$= -4$	$= 4$
$14x_1 - 2x_2 + (t-5)x_3$	$= -2$	$= 2$

a) Formen Sie die Koeffizientenmatrix und beide rechte Spalten I und II in einem Arbeitsgang in Dreiecksform (Staffelform) um. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der beiden Systeme für $t = 0$.

c) Ermitteln Sie alle Lösungen der beiden Systeme, für welche $x_3 = 0$ ist.

d) Für welchen Wert t_1 von t besitzt das homogene System einen eindimensionalen Lösungsraum? Bestimmen Sie diesen Lösungsraum.
Beschreiben Sie den Lösungsraum des homogenen Systems für $t \neq t_1$.

e) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Wert t_2 von t, für den das System (I) keine Lösung besitzt.
Geben Sie t_2 an. Wie viele Lösungen besitzt das System (I) im Falle $t \neq t_2$?

f) Bestimmen Sie für $t = 2$ die Lösungsmenge des Systems (II).
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von (II) für $t \neq 2$.

Aufgabe 8

Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem (*) mit dem reellen Parameter t:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & tz & = & 3 \\ x & + & ty & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

.

Es sei $\mathbf{L}_t$ die Lösungsmenge dieses inhomogenen Gleichungssystems und $\mathbf{H}_t$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

a) Ermitteln Sie die Lösungsmengen $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ zu den Parametern $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$.
Was folgt hieraus jeweils für die Lösungsmengen $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$?

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte t^* von t, für welche das *homogene* System zu (*) nicht nur die triviale Lösung besitzt.
Bestimmen Sie die zu diesen Werten t^* gehörenden Lösungsmengen $\mathbf{H}_{t^*}$.

c) Für welche Werte t besitzt das gegebene *inhomogene* Gleichungssystem (*)
  (1) genau eine Lösung,
  (2) mehr als eine Lösung,
  (3) keine Lösung ?

Zur Begründung können bisherige Resultate herangezogen werden.

Aufgabe 9

Gegeben sind zwei Vektoren **a** und **b**.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren **a** + **b**, **b** + **a**, **a** - **b**, **b** - **a**.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren 2**a** + 3**b**, 2**a** - 3**b**, 3**b** + 2**a**, 3**b** - 2**a**.

c) Bestimmen Sie die Vektoren aus a) und b) in Koordinaten mit **a**=(a_1, a_2) und **b**=(b_1, b_2).

Aufgabe 10

Beweisen Sie vektoriell den Satz von der Mittelparallelen im Dreieck:
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Aufgabe 11

Ein Parallelogramm OACB wird durch die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ = **a** und $\overrightarrow{OB}$ = **b** aufgespannt.
M_1 bis M_4 sind die Mitten der Seiten OA, AC, CB, BO. M ist Schnittpunkt der Diagonalen.
a) Drücken Sie die Vektoren AB, OC und OM_i durch **a** und **b** aus.
b) Beweisen Sie, dass M beide Diagonalen halbiert.
c) Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte von OM_2 und OM_3 mit der Diagonale AB diese in drei gleiche Teile teilen.

Aufgabe 12

Beweisen Sie vektoriell den Satz von den Seitenhalbierenden im Dreieck:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

Aufgabe 13

Eine Strecke AB ist durch die Ortsvektoren **a** und **b** ihrer Endpunkte A und B gegeben.
T ist ein Punkt der Strecke AB und teilt diese im Verhältnis x : y.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** = $\overrightarrow{OT}$ durch **a** und **b** aus.

b) Ersetzen Sie x : y durch k.

c) Zeichnen Sie für k = 1/2, 3/4, 1, 2, 4, -4, -2, -3/2, -5/4, -1/4, -1/2, -3/4.

d) Rechnen Sie in Koordinaten mit A(0; 0) und B(6; 0).

e) Wie ändert sich k, wenn sich T von rechts bzw. von links an A bzw. an B annähert?

f) Zeigen Sie: Erhält man mit k den Teilpunkt T, so erhält man mit -k den vierten harmonischen Punkt S zu A, B und T.

g) Zeigen Sie: Teilen S und T die Punkte A, B harmonisch, so teilen auch A und B die Punkte S und T harmonisch.

Aufgabe 14

Zeigen Sie vektoriell: *Die Seitenmitten jedes beliebigen (auch nicht ebenen!) Vierecks bilden ein Parallelogramm. Der Mittelpunkt des Mittenparallelogramms ist gleichzeitig Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten.*

Aufgabe 15

Zeigen Sie für ein Tetraeder:

a) Die "Schwerlinien" (das sind die Verbindungen von einer Ecke zum Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) schneiden sich in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien im Verhältnis 3:1.

b) Die drei "Mittellinien" (das sind die Verbindungslinien von Gegenkantenmitten) halbieren sich gegenseitig.

Aufgabe 16

Für drei kollineare Punkte A, T, B ist das Teilverhältnis k = TV(ATB) definiert durch die Beziehung **AT** = k * **TB**.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** mit Hilfe der Ortsvektoren **a** und **b** aus.

b) Zeigen Sie: Je nachdem, ob T innerhalb oder außerhalb der Strecke AB liegt, ist k > 0 oder k < 0. Für T = A ist k = 0 und für T ---> B geht k ---> ∞.

c) Sind A(0; 0), T(t; 0) und B(1; 0) gegeben, so gilt k = t/(1 – t). Zeigen Sie dies. Zeichnen Sie ein Schaubild der Funktion t ---> k im Bereich -3 < t < +5 mit LE = 2cm.

d) Vertauscht man A mit B, so geht das Teilverhältnis über in den Kehrwert. Es gilt also: TV(ATB) * TV(BTA)=1. Zeigen Sie dies.

e) Zeigen Sie, dass bei zyklischer Vertauschung der drei Punkte das Teilverhältnis übergeht in den Wert –1/(1+k), also TV(TBA) = – 1/(1+k).

f) Berechnen Sie aus TV(ATB) = k nach d) und e) die Teilverhältnisse für sämtliche 6 Permutationen von A, B und T.

g) Nun sei **AT** = x * **AB**. (x ist also der *Anteil* von AT an AB). Drücken Sie k durch x und umgekehrt x durch k aus. Ergebnis: k = x/(1-x) und x = k/(1+k)

Aufgabe 17

Gegeben sind die Funktionen g: x ---> 1/x sowie f: x---> -1/(1+x).

a) Berechnen Sie sämtliche Verkettungen f, f^2, f^3, ...und g, g^2, g^3,...(Hinweis: f^4=f, also f^3=Id und g^2=Id).

b) Zeigen Sie, dass die sämtlichen Produkte der Form $f^n g^k$ eine Gruppe bilden. Stellen Sie die Gruppentafel auf.

c) Um welche bekannte Gruppe handelt es sich? (D_3 bzw. S_3).

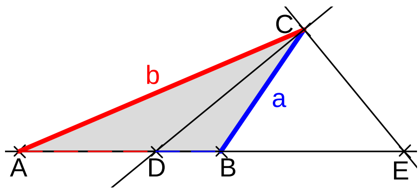
d) Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Aufgabe 8 d), e), f).

Hinweis: Teilverhältnisse sind vielfach anders als hier angegeben definiert. Bitte achten Sie auf Unterschiede in verschiedenen Literaturquellen! Gebräuchlich ist die Definition: TV(A, B; T) = k durch $\overrightarrow{AT} = k * \overrightarrow{BT}$. Das ändert gegenüber unserer Konvention das Vorzeichen, der Mittelpunkt hat dann das Teilverhältnis k= – 1.

Aufgabe 18

a) Ist a die Länge des Vektors **a**, so hat $\mathbf{a}^0$ = **a**/a die Länge 1 (normiert). Zeigen Sie: Die Vektoren $\mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0$ und $\mathbf{a}^0 - \mathbf{b}^0$ halbieren die Winkel zwischen den Vektoren **a** und **b**. Zeichnen Sie eine Figur. Hinweis: Symmetrie einer Raute.

b) Beweisen Sie den Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck: Die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite des Dreiecks im Verhältnis der anliegenden Seiten. Es gilt also AD : DB = AE : EB = a : b.



Aufgabe 19* (Zusatz; schwierig)

Ein vollständiges Vierseit besteht aus 4 Geraden einer Ebene, die sich in 6 Punkten schneiden. Verbindet man je zwei dieser Punkte, so erhält man 3 neue Geraden, die "Diagonalen" des vollständigen Vierseits.

Beweisen Sie, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auf einer geraden Linie liegen.

Aufgabe 20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung **A * x = y** mit gegebener Matrix **A** vom Typ (m, n) = (2, 3) und Vektoren **x** aus R^n bzw. **y** aus R^m kann man interpretieren als Abbildung f, die jedem Vektor **x** aus R^n einen Vektor **y** aus R^m zuordnet.

Die Lösungen von **A * x = 0** bzw. **A * x = b** ergeben dann die vollständigen Urbilder des Nullvektors (das ist der **Kern** der genannten Abbildung) bzw. des Vektors **b**.

a) Bestimmen Sie für die gegebene Matrix **A** die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{e}_2$ = (0; 1; 0) und $\mathbf{e}_3$ = (0; 0; 1) sowie der Vektoren **u** = (3; 1; 0) und **v** = (6; 2; 1).

b) Bestimmen Sie den Kern der durch **A** vermittelten Abbildung f, also die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems **A * x = 0**.

c) Bestimmen Sie die vollständigen Urbilder der Bildvektoren **b** = (7; 8) und **c** = (18; 20). Zeigen Sie, dass es sich jeweils um eine Nebenklasse des Kerns handelt.

d) Beweisen Sie, dass die obige Abbildung f **linear** ist, dass also gilt:

f(x + y) = f(x) + f(y) und **f(**k *** x) =** k *** f(x)**.

Was ist demnach das Bild des Vektors w(1; 1; 1)?

Aufgabe 21

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Kern sowie die Urbilder der Vektoren **b** = (1; 1; 2) und **c** = (1; 1; 1) bei der durch die Matrix **A** gegebenen linearen Abbildung in Abhängigkeit vom Parameter t.

b) Bestimmen Sie die Bilder der Einheitsvektoren bei der gegebenen Abbildung.

Ergebnisse: t = 1: Kern ist s * (-1; -1; 4); **b** besitzt kein Urbild; Urbild von **c** ist (1/4; 1/4; 0) + Kern.
t $\neq$ 1: Kern ist **0**; Urbilder eindeutig: 1/(4t-4) * (t - 2; t – 2; 4) bzw. (1/4; 1/4; 0).

Aufgabe 22

$$\begin{aligned} x + y - z &= b \\ x - ay - z &= 2a \\ 2x + y &= b+2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

Lassen sich reelle Zahlen a und b so bestimmen, dass das gegebene Gleichungssystem a) keine b) genau eine c) unendlich viele Lösungen besitzt?

Geben Sie eine vollständige Übersicht über alle möglichen Fälle und die zugehörigen Lösungen.

Ergebnisse: a = -1: nur lösbar falls b = - 2: (0; 0; 2) + s * (1;-2; -1).
a $\neq$ -1: eind. Lösung 1/(2a+2) * (a(b+4)+2; 2(b-2a); 2-ba)

Aufgabe 23

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= b \end{aligned}$$

Für welche reellen Werte a bzw. b hat das gegebene Gleichungssystem a) keine b) genau eine c) unendlich viele Lösungen ? Geben Sie eine vollständige Lösungsübersicht.

Ergebnisse: a = 0: eindeutig lösbar 1/11 * (b - 26 ; 48 - 12b ; 14 + 2b ; 4 - b)
a $\neq$ 0: a = 1/2: b = 4: Lösung einparametrig:(0; -4; 0; 0) + s * (-1; 2; 1; 0)
b $\neq$ 4: keine Lösung.

a $\neq$ 1/2: eind. Lösung: 1/(11*(2a-1)) * (26-10ab-4a-b; 12(b-4); 4a(4b-5)-2(b+7); (2a-1)(4-b)).

Hinweis: Alle Ergebnisangaben sind selbst nachprüfbar und daher ohne Gewähr.

Gegeben sei der **Körper (R, +, *)** der reellen Zahlen mit den Körpereigenschaften:

K1: (R, +) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0.
K2: (R\{0}, *****) ist eine komm. Gruppe mit Neutralelement 1.
K3: Es gilt das Distributivgesetz: a ***** (b + c) = a ***** b + a ***** c .

Ein **Vektorraum (V, #, •)** über dem Körper (R, +, *****) mit nichtleerer Menge V von Vektoren ist ein Gebilde mit folgenden Axiomen:

V1: **(V, #) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0 (Vektormodul)**

V2: **• ist eine Abbildung von R × V in V mit folgenden Eigenschaften (S-Multiplikation):**

S1:	r • **(**s • **v)** = **(**r ***** s**)** • **v**	**S2:**	**(**r + s**)** • **v** = (r • **v)** # **(**s • **v)**
S3:	r • **(v** # **w)** = **(**r • **v)** # **(**r • **w)**	**S4:**	1 • **v** = **v**

Aufgabe 24

a) Beweisen Sie das **Untergruppenkriterium**:
Eine nichtleere Teilmenge T einer Gruppe (G, *) ist bereits dann Untergruppe, wenn gilt:
U1: T ist abgeschlossen, d. h. mit a und b ist auch a* b in T.
U2: T enthält mit jedem Element a auch das Inverse a^{-1} zu a.

b) Zeigen Sie, dass für endliche Teilmengen T bereits die Forderung U1 allein genügt.

c) Beweisen Sie das **Untervektorraumkriterium**:
Eine nichtleere Teilmenge W eines reellen Vektorraums (V, #, •) ist bereits dann ein Untervektorraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
UVR1: W ist abgeschlossen bez. der Vektoraddition #.
UVR2: W ist abgeschlossen bez. der S-Multiplikation,
d. h. mit **v** aus W gilt auch r • **v** aus W für jede reelle Zahl r.

d) Beweisen Sie, dass für jeden Vektorraum gilt:

(1)	0 • **a** = **0**	für beliebige Vektoren **a**
(2)	r • **0** = **0**	für beliebige reelle Zahlen r
(3)	(– r) • **a** = – (r • **a**)	für beliebige reelle Zahlen r und Vektoren **a**
(4)	Aus r • **a** = **0**	folgt r = 0 oder **a** = **0** .

Aufgabe 25

Beweisen Sie folgende Sätze über homogene lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

a) Ist **x** ein Lösungsvektor, so auch r • **x** für beliebiges reelles r.

b) Sind **x** und **y** Lösungsvektoren, so auch **x # y** und sogar (r • **x) #** (s • **y**) für beliebige r, s.

c) Die Lösungsvektoren eines homogenen LGS bilden einen Vektorraum (24c) verwenden!).

Aufgabe 26

Eine Abbildung f eines Vektorraums V in einen Vektorraum W heißt **linear**, wenn gilt:

f(x # **y) = f(x)** # **f(y)** und **f(**r * **x) =** r * **f(x)** für beliebige Vektoren **x**, **y** und Zahlen r.

a) Zeigen Sie: f(**0**) = **0** f(-**x**) = - f(**x**)

b) Zeigen Sie: f((r * **a)** # (s * **b)**) = (r * f(**a**)) # (s * f(**b**)).
In Worten: Bild einer Linearkombination = Linearkombination der Bilder.

c) Zeigen Sie: Die Menge aller Vektoren **k** aus V, für die gilt f(**k**) = **0** bilden einen Untervektorraum U von V (24c) verwenden!). Dieser heißt der **Kern** von f.
Ist **k** ein Kernvektor so gilt: f(**x** # **k**) = f(**x**).

d) Gilt f(**x**) = f(**y**) so unterscheiden sich **x** und **y** nur durch einen Kernvektor, es gilt also **x - y = k** wobei **k** ein Kernvektor ist.

e) Die Klassen bildgleicher Elemente unter f sind genau die Nebenklassen des Kerns.

Aufgabe 27

a) Gegeben sind A(-3; 5) und B(3; -4). Bestimmen Sie die Teilpunkte für die Teilverhältnisse TV(ATB) = 0,5 bzw. TV(ASB) = - 0,75. Kontrollergebnisse: T(-1; 2), S(-21; 32).

b) Gegeben sind die kollinearen Punkte A(3; -5), B(-1; 0) und C(0,6; -2). Bestimmen Sie den vierten harmonischen Punkt D, so dass AB und CD harmonisch liegen, also TV(ACB) = – TV(ADB) gilt.
Zeigen Sie, dass dann auch gilt: TV(CAD) = – TV(CBD). Kontrollergebnis: D(-9; 10).

c) Gegeben A(1; 1,6) und T(5; 4). Gesucht B, so dass TV(ATB)=0,4.
Kontrollergebnis: B(15; 10).

d) Man teile die Strecke AB mit A(-9; 15; -2) und B(-12; -6; 4) in drei gleiche Teile.
Kontrollergebnis: P(-11; 1; 2), Q(-10; 8; 0).

Aufgabe 28

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(0; 0), B(7; 0) und C(4,5; 6) in einem kartesischen Koordinatensystem. Kontrollzeichnung führen!
Kontrollergebnisse: T(15/4; 0), R(168/29; 84/29), S(7/3; 28/9), J(4; 2).

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Teilpunkt T auf AB für das TV(ATB) = k = 15/13.

c) Zeigen Sie: T liegt auf der Winkelhalbierenden von c.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt R der Winkelhalbierenden von a mit BC.
In welchem Verhältnis v teilt R die Strecke BC?

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt J von AR mit CT.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von AC mit BJ. In welchem Verhältnis m = TV(CSA) teilt S die Strecke CA?

g) Zeigen Sie, dass BS Winkelhalbierende von b ist.

h) Bestätigen Sie am vorliegenden Beispiel folgende Sätze:

Satz von Ceva: Drei Ecktransversalen AR, BS und CT eines Dreiecks ABC sind genau dann kopunktal, wenn gilt: TV(ATB) * TV(BRC) * TV(CSA) = 1.

Satz von der Winkelhalbierenden: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Satz von der Inkreismitte: Die Winkelhalbierenden im Dreieck sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt ist die Inkreismitte.

i) In welchem Verhältnis teilt J die Strecken AR, BS und CT?

Aufgabe 29

Beweisen Sie folgende Sätze über **Lineare Abhängigkeit** von Vektoren:

a) Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, so ist sie sicher linear abhängig.

b) Ist eine Menge von mindestens zwei Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen Vektor in der Menge, der sich aus den übrigen linear kombinieren lässt.

c) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge von Vektoren ist linear abhängig.

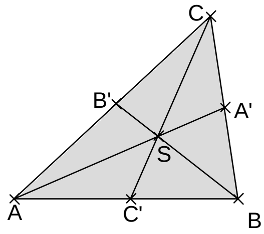
d) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ist linear unabhängig.

e) Ist **b** eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... ,$\mathbf{a}_n$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig.

f) Ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig, so lässt sich **b** linear aus den $\mathbf{a}_i$ kombinieren.

g) Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und **b** keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ ebenfalls linear unabhängig.

Aufgabe 30

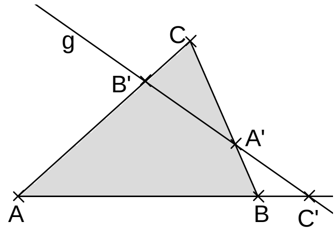


Beweisen Sie den **Satz von Ceva**:

*Sind AA', BB' und CC' kopunktale (!) Ecktransversalen im Dreieck ABC, so gilt: TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = 1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

Aufgabe 31



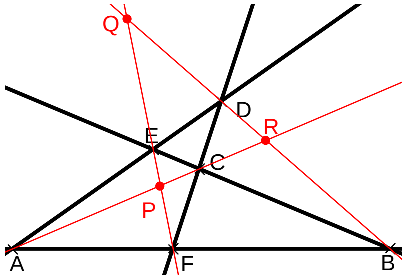
Beweisen Sie den **Satz von Menelaos**:

Sind A', B' und C' drei kollineare (!) Punkte auf den drei Seitengeraden des Dreiecks ABC, so gilt:

*TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = -1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

Aufgabe 32



Beweisen Sie den **Satz vom vollständigen Vierseit**:

Auf jeder Diagonalen werden die Ecken des Vierseits durch die beiden Diagonalpunkte harmonisch getrennt:

Also z. B. TV(APC) = – TV(ARC) usf.

Hinweis: Benutzen Sie Ceva und Menelaos zum Beweis.

Aufgabe 33

Das Fünfeck ABCDE mit A(7; 4; 0), B(3; 4; 0), C(3; 4; 2), D(5; 4; 4,5) und E(7; 4; 2) ist Grundfläche eines Prismas, dessen Kanten parallel zur y-Achse verlaufen. Die Ebene (E) enthält die Punkte A, B und G(5; 1; 4,5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Prismenkanten mit der Ebene (E).
Zeichnen Sie ein Schrägbild (a = 45°; k = 0,5). Deuten Sie die Figur als Bild einer Dachgaube.

Aufgabe 34

Die Gerade g enthält die Punkte A(2; 1; 3) und B(2; 0; 4), die Gerade h die Punkte C(2; 1; 7) und D(4; 0; 7). Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.
Welche Ebene (E) enthält die Gerade g und den Punkt P(8; 8; 5)?
Welche Gerade t durch P trifft sowohl die Gerade g als auch die Gerade h?
Ermitteln Sie die zugehörigen Schnittpunkte G und H.

Aufgabe 35

Die Ebene (E) geht durch die Punkte A(-5; 1; -2), B(-4; 3; -2) und C(-5; 3; -1).
Die Gerade g enthält die Punkte D(1; -3; 1) und E(3; -4; 4), h die Punkte F(2; -5; 3) und G(4; 3; 5) und k die Punkte H(-6; -3; -3) und K(-1; 3; -5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene (E) mit den Geraden g, h und k.

Aufgabe 36

Die Gerade g geht durch A(5; -10; 6) und B(5; -5; 4). Für a e R ist D_a(a + 3; 10; 2) gegeben.
Die Gerade h_a geht durch C(3; 0; -2) und D_a. Für welche a schneiden sich g und h_a, für welche a sind g und h_a parallel?
Zeigen Sie: Alle D_a liegen auf einer Gerade und alle Geraden h_a liegen in einer Ebene.

Aufgabe 37

Zeigen Sie für beliebige Vektorräume:

a) k * **a** = **0** gilt genau dann, wenn k = 0 oder **a** = **0**.

b) Beweisen Sie das Untervektorraumkriterium.

c) Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist ein Vektorraum.

d) In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jedes linear unabhängige System von n Vektoren eine Basis.

e) Sind U_1 und U_2 zwei Teilräume so ist die Vereinigung von U_1 und U_2 genau dann wieder ein Teilraum, wenn U_1 Teilmenge von U_2 oder U_2 Teilmenge von U_1 ist.

Aufgabe 38

Sind folgende Mengen lineare Teilräume des R^3?

a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$ b) $B = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \}$

Aufgabe 39

Kombinieren Sie **b** = (0; 4; -2) linear aus $\mathbf{a}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{a}_2$ = (1; 2; 0) und $\mathbf{a}_3$ = (0; 1; -1).

Ist $\mathbf{b}_1$ = (3; -1; 1) **bzw.** $\mathbf{b}_2$ = (-1; 1; 0) linear abhängig von $\mathbf{a}_1$ = (1; 1; 1) und $\mathbf{a}_2$ = (0; 2; 1)?

Aufgabe 40

Im R^3 sind folgende Mengen gegeben:

U_1 = {(1; 3; 0), (-2; 1; 2)}, U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 1,5)},

U_3 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)}, U_4 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 2), (8; 13; 6)}.

a) Welche dieser Mengen sind linear unabhängig, welche bilden eine Basis des R^3?

b) Bestimmen Sie jeweils den Rang und eine Basis der von den Mengen aufgespannten Räume.

c) Geben Sie ein System von n+1 Vektoren des K^n an, von denen je n linear unabhängig sind. K sei dabei ein beliebiger Körper.

Aufgabe 41

a) Zeigen Sie, dass U = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)} eine Basis des R^3 ist.

b) Ersetzen Sie nach dem Austauschsatz von Steinitz zwei Vektoren in U durch die Vektoren $\mathbf{b}_1$ = (1; 3; 0) und $\mathbf{b}_2$ = (-2; 1; 2).

Aufgabe 42

Stellen Sie den Vektor **b** = (1; 3; 0) des R^3 bezüglich der beiden Basissysteme U_1 und U_2 dar:
U_1 = {(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)} und U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)}.

Aufgabe 43

A = {(1; 3; -2; 4), (-1; -1; 5; -9), (2; 0; -13; 23), (1; 5; 1; -2)}
B = {(2; 3; -1; 0), (-4; 5; 0; 1), (6; -2; 2; -2), (-2; 8; 1; 3)}

a) Stellen Sie die Vektoren jeweils als Zeilenvektoren einer Matrix dar.

b) Berechnen Sie jeweils den Zeilenrang und eine Basis für den von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraum.

c) Berechnen Sie jeweils den Spaltenrang und eine Basis für den von den Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 44

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des von folgenden Vektoren aufgespannten Unterraumes des R^5: (1; 1; 0; 1; 1), (0; 0; 1; 1; 0), (0; 1; 0; 0; 0),.(1; 0; 0; 1; 1),.(1; 0; 1; 0; 1).

Aufgabe 45

Es sei f eine lineare Abbildung von V in W. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Das Bild des Nullvektors aus V ist der Nullvektor in W.

b) Das Bild einer la-Teilmenge von V ist eine la-Teilmenge von W.

c) Das Urbild einer lu-Teilmenge von W ist eine lu-Teilmenge von V.

d) Das Bild von V ist ein Unterraum von W.

e) Das Bild irgendeines Unterraumes von V ist ein Unterraum von W.

f) Das Urbild eines Unterraums von W ist stets ein Unterraum von V.

g) Die Dimension des Bildraums von V ist höchstens gleich der Dimension von V.

h) Der Kern von f ist ein Unterraum von V.

i) Das Urbild $f^{-1}(\mathbf{w})$ eines Vektors **w** aus W ist eine Nebenklasse des Kerns: M = **v** + Kern(f).

Aufgabe 46

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen über eine lineare Abbildung f: V--->W:

(4) f ist bijektiv (also injektiv und surjektiv).

(5) Rang f = dim V = dim W.

(6) Ist $\{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n \}$ eine Basis von V, so ist $\{ f(\mathbf{b}_1), f(\mathbf{b}_2), ..., f(\mathbf{b}_n) \}$ eine Basis von W.

Hinweis: In diesem Falle nennt man f einen **Vektorraumisomorphismus** und die Räume V und W sind isomorph.

Aufgabe 47

Gegeben sind die Punkte P(-1; 3), Q(1; -1) und R(1; 5) in einem Parallelkoordinatensystem. Führen Sie eine Kontrollzeichnung neben Ihrer Rechnung.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade PQ (Parameterdarstellung und Koordinatengleichung). Ermitteln Sie die Schnittpunkte X und Y von g mit den Koordinatenachsen. In welchem Verhältnis teilen X bzw. Y die Strecke PQ?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung von h = QR an. Beschreiben Sie die besondere Lage von h. Wie und in welchem Verhältnis teilt die x-Achse die Strecke QR?

c) Bestimmen Sie den Punkt T auf PR mit dem TV(PTR) = - 0,6. Ermitteln Sie den vierten harmonischen Teilpunkt U für die Strecke PR.

d) Eine Gerade k hat die Achsenabschnitte s = 2,5 auf der x-Achse und t = - 2,5 auf der y-Achse. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von k mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von k und zeigen Sie, daß k zu PR parallel ist.

e) Berechnen Sie Seitenmitten und Schwerpunkt des Dreiecks PQR. Bilden Sie Dreieck PQR durch Punktspiegelung am Schwerpunkt S ab auf Dreieck P'Q'R'. Zeigen Sie, dass S auch Schwerpunkt von Dreieck P'Q'R' ist.

f) Es sei r die Schrägspiegelung an der Gerade g in Richtung der Gerade k. Durch r geht die Gerade h in h^* über. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung, eine Koordinatengleichung und die Achsenabschnitte von h^*.

g) Die Gerade a habe folgende Eigenschaft: Schrägspiegelung an a in Richtung g bildet die x-Achse auf die y-Achse ab. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung für a.

Aufgabe 48

Gegeben sind die Ebene E...2x - 3y - 6z + 12 = 0 und die Gerade g... **x** = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1).

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden von E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen.
Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen.
(Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen).

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen. Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den v = - 2w gilt. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse TV(BAC), TV(CBA) und TV(ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r; s; t) auf P'(r'; s'; t') ab. Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist. Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

f) Gegeben ist die Gerade h... **x** = (6; - 6; 7) + l * (3; 2; 0).
Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Aufgabe 49 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A beschreibt eine lineare Abbildung z des R^4 in den R^3.

a) Zeigen Sie, dass { **a**, **b**, **c** } einen dreidimensionalen Unterraum U des R4 aufspannen.
Ermitteln Sie die Bilder von **a**, **b** und **c** sowie die Dimension und eine Basis von z(U).

b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von z(R4). Wie groß ist der Rang von z?
Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns von z. Bestätigen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

c) Berechnen Sie z-1(1; - 5; 2).

d) Zeigen Sie, dass keiner der Basisvektoren des R3 bei z ein Urbild im R4 besitzt.

Aufgabe 50 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} -t & -2 \\ 6 & 7-t \end{pmatrix}$

a) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^2 in sich. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist.
Hinweis: Benutzen Sie die einschlägigen Sätze.

b) Bestimmen Sie die **Eigenvektoren** der durch A vermittelten Abbildung, also die Vektoren **x** mit der Eigenschaft **x**' = A * **x** = t * **x**. (Hinweis: Dazu ist das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix A' nichttrivial zu lösen. Benützen Sie ein Computerprogramm.)
Ergebnisse: t = 4 ergibt (-1; 2) und t = 3 ergibt (-2; 3).

c) Wählen Sie nun die beiden in b) berechneten Eigenvektoren als Basis des R^2 und stellen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis auf.

d) Verfahren Sie mit den Matrizen B und C, die Abbildungen des R^3 in sich darstellen, gemäß a) bis c). Ergebnisse:
B: t = 2: (1; 0; 0), t = 4: (0; 0; 1), t = 1: (15; - 1,5 ; 1)
C: t = 18: (2; 1;0), t = 27: (0,5; 0; 1), t = 9: (0; 2; 1).

Aufgabe 51

Eine lineare Abbildung z: R^3 ----> R^4 ist durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren bestimmt: z($\mathbf{e}_1$) = (1; - 3; 2; 4), z($\mathbf{e}_2$) = (5; - 3; 0; 2), z($\mathbf{e}_3$) = (- 2; 0; 1; 1).

Bestimmen Sie den Kern, den Rang und den Defekt der Abbildung.

Aufgabe 52

a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{a}_1$ = (2; 1; -1), $\mathbf{a}_2$ = (1; 0; 3), $\mathbf{a}_3$ = (-1; 2; 1) bzw. durch $\mathbf{b}_1$ = (1; 1), $\mathbf{b}_2$ = (1; -1) je eine Basis des R^3 bzw. des R^2 gegeben ist.

b) A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt bezüglich der kanonischen Basen des R^3 und des R^2 eine lineare Abbildung z: R^3 ----> R^2.
Welche Matrix hat z bezüglich der Basen {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$} des R^3 und {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$} des R^2?
Welche Koordinaten hat der Bildvektor des Vektors (4; 1; 3) hinsichtlich der Basis {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$}?

Aufgabe 53

M = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ Die Matrix M beschreibt eine lineare Abbildung z: V ---> W.

a = (3; 2; 1; 1), **b** = (1; 0; -2; -3), **c** = (-2; 5; 5; 0) sind drei Vektoren aus V.

a) Bestimmen Sie den Rang von z und die Bilder von **a**, **b** und **c**.

b) Welche Dimension besitzt der von **a**, **b** und **c** aufgespannte Unterraum U und welche Dimension besitzt sein Bild z(U)?

Aufgabe 54

A = {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$} bzw. B = {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$} seien Basis des R^4 bzw. des R^3.

Durch z($\mathbf{a}_1$) = - $\mathbf{b}_1$ + 6$\mathbf{b}_2$ - 12$\mathbf{b}_3$ z($\mathbf{a}_2$) = 2$\mathbf{b}_1$ - $\mathbf{b}_2$ + 5$\mathbf{b}_3$
z($\mathbf{a}_3$) = 3$\mathbf{b}_1$ + 4$\mathbf{b}_2$ - 2$\mathbf{b}_3$ z($\mathbf{a}_4$) = 4$\mathbf{b}_1$ + 9$\mathbf{b}_2$ - 9$\mathbf{b}_3$

ist eine lineare Abbildung z: R^4 ----> R^3 bestimmt.

a) Ermitteln Sie die Bildvektoren zu **u** = (2; 3; 1; 1), **v** = (0; 1; -2; -3) und **w** = (5; -2; 5; 0). Berechnen Sie außerdem das Bild z(**t**) des Vektors **t** = **u** + 2**v** + **w**.

b) Geben Sie die Abbildungsgleichungen für z an. Warum kann z nicht injektiv sein?

c) Ermitteln Sie Rang und Kern der Abbildung z. Geben Sie eine Basis des Kerns an. Folgern Sie, dass z auch nicht surjektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Menge Y aller Urbilder von **y'** = -15$\mathbf{b}_1$ + 2$\mathbf{b}_2$ - 28$\mathbf{b}_3$ in R^4.
Zeigen Sie, dass es zu **z'** = 11$\mathbf{b}_1$ und damit auch zu $\mathbf{b}_1$ kein Urbild in R^4 gibt.

e) Es sei U der von **u**, **v** und **w** aus a) aufgespannte Unterraum des R^4. Ermitteln Sie die Dimensionen von U und von z(U). Was folgt hieraus über den Unterraum U $\cap$ (Kern z)? Geben Sie eine Basis von U $\cap$ (Kern z) an.

f) Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die zu U gehörenden Urbilder des Vektors **y'** aus d).

g) Ermitteln Sie eine Basis C = { $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$ } des R^4 und eine Basis D = { $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ } des R^3, so dass die lineare Abbildung z bezüglich dieser Basen durch eine Matrix der Gestalt

M = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Welche Werte nehmen a, b und c dabei an?

Aufgabe 55 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie A * B, B * A, C * D und D * C. (Kontrolle mit Computerprogramm!).

Aufgabe 56

Es sei M eine n-n-Matrix, **x** und **x'** Vektoren eines Vektorraumes K^n über einem Körper K.
Die Gleichung **x'** = M * **x** lässt zwei verschiedene Deutungen zu:

1. Der Vektor **x'** ist das Bild von **x** bei einer linearen Abbildung von K^n in sich.
   x und **x'** sind also *verschiedene Vektoren (i. Allg. bezüglich derselben Basis*).
2. Ein und derselbe Vektor wird bezüglich zweier verschiedener Basen A und B dargestellt durch die beiden Koordinatenvektoren **x** und **x'**.
   x und **x'** beschreiben also *denselben Vektor nur bezüglich verschiedener Basen.*
   Die Gleichung **x'** = M * **x** beschreibt also eine *Basistransformation*.

Gegeben sind $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_A$ und $\mathbf{w'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$

a) **x'** = M * **x** beschreibt den Übergang von der kanonischen Basis A zu einer Basis B im R^3.
Stellen Sie den Vektor **v** (gegeben in der kanonischen Basis A) in der neuen Basis B dar.
Stellen Sie ebenso die kanonischen Basisvektoren in der neuen Basis B dar.
Welche Bedeutung haben die Spalten von M?

b) Welche Koordinaten bezüglich der alten Basis A haben die Basisvektoren $\mathbf{b}_1 = (1; 0; 0)_B$, $\mathbf{b}_2 = (0; 1; 0)_B$ und $\mathbf{b}_3 = (0; 0; 1)_B$ der neuen Basis B?

c) Zeigen Sie, dass N die zu M inverse Matrix ist. Daher gilt: **x** = N * **x'**.
Vergleichen Sie die Spalten von N mit den Ergebnissen in b). Welche Koordinaten bezüglich A hat der Vektor $\mathbf{w'} = (5; 4; 3)_B$?

d) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{s} = (2; 0; 1)_A$ dar bezüglich B, indem Sie die Darstellung direkt berechnen. Vergleichen Sie mit M * s.

e) Welche Bedingung muss eine n-n-Matrix erfüllen, damit sie eine Basistransformation beschreiben kann? (Hinweis: Die ursprünglichen Basisvektoren müssen selbstverständlich auch in der neuen Basis lu sein!). Welche der folgenden Matrizen beschreiben Basistransformationen? Bestimmen Sie dazu jeweils den Spaltenrang.

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

f) Begründen Sie nun den folgenden Satz:
Die m-n-Matrizen D und E beschreiben genau dann dieselbe lineare Abbildung des K^n in den K^m, wenn es reguläre (= invertierbare) Matrizen S (m-m-Matrix) und T (n-n-Matrix) gibt, so dass E = S * D * T ist bzw. $D = S^{-1} * E * T^{-1}$ gilt.

g) Wenden Sie den Satz aus f) auf folgendes Beispiel an und berechnen Sie die Matrix E.
$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ S = L aus e) und T = N aus a). Von welcher einfachen Art ist also die durch D vermittelte Abbildung?

Aufgabe 57

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Geraden im R² ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Dreiecksecken: g ... x + 3y = 5 h ... 3x + 2y = 8 i ... 2x - 2y = - 6.
Ergebnis: P(2; 1), Q(-1; 2), R(2/5; 17/5).

Aufgabe 58

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der folgenden vier Ebenen des R³. Zeigen Sie, dass die Ebenen einem Ebenenbüschel (alle Ebenen durch eine gemeinsame Gerade als Achse) angehören und bestimmen Sie die Büschelgerade.
E ... x + 4y - 2z = 3 F ... 3x + 2y = 1 G ... 4x + y + z = 0 H ... 3x - 8y + 6z = - 7
Ergebnis: Achse a... **x** = (-1/5; 4/5; 0) + t * (-2; 3; 5)

Aufgabe 59

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 60

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem mit der untenstehenden Koeffizientenmatrix A. Ergebnis: **x** = t * (1; -2; 3; 2).

b) Lösen Sie die inhomogenen linearen Gleichungssysteme mit den untenstehenden erweiterten Matrizen B und C.
Ergebnisse: B...**x** = (2; -3; 5). C...**x** = (-3; 0; -3; 0) + r * (-3; 1; 0; 0) + t * (5; 0; 2; 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right)$$

Aufgabe 61 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

Die vorstehende Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^4 in sich und zwar bezüglich der kanonischen Basis.

a) Bestimmen Sie den Bildraum der linearen Abbildung sowie eine zugehörige Basis.

b) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung sowie die Urbilder der folgenden Vektoren:
a = (1; 1; 1; 1); **b** = (4; -14; -8; 8); **c** = (1; 0; 0; 0); **d** = (2; 2; -22; -14).

c) Bestätigen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 62

Im R^4 wird durch die Vektoren $\mathbf{a}_1$ = (2; -1; 3; 5), $\mathbf{a}_2$ = (5; -2; 5; 8), $\mathbf{a}_3$ = (-5; 3; -8; -13) ein Unterraum U und durch $\mathbf{b}_1$ = (4; 1; -2; -4), $\mathbf{b}_2$ = (-7; 2; -6; -9), $\mathbf{b}_3$ = (3; 0; 0; -1) ein Unterraum V aufgespannt. Berechnen Sie eine Basis des Durchschnitts von U und V.

Lösungen zu SS_91_Lin_Alg_Uebungen

Blatt 1

Aufgabe 1:
Siehe SS_90_Blatt_9_Aufgabe_40

Aufgabe 2:
Siehe SS_90_Blatt_10_Aufgabe_42

Aufgabe 3:
Siehe SS_90_Blatt_10_Aufgabe_43

Aufgabe 4:
Siehe SS_90_Blatt_10_Aufgabe_44

Aufgabe 5:
Siehe SS_90_Blatt_10_Aufgabe_45

Aufgabe 6:
Siehe SS_90_Blatt_11_Aufgabe_49

Aufgabe 3:

Blatt 2

Aufgabe 7:
Siehe SS_90_Blatt_11_Aufgabe_48

Aufgabe 8:

```
> At:= matrix(3,3,[1,1,-1,2,3,2,1,2,3]);
```

$$At := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & t \\ 1 & t & 3 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(At);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2+t \\ 0 & 0 & 6-t-t^2 \end{bmatrix}$$

Für t = 2 und t = -3 ist die Matrix At demnach singulär.

```
>  b:=vector(3,[1,3,2]);
```

$$b := [1, 3, 2]$$

```
> linsolve(At,b);
```

$$\left[1, \frac{1}{t+3}, \frac{1}{t+3}\right]$$

```
> A2:=matrix(3,3,[1,1,-1,2,3,2,1,2,3]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A2,b);
```

$$[5\_t_1, 1 - 4\_t_1, \_t_1]$$

```
> A3:=matrix(3,3,[1,1,-1,2,3,-3,1,-3,3]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A3,b);
```

Füt t = -3 ist also die Gleichung unlösbar.

Man erkennt dass im Allgemeinfall und für t = -3 keine Lösung mit x3 = 0 existiert, sondrn nur im Fall t = 2. Dann hat man (5; 1; 0).

Die Lösungen L0 und L1 erkennt man am Allgemeinfall. Der ist jeweils eindeutig, d. h. die homogene Gleichung nur trivial lösbar.

Die Lösung L2 erkennt man am Fall für A2. Dort ist die homogene Lösung einparametrig r * (5; -4; 1).

Man hat also folgende Fälle: t = -3: keine Lösung; t = 2: einparametrige Lösung; sonst: eindeutig.

Blatt 3

Siehe SS_90_Blatt_1

Blatt 4

Siehe SS_90_Blatt_2

Blatt 5

Aufgabe 20:

```
> A:=matrix(2,3,[2,1,4,2,2,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Spaltenvektoren von A sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren.

```
> u:=vector(3,[3,1,0]); v:=vector(3,[6,2,1]);
```

$$u := [3, 1, 0]$$

$$v := [6, 2, 1]$$

```
> multiply(A,u); multiply(A,v);
```

$$[7, 8]$$

$$[18, 20]$$

```
> kernel(A);
```

$$\{[-2, 0, 1]\}$$

Die Urbilder von b bzw. c sind die Kernnebenklassen von u bzw. v.

Die Abbildung ist linear, weil für die Matrizenmultiplikation das Distributivgesetz gilt (Matrizenring).

Das Bild des Vektors (1; 1; 1) erhält man durch die Zeilensummen von A: (7; 8).

Blatt 6

Alle Aufgaben enthalten einfache Beweise zum Nachrechnen und Anwenden der Gesetze eines Körpers bzw. eines Vektorraumes über einem Körper und von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Blatt 7

Siehe SS_90_Blatt_3

Blatt 8

Siehe SS_90_Blatt_4

Blatt 9

Siehe SS_90_Blatt_5

Blatt 10

Siehe SS_90_Blatt_6

Blatt 11

Siehe SS_90_Blatt_7

Blatt 12

Siehe SS_90_Blatt_8

Blatt 13

Siehe SS_90_Blatt_9

Blatt 14

Siehe SS_90_Blatt_10

Aufgabe 1

Durch die Gleichung **x` = A * x + c** mit Matrix **A** = $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ und Vektor **c** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

wird eine affine Punktabbildung des R^2 in sich definiert.

a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte A(1; 0); B(0; 1); C(1; 1); D(0; 0); E(-5; 0). Fertigen Sie eine Zeichnung an und tragen Sie Ihre Ergebnisse ein.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung.

c) Die zur obigen Punktabbildung gehörige Vektorabbildung wird durch die homogene Transformation **x` = A * x** beschrieben. Berechnen Sie den Kern der Abbildung.

d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren dieser Vektorabbildung. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis in b). Welche geometrischen Schlüsse können Sie über die Art der Abbildung aus ihren Ergebnissen ziehen?

e) Bestimmen Sie eine Normalform der angegebenen Punktabbildung durch Wahl eines problemangepassten Koordinatensystems. Gehen Sie dazu in zwei Schritten vor:
   1. Wahl eines Fixpunkts als neuen Koordinatenursprung.
   2. Wahl der erhaltenen Eigenvektoren als neue Basisvektoren.

f) Von welcher einfachen Form wird die Abbildungsmatrix im neuen Koordinatensystem?

Aufgabe 2

A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ **a** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A beschreibt eine lineare Abbildung z des R^4 in den R^3.

a) Ermitteln Sie die Bilder von **a**, **b** und **c** sowie die Dimension und eine Basis von z(U).

b) Bestimmen Sie den Kern der durch A vermittelten Abbildung.

c) Berechnen Sie das Urbild des Vektors (1; -5; 2).

d) Zeigen Sie, dass keiner der Basisvektoren des R^3 bei z ein Urbild im R^4 besitzt.

e) Warum ist die Frage nach Eigenvektoren in diesem Fall nicht sinnvoll?

Aufgabe 3

A = $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **C** = $\begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}$ **A'** = $\begin{pmatrix} -t & -2 \\ 6 & 7-t \end{pmatrix}$

a) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^2 in sich. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist. Hinweis: Benutzen Sie die einschlägigen Sätze.

b) Bestimmen Sie die **Eigenvektoren** der durch A vermittelten Abbildung, also die Vektoren **x** mit der Eigenschaft **x**' = A * **x** = t * **x**. (Hinweis: Dazu ist das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix A' nichttrivial zu lösen. Benützen Sie ein Computerprogramm.)

c) Ergebnisse: t = 4 ergibt (-1; 2) und t = 3 ergibt (-2; 3).

d) Wählen Sie nun die beiden in b) berechneten Eigenvektoren als Basis des R^2 und stellen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis auf.

e) Verfahren Sie mit den Matrizen B und C, die Abbildungen des R^3 in sich darstellen, gemäß a) bis c).

f) Ergebnisse: B: t = 2: (1; 0; 0), t = 4: (0; 0; 1), t = 1: (15; - 1,5 ; 1)
   C: t = 18: (2; 1;0), t = 27: (0,5; 0; 1), t = 9: (0; 2; 1).

Aufgabe 4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie A * B, B * A, C * D und D * C. (Kontrolle mit Computerprogramm!).

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Geraden im R^2 ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Dreiecksecken: g ... x + 3y = 5 h ... 3x + 2y = 8 i ... 2x - 2y = - 6.

Ergebnis: P(2; 1), Q(-1; 2), R(2/5; 17/5).

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der folgenden vier Ebenen des R^3. Zeigen Sie, dass die Ebenen einem Ebenenbüschel (alle Ebenen durch eine gemeinsame Gerade als Achse) angehören und bestimmen Sie die Büschelgerade.

E ... x + 4y - 2z = 3 F ... 3x + 2y = 1 G ... 4x + y + z = 0 H ... 3x - 8y + 6z = - 7

Ergebnis: Achse a... **x** = (-1/5; 4/5; 0) + t * (-2; 3; 5)

Aufgabe 7

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem mit der untenstehenden Koeffizientenmatrix A. Ergebnis: **x** = t * (1; -2; 3; 2).

b) Lösen Sie die inhomogenen linearen Gleichungssysteme mit den untenstehenden erweiterten Matrizen B und C.
Ergebnisse: B...**x** = (2; -3; 5). C...**x** = (-3; 0; -3; 0) + r * (-3; 1; 0; 0) + t * (5; 0; 2; 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right)$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die drei linearen Gleichungssysteme (I), (II) und (III) mit derselben Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{array}{rccc} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 & =1 & =1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 & =1 & =1 \\ 4x_2 + tx_3 & = 0 & =2 & =1 \\ & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \end{array}$$

a) Lösen Sie die drei Gleichungssysteme durch elementare Umformungen in einem Arbeitsgang. Ermitteln Sie die Lösungsmenge von (I) in Abhängigkeit von t.

b) Für welche t besitzen (II) bzw. (III) Lösungen, für welche sogar eindeutige? Für welche t sind (II) bzw. (III) unlösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösungsmengen von (II) und (III) in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 10

	(I)	(II)
$2x_1 - 3x_2 + 5x_3$	$= t+3$	$= t-3$
$10x_1 + 4x_2 - 13x_3$	$= -4$	$= 4$
$14x_1 - 2x_2 + (t-5)x_3$	$= -2$	$= 2$

a) Formen Sie die Koeffizientenmatrix und beide rechte Spalten I und II in einem Arbeitsgang in Dreiecksform (Staffelform) um. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der beiden Systeme für $t = 0$.

c) Ermitteln Sie alle Lösungen der beiden Systeme, für welche $x_3 = 0$ ist.

d) Für welchen Wert t_1 von t besitzt das homogene System einen eindimensionalen Lösungsraum? Bestimmen Sie diesen Lösungsraum.
Beschreiben Sie den Lösungsraum des homogenen Systems für $t \neq t_1$.

e) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Wert t_2 von t, für den das System (I) keine Lösung besitzt.
Geben Sie t_2 an. Wie viele Lösungen besitzt das System (I) im Falle $t \neq t_2$?

f) Bestimmen Sie für $t = 2$ die Lösungsmenge des Systems (II).
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von (II) für $t \neq 2$.

Aufgabe 11

Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem (*) mit dem reellen Parameter t:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + tz &= 3 \\ x + ty + 3z &= 2 \end{aligned}$$

.

Es sei $\mathbf{L}_t$ die Lösungsmenge dieses inhomogenen Gleichungssystems und $\mathbf{H}_t$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

a) Ermitteln Sie die Lösungsmengen $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ zu den Parametern $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$.
Was folgt hieraus jeweils für die Lösungsmengen $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$?

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte t^* von t, für welche das *homogene* System zu (*) nicht nur die triviale Lösung besitzt.
Bestimmen Sie die zu diesen Werten t^* gehörenden Lösungsmengen $\mathbf{H}_{t^*}$.

c) Für welche Werte t besitzt das gegebene *inhomogene* Gleichungssystem (*)
(1) genau eine Lösung,
(2) mehr als eine Lösung,
(3) keine Lösung ?

Zur Begründung können bisherige Resultate herangezogen werden.

Aufgabe 12

Gegeben sind zwei Vektoren **a** und **b**.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren **a** + **b**, **b** + **a**, **a** - **b**, **b** - **a**.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren 2**a** + 3**b**, 2**a** - 3**b**, 3**b** + 2**a**, 3**b** - 2**a**.

c) Bestimmen Sie die Vektoren aus a) und b) in Koordinaten mit **a**=(a_1, a_2) und **b**=(b_1, b_2).

Aufgabe 13

Beweisen Sie vektoriell den Satz von der Mittelparallelen im Dreieck:
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Aufgabe 14

Ein Parallelogramm OACB wird durch die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ = **a** und $\overrightarrow{OB}$ = **b** aufgespannt.
M_1 bis M_4 sind die Mitten der Seiten OA, AC, CB, BO. M ist Schnittpunkt der Diagonalen.

a) Drücken Sie die Vektoren AB, OC und OM_i durch **a** und **b** aus.

b) Beweisen Sie, dass M beide Diagonalen halbiert.

c) Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte von OM_2 und OM_3 mit der Diagonale AB diese in drei gleiche Teile teilen.

Aufgabe 15

Beweisen Sie vektoriell den Satz von den Seitenhalbierenden im Dreieck:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

Aufgabe 16

Eine Strecke AB ist durch die Ortsvektoren **a** und **b** ihrer Endpunkte A und B gegeben.
T ist ein Punkt der Strecke AB und teilt diese im Verhältnis x : y.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** = $\overrightarrow{OT}$ durch **a** und **b** aus.

b) Ersetzen Sie x : y durch k.

c) Zeichnen Sie für k = 1/2, 3/4, 1, 2, 4, -4, -2, -3/2, -5/4, -1/4, -1/2, -3/4.

d) Rechnen Sie in Koordinaten mit A(0; 0) und B(6; 0).

e) Wie ändert sich k, wenn sich T von rechts bzw. von links an A bzw. an B annähert?

f) Zeigen Sie: Erhält man mit k den Teilpunkt T, so erhält man mit -k den vierten harmonischen Punkt S zu A, B und T.

g) Zeigen Sie: Teilen S und T die Punkte A, B harmonisch, so teilen auch A und B die Punkte S und T harmonisch.

Aufgabe 17

Zeigen Sie vektoriell: *Die Seitenmitten jedes beliebigen (auch nicht ebenen !) Vierecks bilden ein Parallelogramm. Der Mittelpunkt des Mittenparallelogramms ist gleichzeitig Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten.*

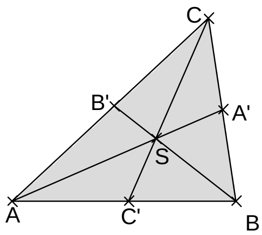
Aufgabe 18

Zeigen Sie für ein Tetraeder:

a) Die "Schwerlinien" (das sind die Verbindungen von einer Ecke zum Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) schneiden sich in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien im Verhältnis 3:1.

b) Die drei "Mittellinien" (das sind die Verbindungslinien von Gegenkantenmitten) halbieren sich gegenseitig.

Aufgabe 19

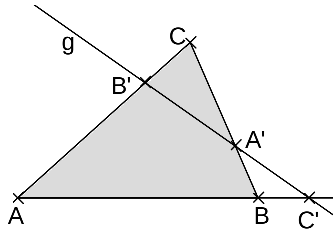


Beweisen Sie den **Satz von Ceva**:

*Sind AA', BB' und CC' kopunktale (!) Ecktransversalen im Dreieck ABC, so gilt: TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = 1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

Aufgabe 20



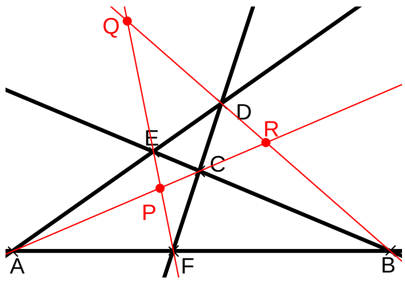
Beweisen Sie den **Satz von Menelaos**:

Sind A', B' und C' drei kollineare (!) Punkte auf den drei Seitengeraden des Dreiecks ABC, so gilt:

*TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = -1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?

Aufgabe 21



Beweisen Sie den **Satz vom vollständigen Vierseit**:

Auf jeder Diagonalen werden die Ecken des Vierseits durch die beiden Diagonalpunkte harmonisch getrennt:

Also z. B. TV(APC) = – TV(ARC) usf.

Hinweis: Benutzen Sie Ceva und Menelaos zum Beweis.

Aufgabe 22

Das Fünfeck ABCDE mit A(7; 4; 0), B(3; 4; 0), C(3; 4; 2), D(5; 4; 4,5) und E(7; 4; 2) ist Grundfläche eines Prismas, dessen Kanten parallel zur y-Achse verlaufen. Die Ebene (E) enthält die Punkte A, B und G(5; 1; 4,5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Prismenkanten mit der Ebene (E).
Zeichnen Sie ein Schrägbild (a = 45°; k = 0,5). Deuten Sie die Figur als Bild einer Dachgaube.

Aufgabe 23

Die Gerade g enthält die Punkte A(2; 1; 3) und B(2; 0; 4), die Gerade h die Punkte C(2; 1; 7) und D(4; 0; 7). Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.
Welche Ebene (E) enthält die Gerade g und den Punkt P(8; 8; 5)?
Welche Gerade t durch P trifft sowohl die Gerade g als auch die Gerade h?
Ermitteln Sie die zugehörigen Schnittpunkte G und H.

Aufgabe 24

Die Ebene (E) geht durch die Punkte A(-5; 1; -2), B(-4; 3; -2) und C(-5; 3; -1).
Die Gerade g enthält die Punkte D(1; -3; 1) und E(3; -4; 4), h die Punkte F(2; -5; 3) und G(4; 3; 5) und k die Punkte H(-6; -3; -3) und K(-1; 3; -5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene (E) mit den Geraden g, h und k.

Aufgabe 25

Die Gerade g geht durch A(5; -10; 6) und B(5; -5; 4). Für a e R ist D_a(a + 3; 10; 2) gegeben.
Die Gerade h_a geht durch C(3; 0; -2) und D_a. Für welche a schneiden sich g und h_a, für welche a sind g und h_a parallel?
Zeigen Sie: Alle D_a liegen auf einer Gerade und alle Geraden h_a liegen in einer Ebene.

Aufgabe 26

a) Gegeben sind A(-3; 5) und B(3; -4). Bestimmen Sie die Teilpunkte für die Teilverhältnisse TV(ATB) = 0,5 bzw. TV(ASB) = - 0,75. Kontrollergebnisse: T(-1; 2), S(-21; 32).

b) Gegeben sind die kollinearen Punkte A(3; -5), B(-1; 0) und C(0,6; -2). Bestimmen Sie den vierten harmonischen Punkt D, so dass AB und CD harmonisch liegen, also TV(ACB) = – TV(ADB) gilt.
Zeigen Sie, dass dann auch gilt: TV(CAD) = – TV(CBD). Kontrollergebnis: D(-9; 10).

c) Gegeben A(1; 1,6) und T(5; 4). Gesucht B, so dass TV(ATB)=0,4.
Kontrollergebnis: B(15; 10).

d) Man teile die Strecke AB mit A(-9; 15; -2) und B(-12; -6; 4) in drei gleiche Teile.
Kontrollergebnis: P(-11; 1; 2), Q(-10; 8; 0).

Aufgabe 27

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(0; 0), B(7; 0) und C(4,5; 6) in einem kartesischen Koordinatensystem. Kontrollzeichnung führen!
Kontrollergebnisse: T(15/4; 0), R(168/29; 84/29), S(7/3; 28/9), J(4; 2).

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Teilpunkt T auf AB für das TV(ATB) = k = 15/13.

c) Zeigen Sie: T liegt auf der Winkelhalbierenden von c.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt R der Winkelhalbierenden von a mit BC.
In welchem Verhältnis v teilt R die Strecke BC?

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt J von AR mit CT.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von AC mit BJ. In welchem Verhältnis m = TV(CSA) teilt S die Strecke CA?

g) Zeigen Sie, dass BS Winkelhalbierende von b ist.

h) Bestätigen Sie am vorliegenden Beispiel folgende Sätze:

i) *Satz von Ceva:* Drei Ecktransversalen AR, BS und CT eines Dreiecks ABC sind genau dann kopunktal, wenn gilt: TV(ATB) * TV(BRC) * TV(CSA) = 1.

j) *Satz von der Winkelhalbierenden:* Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

k) *Satz von der Inkreismitte:* Die Winkelhalbierenden im Dreieck sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt ist die Inkreismitte.

l) In welchem Verhältnis teilt J die Strecken AR, BS und CT?
Kontrollergebnisse: T(15/4; 0), R(168/29; 84/29), S(7/3; 28/9), J(4; 2).

Aufgabe 28

Beweisen Sie folgende Sätze über **Lineare Abhängigkeit** von Vektoren:

a) Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, so ist sie sicher linear abhängig.

b) Ist eine Menge von mindestens zwei Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen Vektor in der Menge, der sich aus den übrigen linear kombinieren lässt.

c) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge von Vektoren ist linear abhängig.

d) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ist linear unabhängig.

e) Ist **b** eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... ,$\mathbf{a}_n$, so ist die Menge {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... ,$\mathbf{a}_n$, **b**} linear abhängig.

f) Ist die Menge {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_n$} linear unabhängig und {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, **b**} linear abhängig, so lässt sich **b** linear aus den $\mathbf{a}_i$ kombinieren.

g) Ist {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$} linear unabhängig und **b** keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so ist die Menge {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, **b**} ebenfalls linear unabhängig.

Aufgabe 29

Gegeben sind die Punkte P(-1; 3), Q(1; -1) und R(1; 5) in einem Parallelkoordinatensystem. Führen Sie eine Kontrollzeichnung neben Ihrer Rechnung.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade PQ (Parameterdarstellung und Koordinatengleichung). Ermitteln Sie die Schnittpunkte X und Y von g mit den Koordinatenachsen. In welchem Verhältnis teilen X bzw. Y die Strecke PQ?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung von h = QR an. Beschreiben Sie die besondere Lage von h. Wie und in welchem Verhältnis teilt die x-Achse die Strecke QR?

c) Bestimmen Sie den Punkt T auf PR mit dem TV(PTR) = - 0,6. Ermitteln Sie den vierten harmonischen Teilpunkt U für die Strecke PR.

d) Eine Gerade k hat die Achsenabschnitte s = 2,5 auf der x-Achse und t = - 2,5 auf der y-Achse. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von k mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von k und zeigen Sie, daß k zu PR parallel ist.

e) Berechnen Sie Seitenmitten und Schwerpunkt des Dreiecks PQR. Bilden Sie Dreieck PQR durch Punktspiegelung am Schwerpunkt S ab auf Dreieck P'Q'R'. Zeigen Sie, dass S auch Schwerpunkt von Dreieck P'Q'R' ist.

f) Es sei r die Schrägspiegelung an der Gerade g in Richtung der Gerade k. Durch r geht die Gerade h in h^* über. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung, eine Koordinatengleichung und die Achsenabschnitte von h^*.

g) Die Gerade a habe folgende Eigenschaft: Schrägspiegelung an a in Richtung g bildet die x-Achse auf die y-Achse ab. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung für a.

Aufgabe 30

Für drei kollineare Punkte A, T, B ist das Teilverhältnis k = TV(ATB) definiert durch die Beziehung **AT** = k * **TB**.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** mit Hilfe der Ortsvektoren **a** und **b** aus.

b) Zeigen Sie: Je nachdem, ob T innerhalb oder außerhalb der Strecke AB liegt, ist k > 0 oder k < 0. Für T = A ist k = 0 und für T ---> B geht k ---> $\propto$.

c) Sind A(0; 0), T(t; 0) und B(1; 0) gegeben, so gilt k = t/(1 – t). Zeigen Sie dies. Zeichnen Sie ein Schaubild der Funktion t ---> k im Bereich -3 < t < +5 mit LE = 2cm.

d) Vertauscht man A mit B, so geht das Teilverhältnis über in den Kehrwert. Es gilt also: TV(ATB) * TV(BTA)=1. Zeigen Sie dies.

e) Zeigen Sie, dass bei zyklischer Vertauschung der drei Punkte das Teilverhältnis übergeht in den Wert –1/(1+k), also TV(TBA) = – 1/(1+k).

f) Berechnen Sie aus TV(ATB) = k nach d) und e) die Teilverhältnisse für sämtliche 6 Permutationen von A, B und T.

g) Nun sei **AT** = x * **AB**. (x ist also der *Anteil* von AT an AB). Drücken Sie k durch x und umgekehrt x durch k aus. Ergebnis: k = x/(1-x) und x = k/(1+k)

Aufgabe 31* (schwierige Aufgabe)

Ein vollständiges Vierseit besteht aus 4 Geraden einer Ebene, die sich in 6 Punkten schneiden. Verbindet man je zwei dieser Punkte, so erhält man 3 neue Geraden, die so genannten "Diagonalen" des vollständigen Vierseits.

Beweisen Sie, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auf einer geraden Linie liegen.

Gegeben sei der **Körper (R, +, *)** der reellen Zahlen mit den Körpereigenschaften:

- **K1**: (R, +) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0.
- **K2**: (R\{0}, *) ist eine komm. Gruppe mit Neutralelement 1.
- **K3**: Es gilt das Distributivgesetz: a * (b + c) = a * b + a * c .

Ein **Vektorraum (V, #, •)** über dem Körper (R, +, *) mit nichtleerer Menge V von Vektoren ist ein Gebilde mit folgenden Axiomen:

V1: **(V, #) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0 (Vektormodul)**

V2: **• ist eine Abbildung von R × V in V mit folgenden Eigenschaften (S-Multiplikation):**

S1:	r • (s • **v**) = (r * s) • **v**	**S2:**	(r + s) • **v** = (r • **v**) # (s • **v**)
S3:	r • (**v** # **w**) = (r • **v**) # (r • **w**)	**S4:**	1 • **v** = **v**

Aufgabe 32

a) Beweisen Sie das **Untergruppenkriterium**:
Eine nichtleere Teilmenge T einer Gruppe (G, *) ist bereits dann Untergruppe, wenn gilt:
U1: T ist abgeschlossen, d. h. mit a und b ist auch a* b in T.
U2: T enthält mit jedem Element a auch das Inverse a^{-1} zu a.

b) Zeigen Sie, dass für endliche Teilmengen T bereits die Forderung U1 allein genügt.

c) Beweisen Sie das **Untervektorraumkriterium**:
Eine nichtleere Teilmenge W eines reellen Vektorraums (V, #, •) ist bereits dann ein Untervektorraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
UVR1: W ist abgeschlossen bez. der Vektoraddition #.
UVR2: W ist abgeschlossen bez. der S-Multiplikation,
d. h. mit **v** aus W gilt auch r • **v** aus W für jede reelle Zahl r.

d) Beweisen Sie, dass für jeden Vektorraum gilt:
(1) 0 • **a** = **0** für beliebige Vektoren **a**
(2) r • **0** = **0** für beliebige reelle Zahlen r
(3) (– r) • **a** = – (r • **a**) für beliebige reelle Zahlen r und Vektoren **a**
(4) Aus r • **a** = **0** folgt r = 0 oder **a** = **0** .

Aufgabe 33

Beweisen Sie folgende Sätze über homogene lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

a) Ist **x** ein Lösungsvektor, so auch r • **x** für beliebiges reelles r.

b) Sind **x** und **y** Lösungsvektoren, so auch **x # y** und sogar (r • **x**) # (s • **y**) für beliebige r, s.

c) Die Lösungsvektoren eines homogenen LGS bilden einen Vektorraum (24c) verwenden!).

Aufgabe 34

Eine Abbildung f eines Vektorraums V in einen Vektorraum W heißt **linear**, wenn gilt:

f(x # y) = f(x) # f(y) und **f(**r * **x) =** r * **f(x)** für beliebige Vektoren **x**, **y** und Zahlen r.

a) Zeigen Sie: f(**0**) = **0** f(-**x**) = - f(**x**)

b) Zeigen Sie: f((r * **a**) # (s * **b**)) = (r * f(**a**)) # (s * f(**b**)).
In Worten: Bild einer Linearkombination = Linearkombination der Bilder.

c) Zeigen Sie: Die Menge aller Vektoren **k** aus V, für die gilt f(**k**) = **0** bilden einen Untervektorraum U von V (24c) verwenden!). Dieser heißt der **Kern** von f.
Ist **k** ein Kernvektor so gilt: f(**x** # **k**) = f(**x**).

d) Gilt f(**x**) = f(**y**) so unterscheiden sich **x** und **y** nur durch einen Kernvektor, es gilt also **x - y = k** wobei **k** ein Kernvektor ist.

e) Die Klassen bildgleicher Elemente unter f sind genau die Nebenklassen des Kerns.

Aufgabe 35

Zeigen Sie für beliebige Vektorräume:

a) k * **a** = **0** gilt genau dann, wenn k = 0 oder **a** = **0**.

b) Beweisen Sie das Untervektorraumkriterium.

c) Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist ein Vektorraum.

d) In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jedes linear unabhängige System von n Vektoren eine Basis.

e) Sind U_1 und U_2 zwei Teilräume so ist die Vereinigung von U_1 und U_2 genau dann wieder ein Teilraum, wenn U_1 Teilmenge von U_2 oder U_2 Teilmenge von U_1 ist.

Aufgabe 36

Sind folgende Mengen lineare Teilräume des R^3?

a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$ b) $B = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \}$

Aufgabe 37

a) Kombinieren Sie **b** = (0; 4; -2) linear aus $\mathbf{a}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{a}_2$ = (1; 2; 0) und $\mathbf{a}_3$ = (0; 1; -1).

b) Ist $\mathbf{b}_1$ = (3; -1; 1) **bzw.** $\mathbf{b}_2$ = (-1; 1; 0) linear abhängig von $\mathbf{a}_1$ = (1; 1; 1) und $\mathbf{a}_2$ = (0; 2; 1)?

Aufgabe 38

Im R^3 sind folgende Mengen gegeben:

U_1 = {(1; 3; 0), (-2; 1; 2)}, U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 1,5)},

U_3 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)}, U_4 = {(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 2), (8; 13; 6)}.

a) Welche dieser Mengen sind linear unabhängig, welche bilden eine Basis des R^3?

b) Bestimmen Sie jeweils den Rang und eine Basis der von den Mengen aufgespannten Räume.

c) Geben Sie ein System von n+1 Vektoren des K^n an, von denen je n linear unabhängig sind. K sei dabei ein beliebiger Körper.

Aufgabe 39

a) Zeigen Sie, dass U = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)} eine Basis des R^3 ist.

b) Ersetzen Sie nach dem Austauschsatz von Steinitz zwei Vektoren in U durch die Vektoren $\mathbf{b}_1$ = (1; 3; 0) und $\mathbf{b}_2$ = (-2; 1; 2).

Aufgabe 40

Stellen Sie den Vektor **b** = (1; 3; 0) des R^3 bezüglich der beiden Basissysteme U_1 und U_2 dar:
U_1 = {(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)} und U_2 = {(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)}.

Aufgabe 41

A = {(1; 3; -2; 4), (-1; -1; 5; -9), (2; 0; -13; 23), (1; 5; 1; -2)}
B = {(2; 3; -1; 0), (-4; 5; 0; 1), (6; -2; 2; -2), (-2; 8; 1; 3)}

a) Stellen Sie die Vektoren jeweils als Zeilenvektoren einer Matrix dar.

b) Berechnen Sie jeweils den Zeilenrang und eine Basis für den von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraum.

c) Berechnen Sie jeweils den Spaltenrang und eine Basis für den von den Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 42

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des von folgenden Vektoren aufgespannten Unterraumes des R^5: (1; 1; 0; 1; 1), (0; 0; 1; 1; 0), (0; 1; 0; 0; 0),.(1; 0; 0; 1; 1),.(1; 0; 1; 0; 1).

Aufgabe 43 **A =** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Die Gleichung **A * x** = **y** mit gegebener Matrix **A** vom Typ (m, n) = (2, 3) und Vektoren **x** aus R^n bzw. **y** aus R^m kann man interpretieren als Abbildung f, die jedem Vektor **x** aus R^n einen Vektor **y** aus R^m zuordnet.
Die Lösungen von **A * x = 0** bzw. **A * x = b** ergeben dann die vollständigen Urbilder des Nullvektors (das ist der **Kern** der genannten Abbildung) bzw. des Vektors **b**.

a) Bestimmen Sie für die gegebene Matrix **A** die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{e}_2$ = (0; 1; 0) und $\mathbf{e}_3$ = (0; 0; 1) sowie der Vektoren **u** = (3; 1; 0) und **v** = (6; 2; 1).

b) Bestimmen Sie den Kern der durch **A** vermittelten Abbildung f, also die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems **A * x = 0**.

c) Bestimmen Sie die vollständigen Urbilder der Bildvektoren **b** = (7; 8) und **c** = (18; 20). Zeigen Sie, dass es sich jeweils um eine Nebenklasse des Kerns handelt.

d) Beweisen Sie, dass die obige Abbildung f **linear** ist, dass also gilt:
f(x + y) = f(x) + f(y) und **f(**k *** x) =** k *** f(x)**.
Was ist demnach das Bild des Vektors w(1; 1; 1)?

Aufgabe 44 **A =** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie den Kern sowie die Urbilder der Vektoren **b** = (1; 1; 2) und **c** = (1; 1; 1) bei der durch die Matrix **A** gegebenen linearen Abbildung in Abhängigkeit vom Parameter t.

b) Bestimmen Sie die Bilder der Einheitsvektoren bei der gegebenen Abbildung.

Ergebnisse:t = 1: Kern ist s * (-1; -1; 4); **b** besitzt kein Urbild; Urbild von **c** ist (1/4; 1/4; 0) + Kern.
t ≠ 1: Kern ist **0**; Urbilder eindeutig: 1/(4t-4) * (t - 2; t – 2; 4) bzw. (1/4; 1/4; 0).

Aufgabe 45

Es sei f eine lineare Abbildung von V in W. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Das Bild des Nullvektors aus V ist der Nullvektor in W.

b) Das Bild einer la-Teilmenge von V ist eine la-Teilmenge von W.

c) Das Urbild einer lu-Teilmenge von W ist eine lu-Teilmenge von V.

d) Das Bild von V ist ein Unterraum von W.

e) Das Bild irgendeines Unterraumes von V ist ein Unterraum von W.

f) Das Urbild eines Unterraums von W ist stets ein Unterraum von V.

g) Die Dimension des Bildraums von V ist höchstens gleich der Dimension von V.

h) Der Kern von f ist ein Unterraum von V.

i) Das Urbild f^{-1}(**w**) eines Vektors **w** aus W ist eine Nebenklasse des Kerns: M = **v** + Kern(f).

Aufgabe 46

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen über eine lineare Abbildung f: V--->W:

(7) f ist bijektiv (also injektiv und surjektiv).

(8) Rang f = dim V = dim W.

(9) Ist { $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ } eine Basis von V, so ist { f($\mathbf{b}_1$), f($\mathbf{b}_2$), ..., f($\mathbf{b}_n$) } eine Basis von W.

Hinweis: In diesem Falle nennt man f einen **Vektorraumisomorphismus** und die Räume V und W sind isomorph.

Aufgabe 47

Eine lineare Abbildung z: R³ ----> R^4 ist durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren bestimmt: $z(\mathbf{e}_1) = (1; -3; 2; 4)$, $z(\mathbf{e}_2) = (5; -3; 0; 2)$, $z(\mathbf{e}_3) = (-2; 0; 1; 1)$.
Bestimmen Sie den Kern, den Rang und den Defekt der Abbildung.

Aufgabe 48

a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1; 0; 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1; 2; 1)$ bzw. durch $\mathbf{b}_1 = (1; 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1; -1)$ je eine Basis des R^3 bzw. des R² gegeben ist.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt bezüglich der kanonischen Basen des R^3 und des R^2 eine lineare Abbildung z: R^3 ----> R^2.
Welche Matrix hat z bezüglich der Basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ des R^3 und $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ des R^2?
Welche Koordinaten hat der Bildvektor des Vektors (4; 1; 3) hinsichtlich der Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$?

Aufgabe 49

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ Die Matrix M beschreibt eine lineare Abbildung z: V ---> W.

a = (3; 2; 1; 1), **b** = (1; 0; -2; -3), **c** = (-2; 5; 5; 0) sind drei Vektoren aus V.

a) Bestimmen Sie den Rang von z und die Bilder von **a**, **b** und **c**.

b) Welche Dimension besitzt der von **a**, **b** und **c** aufgespannte Unterraum U und welche Dimension besitzt sein Bild z(U)?

Aufgabe 50

$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ bzw. $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ seien Basis des R^4 bzw. des R^3.

Durch $z(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 - 12\mathbf{b}_3$ $\quad z(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$
$z(\mathbf{a}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ $\quad z(\mathbf{a}_4) = 4\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2 - 9\mathbf{b}_3$
ist eine lineare Abbildung z: R^4 ----> R^3 bestimmt.

a) Ermitteln Sie die Bildvektoren zu **u** = (2; 3; 1; 1), **v** = (0; 1; -2; -3) und **w** = (5; -2; 5; 0). Berechnen Sie außerdem das Bild z(**t**) des Vektors **t** = **u** + 2**v** + **w**.

b) Geben Sie die Abbildungsgleichungen für z an. Warum kann z nicht injektiv sein?

c) Ermitteln Sie Rang und Kern der Abbildung z. Geben Sie eine Basis des Kerns an. Folgern Sie, dass z auch nicht surjektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Menge Y aller Urbilder von $\mathbf{y'} = -15\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 28\mathbf{b}_3$ in R^4.
Zeigen Sie, dass es zu $\mathbf{z'} = 11\mathbf{b}_1$ und damit auch zu $\mathbf{b}_1$ kein Urbild in R^4 gibt.

e) Es sei U der von **u**, **v** und **w** aus a) aufgespannte Unterraum des R^4. Ermitteln Sie die Dimensionen von U und von z(U). Was folgt hieraus über den Unterraum $U \cap$ (Kern z)? Geben Sie eine Basis von $U \cap$ (Kern z) an.

f) Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die zu U gehörenden Urbilder des Vektors **y'** aus d).

g) Ermitteln Sie eine Basis $C = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \}$ des R^4 und eine Basis $D = \{ \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \}$ des R^3, so dass die lineare Abbildung z bezüglich dieser Basen durch eine Matrix der Gestalt

$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Welche Werte nehmen a, b und c dabei an?

Lineare Algebra und Analytische Geometrie SS 92 Blatt 12

Aufgabe 51

Diese Aufgabe soll zeigen, wie man ein sehr allgemeines Skalarprodukt durch geeignete Maßnahmen (Orhtonormalisierungsverfahren nach E. Schmidt) in ein "gewöhnliches" Skalarprodukt überführen kann, indem man eine geeignete Basis verwendet.

Gegeben sei im R³ eine Basis B = {$\mathbf{b}_1$; $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{b}_3$}. Für die Vektoren $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ wird durch folgende Vorschrift r ein Skalarprodukt definiert:

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1 + 3x_2 - 2x_3)(y_1 + 3y_2 - 2y_3) + (2x_1 - x_2 + x_3)(2y_1 - y_2 + y_3) + (3x_1 + 2x_2 - 7x_3)(3y_1 + 2y_2 - 7y_3).$$

Hinweis: Die Skalarprodukteigenschaften (symmetrisch, bilinear, positiv definit) sind nicht nachzuweisen, sondern dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

a) Berechnen Sie $r(\mathbf{b}_i; \mathbf{b}_k) = \mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$ für i, k = 1, 2, 3. Ist B eine Orthonormalbasis?

b) Konstruieren Sie aus der Basis B = {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$} folgendermaßen eine neue Basis C = {$\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$}, wobei die $\mathbf{c}_i$ paarweise orthogonal sind:
   1. Schritt: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$
   2. Schritt: $\mathbf{c}_2 = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{b}_2$ so, daß $\mathbf{c}_2$ orthogonal zu $\mathbf{c}_1$ ist
   3. Schritt: $\mathbf{c}_3 = c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2 + e\mathbf{b}_3$ so, daß $\mathbf{c}_3$ orthogonal zu $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ ist
   Berechnen Sie a, b, c, d und e.

c) Führen Sie die Basis C in eine Orthonormalbasis E = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$} des R³ über.

d) Stellen Sie die $\mathbf{b}_i$ dar als Linearkombinationen der $\mathbf{e}_i$.
   Da * bezüglich der $\mathbf{e}_i$ das kanonische Standardskalarprodukt ist, lassen sich nun die Produkte $\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$ auf einfache Weise berechnen. Kontrollieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus a).

e) Geben Sie die Transformationsmatrix T an, die die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B in die Darstellung bezüglich der Basis E transformiert.
   Hinweis: Verwenden Sie dazu Ihre Ergebnisse aus d).

f) Wie lautet die zu T inverse Matrix T^{-1}? Benützen Sie die Ergebnisse von c).

Ergebnisse:

a) Verknüpfungstafel für $\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$

*	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{b}_1$	14	7	-21
$\mathbf{b}_2$	7	14	-21
$\mathbf{b}_3$	-21	-21	54

b) $\mathbf{u} * \mathbf{u} = 90$; $\mathbf{v} * \mathbf{v} = 68$; $\mathbf{u} * \mathbf{v} = 24$

c) $\mathbf{z} = (8; 14; 7)$

d) $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (1;0;0)$; $\mathbf{c}_2 = (1; -2; 0)$; $\mathbf{c}_3 = (2; 2; 2)$

e) $\mathbf{e}_1 = 1/14\ \mathbf{b}_1$; $\mathbf{e}_2 = 1/42\ (\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2)$ $\mathbf{e}_3 = 1/12\ (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)$

f) $$\begin{pmatrix} \sqrt{14} & \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{-3\cdot\sqrt{14}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{42}}{2} & \frac{\sqrt{42}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix}$$ Spalten dieser Matrix sind die $\mathbf{b}_i$ bezüglich $\mathbf{e}_i$.

g) Die in f) dargestellte Matrix ist gleichzeitig die Transformationsmatrix vom b- in das e-System; es gilt nämlich: $\mathbf{v}_e = T * \mathbf{v}_b$.

h) Die Ergebnisse von e) gestatten sofort die Angabe von T^{-1}.

Aufgabe 52

Gegeben sind die beiden Geraden g ... $4x + 3y + 1 = 0$ und h ... $3x + y + 2 = 0$ im R^2 sowie der Kreis K ... $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ und der Punkt A(7; 12).

Verfolgen Sie Ihre Ergebnisse an Hand einer sauberen Kontrollzeichnung (LE = 1cm).

a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von g und h sowie den Schnittwinkel zwischen g und h. Welche Gleichungen besitzen die Parallelen $g_{1,2}$ zu g bzw. $h_{1,2}$ zu h jeweils im Abstand von 5 LE von g bzw. von h ? Berechnen Sie den Abstand des Punkts A von g und von h.

b) Ermitteln Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises K. Folgern Sie, dass S auf K liegt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes M von g, h, $g_{1,2}$ und $h_{1,2}$.
Was folgt aus den Ergebnissen für die Lage von K zu den betreffenden Geraden?

Sofern unter den Geraden Kreistangenten vorkommen, sind die Berührpunkte zu berechnen, bei Sekanten die Schnittpunkte (nicht mit $h_{1,2}$) sowie die Länge der ausgeschnittenen Sehne.

c) Es sei l_g bzw. l_h jeweils die Lotgerade zu g bzw. h im Punkt S aus a).
Warum ist l_g Tangente an K und l_h Sekante für K?
Ermitteln Sie den zweiten Endpunkt der durch l_h bestimmten Sehne sowie deren Länge und ihren Abstand von M.

d) Zeigen Sie, dass A außerhalb von K liegt. Bestimmen Sie Parameterdarstellungen der Tangenten $t_{1,2}$ von A aus an den Kreis K sowie die Koordinaten der Berührpunkte $B_{1,2}$.
Ermitteln Sie die Streckenlängen AB_i, B_1B_2 und AM sowie den Abstand von A zu B_1B_2.

e) Welche Kreise K' und K'' mit Radius 5 LE schneiden den gegebnen Kreis in G(5; c) mit $c < 0$ rechtwinklig? In welchem Punkt schneidet K' bzw. K'' den Kreis K außerdem ?

f) Bestimmen Sie die Mittelpunkte $M_{1,2}$ und Radien $r_{1,2}$ von Kreisen $K_{1,2}$:
K_1 soll sowohl K als auch K' von innen berühren und dabei möglichst groß sein.
K_2 soll sowohl K als auch K'' von innen berühren und dabei möglichst groß sein.

g) Welche Kreise $C_{1,2}$ berühren die Gerade h in S, wobei ihre Mittelpunkte $N_{1,2}$ von M die Entfernung 3/5 LE besitzen?

h) Unter welchem spitzen Winkel schneidet C_1 bzw. C_2 den gegebenen Kreis K?
Welche Punkte $R_{1,2}$ haben $C_{1,2}$ noch mit K gemeinsam ?
Ist R_1R_2 ein Durchmesser von K? (Begründung).

Aufgabe 53

Es sei A = {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$} bzw. B = {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$} eine Basis des R^4 bzw des R^3.

Durch $f(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 - 12\mathbf{b}_3$, $f(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$
$f(\mathbf{a}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ $f(\mathbf{a}_4) = 4\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2 - 9\mathbf{b}_3$

ist eine lineare Abbildung f des R^4 in den R^3 gegeben.

a) Ermitteln Sie die Bilder von $\mathbf{u}$ = (2; 3; 1; 1), $\mathbf{v}$ = (0; 1; -2; -3) $\mathbf{w}$ = (5; -2; 5; 0) und von $\mathbf{t} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basen A und B an.

c) Ermitteln Sie Dimension und eine Basis des Bildraums $f(R^4)$.

d) Ermitteln Sie Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung f.
Folgern Sie, dass f weder surjektiv noch injektiv sein kann.

e) Ermitteln Sie das vollständige Urbild des Vektors $\mathbf{y}' = -15\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 28\mathbf{b}_3$.

f) Zeigen Sie, dass $\mathbf{z}' = 11\mathbf{b}_1$ und damit auch $\mathbf{b}_1$ kein Urbild in R^4 besitzt.

g) Ermitteln Sie die Dimensionen der Unterräume U = [u, v, w] und f(U). Was folgt hieraus über den Unterraum $U \cap$ Kern f des R^4 ? Geben Sie eine Basis von $U \cap$ Kern f an.

h) Bestimmen Sie die zu U gehörigen Urbilder des Vektors $\mathbf{y}'$ aus e).

i) Geben Sie eine Basis A“ des R^4 und eine Basis B“ des R^3 an, so dass die Abbildungsmatrix möglichst einfache Gestalt annimmt. Wie lautet diese Abbildungsmatrix?

Aufgabe 1

x	+ y	- z	= b	Lassen sich reelle Zahlen a und b so bestimmen, dass das
x	- ay	- z	= 2a	gegebene Gleichungssystem
2x	+ y		= b+2	a) keine b) genau eine c) unendlich viele Lösungen besitzt?
x		+ z	= 2	Geben Sie eine vollständige Übersicht über alle möglichen Fälle und die zugehörigen Lösungen.

Ergebnisse: a = -1: nur lösbar falls b = - 2: (0; 0; 2) + s * (1;-2; -1).

$a \neq -1$: eind. Lösung 1/(2a+2) * (a(b+4)+2; 2(b-2a); 2-ba)

Aufgabe 2

$2x_1$	$+ ax_2$	$+ x_3$	$+ 4x_4$	= - 2	Für welche reellen Werte a bzw. b hat das gegebene
$5x_1$	$+ x_2$	$+ 3x_3$	$- x_4$	= - 4	Gleichungssystem
x_1		$+ x_3$	$+ 3x_4$	= 0	a) keine b) genau eine c) unendlich viele Lösungen?
	$- x_2$	$+ 2x_3$	$+ 5x_4$	= b	Geben Sie eine vollständige Lösungsübersicht.

Ergebnisse: a = 0: eindeutig lösbar 1/11 * (b - 26 ; 48 - 12b ; 14 + 2b ; 4 - b)

$a \neq 0$: a = 1/2: b = 4:Lösung einparametrig: (0; -4; 0; 0) + s * (-1; 2; 1; 0)

$b \neq 4$: keine Lösung.

$a \neq 1/2$: eind. Lösung: 1/(11*(2a-1)) * (26-10ab-4a-b; 12(b-4); 4a(4b-5)-2(b+7); (2a-1)(4-b)).

Aufgabe 3

Gegeben sind die Ebene E...2x - 3y - 6z + 12 = 0 und die Gerade g... **x** = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1).

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden der Ebene E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen.
Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen.
(Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen).

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen. Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den v = - 2w gilt. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse TV(BAC), TV(CBA) und TV(ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r; s; t) auf P'(r'; s'; t') ab. Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist. Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

f) Gegeben ist die Gerade h... **x** = (6; - 6; 7) + l * (3; 2; 0).
Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Aufgabe 4

Beweisen Sie den Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:

Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite des Dreiecks harmonisch im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Aufgabe 5 : Geraden und Ebenen im euklidischen R^3

Gegeben ist der affine Punktraum R^3 mit einer Orthonormalbasis (kartesisches Koordinatensystem).

Die Gerade g verbindet die Punkte A (2; 3; 3) und B (0; 1; 3).

Die Gerade h hat die Gleichung **x** = (4; 2; 0) + t * (1; 2; -2).

a) Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.

b) Ermitteln Sie den kürzesten Abstand d zwischen g und h sowie die zugehörigen Fußpunkte G auf g und H auf h. [Kontrollergebnisse: H (1;2;3), G (3;0;2)]

c) Die Ebene E enthält die Gerade g und ist parallel zur Gerade h.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E. [Kontrollergebnis: 2x - 2y - z + 5 = 0]

d) Der Punkt H und die Gerade h werden an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts H' sowie eine Gleichung der Bildgerade h'.

e) Begründen Sie:
Die Abbildungsgleichung X' = T * X + **d** mit nebenstehender Matrix T und Vektor **d** beschreibt genau die in d) genannte Spiegelung an der Ebene E.

$$T = \frac{1}{9} * \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad d = \frac{1}{9} * \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 zum Skalarprodukt:

Gegeben sei im R^3 eine Basis B = {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$}. Für die Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ wird durch folgende Vorschrift r ein Skalarprodukt definiert:

$$s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1 + 3x_2 - 2x_3) \bullet (y_1 + 3y_2 - 2y_3) + (2x_1 - x_2 + x_3) \bullet (2y_1 - y_2 + y_3) + (3x_1 + 2x_2 - 7x_3) \bullet (3y_1 + 2y_2 - 7y_3).$$

Hinweis: Die Skalarprodukteigenschaften (symmetrisch, bilinear, positiv definit) sind nicht nachzuweisen, sondern dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

a) Berechnen Sie $r(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_k) = \mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$ für i, k = 1, 2, 3. Ist B eine Orthonormalbasis

b) Konstruieren Sie aus der Basis B = { $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ } folgendermaßen eine neue Basis C = { $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ }, wobei die $\mathbf{c}_i$ paarweise orthogonal sind:
1. Schritt: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$.
2. Schritt: $\mathbf{c}_2 = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{b}_2$ so, daß $\mathbf{c}_2$ orthogonal zu $\mathbf{c}_1$ ist.
3. Schritt: $\mathbf{c}_3 = c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2 + e\mathbf{b}_3$ so, daß $\mathbf{c}_3$ orthogonal zu $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ ist.
Berechnen Sie a, b, c, d und e.

c) Führen Sie die Basis C in eine Orthonormalbasis E = { $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ } des R^3 über.

d) Stellen Sie die $\mathbf{b}_i$ dar als Linearkombinationen der $\mathbf{e}_i$.
Da * bezüglich der $\mathbf{e}_i$ das kanonische Standardskalarprodukt ist, lassen sich nun die Produkte $\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$ auf einfache Weise berechnen. Kontrollieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus a).

e) Geben Sie die Transformationsmatrix T an, die die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B in die Darstellung bezüglich der Basis E transformiert.
Hinweis: Verwenden Sie dazu Ihre Ergebnisse aus d).

f) Wie lautet die zu T inverse Matrix T^{-1} ? Benützen Sie die Ergebnisse von c).

Aufgabe 2 zum Skalarprodukt:

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bezüglich einer Orthonormalbasis E = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$} des R^3 ist eine lineare Abbildung f des R^3 in sich gegeben durch die Matrix A. Gleichzeitig ist dadurch eine Abbildung des affinen Punktraumes mit Fixpunkt O definiert.

a) Zeigen Sie, dass f ein Automorphismus des R^3 ist (d.h. f ist bijektiv).
Bestimmen Sie die zur Umkehrabbildung gehörige Matrix A^{-1}.
Ermitteln Sie die Bilder der Koordinatenebenen sowohl bei f als auch bei f^{-1}.

b) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a}$ = (3; 4; 5) und $\mathbf{b}$ = (3; 4; -5) .
Bestimmen Sie die Bilder **a’** und **b’**, sowie die Urbilder **a*** und **b*** von **a** und **b**.
Berechnen Sie **ab**, **a’b’** und **a*b*** sowie die Beträge der Vektoren **a, b, a', b', a* und b***. Folgern Sie, dass f weder längen- noch winkeltreu ist.

c) Gegeben sei die Fläche K mit der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.
Beschreiben Sie die Schnittkurven der Fläche K mit den sämtlichen Ebenen $x_3 = r$ sowie mit den Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

Beschreiben Sie nun die Form der Fläche K.
Beschreiben Sie auch die Schnittkurven mit den Ebenen $x_1 = 5$ und $x_2 = 5$.

d) Zeigen Sie, dass f die Fläche K auf sich selbst abbildet.
Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, A', B', A*, B* mit den entsprechenden Ortsvektoren aus b) auf der Fläche K liegen.

e) Zeigen Sie, dass die Abbildung f eine Fixpunktgerade g besitzt. Bestimmen Sie die Gleichung von g. Welche geometrische Bedeutung besitzt g für die Fläche K?

f) Zeigen Sie, dass die Gerade h = AB durch A(3; 4; 5) und B(3; 4; -5) windschief ist zur Gerade k mit der Gleichung **x** = k * (0; 1; 1). Berechnen Sie den kürzesten Abstand von h und k.

Aufgabe 3:

Es seien U, V und W reelle Vektorräume sowie f und g lineare Abbildungen:

$f: U \to V \qquad g: V \to W \qquad h: U \to W \quad \text{mit} \quad h = f \circ g.$

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Rang h = Rang f

b) Kern h = Kern f

c) Die Einschränkung von g auf Bild f ist injektiv.

Aufgabe 4

Es seien U, V und W reelle Vektorräume sowie f und g lineare Abbildungen:

$f: U \to V \qquad g: V \to W \qquad h: U \to W \quad \text{mit} \quad h = f \circ g.$

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Rang h = Rang g

b) Bild h = Bild g

c) Bild f + Kern g = V

Aufgabe 5

Formulieren Sie die grundlegenden Aussagen über die **Lösbarkeitsbedingungen** und über die **Lösungsmengen** linearer homogener bzw. inhomogener Gleichungssysteme.

Begründen Sie diese Aussagen mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Ergebnisse über lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Aufgabe 6

Die Matrix A bestimmt sowohl eine lineare Abbildung f des Vektorraums R2 in sich als auch eine affine Abbildung F des affinen Punktraums R2 in sich vermöge folgender Gleichungen:

x' = A * x **X`= A * X** mit $A = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{-4}{5} & 1 \end{pmatrix}$

a) Begründen Sie, warum die Abbildung f - und damit auch F - bijektiv ist.

b) Berechnen Sie die Bilder der Punkte B(0; 10), C(10; 10) und D(10; 0).

c) Zeichnen Sie Ihre Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (LE=1cm).

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.
Hinweis: A besitzt zwei verschiedene Eigenwerte!

e) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung F.

f) Von welcher Art ist die Abbildung F (kurze Begründung)?

g) Geben Sie die affine Normalform der Abbildungsmatrix A an.

h) Zeichnen Sie das Viereck OBCD, seinen Inkreis, sein Mittenviereck und dessen Diagonalen ein. Zeichnen Sie das Bild dieser Figur.
Hinweis: Zur Zeichnung des Inkreisbildes kann man geeignete Tangenten verwenden!

Aufgabe 7:

Gegeben sind der Punkt P (6; 5; 7) und die Vektoren **u** = (1; -4; 3) und **v** = (-5; 8; -6).

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E die P enthält und zu **u** und **v** parallel ist.
Ergebnis: E ... 3y + 4z - 43 = 0

b) Bestimmen Sie Gleichung und Mittelpunkt der Kugel K mit Radius r = 5, die E in P berührt und auf derselben Seite von E liegt wie der Punkt O.
Ergebnis: K ... $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

c) Gegeben sind die Geraden g_k ... x = (-1; 2; 2) + r * (3+k; 0; 4-7k).
Zeigen Sie, dass alle g_k in einer Ebene F liegen und bestimmen Sie deren Gleichung. Ergebnis: F ... y = 2

d) Für welche Werte k ist g_k Tangente bzw. Passante bzw. Sekante der Kugel K?
Bestimmen Sie im ersten Fall die zugehörigen Berührpunkte samt Tangentialebene.
Ergebnis: Tangente für k = 0: B_0= (2; 2; 6); E_0 ... - 4x + 3z - 10 = 0
k = 1: B_1= (3; 2; -1); E_1 ... 3x + 4z - 5 = 0
Passante für k < 0 oder k > 1
Sekante für 0 < k < 1

e) Bestimmen Sie die Schnittgerade h der beiden Tangentialebenen aus d).
Ergebnis: x = (-1; 0; 2) + s * (0; 1; 0)

f) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Gerade h.
Ergebnis: $\sqrt{74}$

g) Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Gleichung der Kugel K' , die zu K symmetrisch bezüglich h liegt.
Ergebnis: K' ... $(x + 8)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$

h) Zeigen Sie, dass E_0 und E_1 die Kugel K' berühren und berechnen Sie die Berührpunkte.
Ergebnis: P_0 = (-4; 2; -2); P_1 = (-5; 2; 5)

i) Zeigen Sie, dass h und l = B_1B_2 zueinander windschief sind. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden samt den zugehörigen Fußpunkten des Gemeinlots.
Ergebnis: H = (-1; 2; 2) L = (2,5; 2; 2,5) d = $\sqrt{12,5}$

j) Berechnen Sie die Gleichung und den Mittelpunkt derjenigen Kugel K'' mit kleinstem Radius, die h und l berührt.
Ergebnis: $(4x - 3)^2 + 16(y - 2)^2 + (4z - 9)^2 = 50$

k) Berechnen Sie die Schnittebene von K und K''.
Ergebnis: $21x + 3z - 35 = 0$

l) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises von K und K''.
Ergebnis: $S = (4/3; 2; 7/3)$ rad = 5/3

m) Bestimmen Sie die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen für die Ebenen E_0 und E_1.
Ergebnis: w_1 ... $7x + z + 5 = 0$ und w_2 ... $x - 7z + 15 = 0$. $w_1 \perp w_2$.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Ebene E...$2x - 3y - 6z + 12 = 0$ und
die Gerade g... $\mathbf{x} = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1)$.

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden der Ebene E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen.
Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen.
Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen.
Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den $v = -2w$ gilt.
Bestimmen Sie die Teilverhältnisse (BAC), (CBA) und (ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r, s, t) auf P'(r', s', t') ab.
Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist.
Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

f) Gegeben ist die Gerade h... $\mathbf{x} = (6; -6; 7) + l * (3; 2; 0)$.
Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Lösungen LA-Uebungen SS92

Blatt 1

Aufgabe1:

Abbildungsgleichung für die Punkte (Spaltenvektoren): **X' = A * X + c**

In Koordinaten: $x_1` = 3/5 * x_1 + 4/5 * x_2 - 2$
$x_2` = 4/5 * x_1 - 3/5 * x_2 + 4$

a) Ergebnisse (hier als Zeilenvektoren geschrieben): A`(-7/5; 24/5); B`(-6/5; 17/5); C`(-3/5; 21/5); D`(-2; 4); E`=E(-5; 0).

b) Fixpunkte erhält man aus der Gleichung **X` = X,** also als Lösungen des Systems $x_1` = x_1$ und $x_2` = x_2$. Ergebnis: Fixpunktgerade a (Achse): **x = (-5; 0) + t * (2; 1)**

c) Kern der Abbildung sind die Urbilder des Nullvektors **x'** = (0; 0), also die Lösungen des homogenen (!) Systems **A * x = (0; 0)** .
Ergebnis: Kern = {(0; 0)}, also ist die Abbildung injektiv.

d) Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen der Vektorgleichung **x`** = t * **x** .
Ergebnisse: Für t = 1 ergibt sich r * (2; 1) (Vgl. b)!); für t = -1 erhält man s * (-1; 2).
Folgerungen: Es handelt sich offenbar um eine Schrägspiegelung mit der Achse a in Richtung (2; 1) und der Spiegelrichtung (-1; 2).

e) Normalform (problemangepasstes Koordinatensystem):

1. Schritt: Wir wählen den Fixpunkt E(-5; 0) als neuen Koordinatenursprung im Y-System. Die zugehörige Transformationsgleichung lautet: Y = X - E. Eingesetzt in die Abbildungsgleichung erhält man: Y`+ E = A * (Y+E) + c, also Y' = A * Y + (A* E + c-E). Zur Kontrolle: die letzte Klammer muss natürlich (0; 0) ergeben.

2. Schritt: Wir wählen als neue Basisvektoren eines Z-Koordinatensystems die in d) berechneten Eigenvektoren **l** = 2 * **i** + 1 * **k** und **m** = -1 * **i** + 2 * **k**. Nach kurzer Zwischenrechnung die Transformationsmatrix R für die Transformation zwischen den Y- und den Z-Koordinaten Y = R * Z und mit Y`=A*Y erhält man Z` = Inv(R)*A*R * Z = B * Z mit den Matrizen R = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Abbildungsgleichung für die Vektoren: **x` = A * x.**

a) a` = (2; 2; 10); b` = (1; 1; 5); c` = (-2; -2; -10). Was fällt an den Ergebnissen auf?

b) Der Kern besteht aus den sämtlichen Urbildern des Nullvektors, also aus der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems **A * x = 0.**
Ergebnis: **x** = r * (-1; -5; 2;0) + s * (-1; -3; 0; 2) mit r, s aus **R.**
Der Kern ist also ein zweidimensionaler Vektorraum.

c) Urbildmenge von **x`** = (1; -5; 2) ist die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems **A * x** = (1; -5; 2). Ergebnis: x = (0; 2; 0; -1) + Kern.

d) Zu zeigen ist, dass die Gleichungssysteme A * x = (1; 0; 0) bzw. = (0; 1; 0) bzw. = (0; 0; 1) unlösbar sind.

e) Eigenvektoren kann es nur geben, wenn man eine Abbildung eines Raumes in sich selbst hat. Hier jedoch wird ein Raum, der R^4, in einen anderen, den R^3, abgebildet. Also ist die Gleichung **x'** = t * **x** sicher nicht erfüllbar, ja sogar sinnlos.

Aufgabe 3

Normalformen der drei Abbildungsmatrizen:

zu A: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ zu B: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu C: $\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Blatt 2

Aufgabe 4:
Siehe SS 90 Blatt 9 Aufgabe 40.

Aufgabe 5:
Siehe SS 90 Blatt 10 Aufgabe 42.

Aufgabe 6:
Siehe SS 90 Blatt 10 Aufgabe 43.

Aufgabe 7:
Siehe SS 90 Blatt 10 Aufgabe 44.

Aufgabe 8:
Siehe SS 90 Blatt 10 Aufgabe 45.

Aufgabe 9:
Siehe SS 90 Blatt 11 Aufgabe 49.

Blatt 3

Aufgabe 10:
Siehe SS 90 Blatt 11 Aufgabe 48

Aufgabe 11:
Siehe SS 91 Blatt 2 Aufgabe 8

Blatt 4

Die Aufgaben Nr. 12 bis 15 und Nr.17 und 18 beruhen alle auf demselben Prinzip:
Ausnutzen der linearen Unabhängigkeit gewisser aufspannender Vektoren.
Eine Darstellung der Lösung erübrigt sich.
Zu Nr. 16 ist es ratsam, das gesonderte Blatt zum Teilverhältnis durchzuarbeiten.

Blatt 5

Aufgabe 19:
Ansatz: Wir wählen A als Ursprung und die aufspannenden Vektoren **c = AC** und **b = AB.**
Nach Voraussetzung gilt:
AC' = k***b** und **AB'** = l***c** und folglich TV(AC'B) = k/(1-k) und TV(CB'A) = (1-l)/l.
1. Schnitt von BB' mit CC' ergibt - nach entsprechender Zwischenrechnung - den Punkt P:
AP = k(1-l)/(1-lk) * **b** + l(1-k)/(1-lk) * **c** (man beachte die Symmetrie im Ergebnis).
2. Schnitt von AP mit BC ergibt - nach entsprechender Zwischenrechnung - den Punkt A':
AA' = a***AP** = **b** + b*(**c-b**) wobei sich b ergibt zu b = al(1-k)/(1-lk) und
1-b = ak(1-l)/(1-lk) (auch hier ist die Symmetrie der Ergebnisse zu beachten!)
Damit erhält man TV(BA'C) = b/1-b = l(1-k)/(k(1-l)).
Multipliziert man nun die drei Teilverhältnisse, so ergibt das Produkt 1. q.e.d. .

Aufgabe 20:

Ansatz wie bei Aufgabe 22, aber Vorsicht bezüglich der Vorzeichen der Teilverhältnisse!

Schnitt von BC mit B'C' ergibt A':

AA' = **b** + r*(**c-b**) = k*$\mathbf{b}$ + s*(l*$\mathbf{c}$-k*$\mathbf{b}$)   also TV(BA'C) = r/(1-r)
ergibt nach kurzer Zwischenrechnung:

s = r/l   und   r = l(k-1)/(k-l)   also 1-r = k(1-l)/(k-l).

Multipliziert man nun die drei Teilverhältnisse, so ergibt sich -1.

Aufgabe 21:

Wir zeigen z.B. TV(ERF) = - TV(EQF), d. h. R und Q trennen EF harmonisch.

Ceva mit Punkt B für Dreieck EFD ergibt: (ERF) * (FCD) * (DAE) = 1   (1)

Menelaos mit Gerade CAQ für Dreieck DEF ergibt: (EQF) * (FCD) * (DAE) = -1   (2)

Aus dem Vergleich von (1) und (2) erhält man sofort: TV(ERF) = - TV(EQF).

Analog erhält man die anderen Ergebnisse:

Ceva mit Schnittpunkt D und Menelaos mit Schnittgerade EF für Dreieck ACB.

Ceva mit Schnittpunkt F und Menelaos mit Schnittgerade AC für Dreieck BDE.

Aufgaben 22 bis 25:

Siehe SS 90 Blatt 4 Aufgaben 18 bis 21

Aufgabe 28:

g ... **x** = (5; -10; 6) + r * **(0; 5; -2)** h_a ...   **x** = (3; 0; -2) + s * **(a; 10; 4)**

Die beiden Richtungsvektoren sind für alle a lu, also g nicht parallel zu h_a.

Es gibt einen Schnittpunkt für a = 4, nämlich S(5; 5; 0).

Alle D_a erfüllen die Gleichung   **x** = (3; 10; 2) + a * **(1; 0; 0)**.

Alle h_a erfüllen die Gleichung **x** = (3; 0; -2) + u * **(0; 10; 4)** + a * **(1; 0; 0)**, das ist aber die Gleichung einer Ebene: 2y - 5z = 10.

<u>Blatt 6</u>

Aufgaben 26 und 27 enthalten Kontrollergebnisse.

Aufgabe 28:

Beispielhaft soll die Aufgabe f) bewiesen werden:

Voraussetzungen: 1. $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ sind lu   2. $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ sind la

Zu zeigen: **b** ist Linearkombination der $\mathbf{a}_i$.

2. bedeutet, dass es eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors folgender Art gibt:
$\mathbf{0} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n + x\mathbf{b}$.

Wegen 1. kann dabei x nicht 0 sein, denn sonst wären die $\mathbf{a}_i$ allein schon linear abhängig.

Wenn aber $x \neq 0$ ist, so existiert x^{-1} und man kann nach **b** auflösen:

$b = - x^{-1} (x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)$,   d. h. aber, dass sich **b** aus den $\mathbf{a}_i$ linear kombinieren lässt, wie zu beweisen war.

Blatt 7

Aufgabe 29

a) X = (1/2; 0) also TV(PXQ) = 3 und Y = (0; 1) also TV(PYQ) = 1 (Y ist Mitte von PQ).

b) h ... **x** = (1; 1) + r * **(0; 1)**; h ist parallel zur y-Achse. A(1; 0) und TV(QAR) = 1/5.

c) T(-4; 0) und U(1/4; 15/4)

d) k ... 2x - 2y = 5 bzw. **x** = (5/2; 0) + r * **(1; 1)**, daher k parallel zu PR.

e) Seitenmitten: (0; 1), (1; 2), (0; 4). Schwerpunkt: S(1/3; 7/3)

f) P'(5/3; 5/3), Q'(-1/3; 17/3), R'(-1/3; -1/3); S' = S.

g) h* ... **x** = (1;-1) + r * **(4;-2)** oder x + 2y = 1 bzw. x/(-1) + y/(-1/2) = 1

Siehe SS 90 Blatt 6 Aufgabe 32

Aufgabe 30

Siehe SS 90 Blatt 2 Aufgabe 8

Aufgabe 31

Zeichnen Sie eine Figur: ABC kollinear, ADE kollinear, BE schneidet CD in F.
P sei Mitte von CE, Q sei Mitte von BD und R sei Mitte von AF.

A wird als Ursprung gewählt, **AB = b** und **AD = d** als aufspannende Vektoren.
Ansatz: **AC** = **c** = l * **b** und **AE** = **e** = m * **d**.

Zunächst wird F als Schnitt von BE mit CD berechnet:
AF = **b** + r**(e-b)** = **d** + s**(c-d)**. Man erhält in der üblichen Weise

r = (1 - l) / (1 - lm) und s = (1 - m) / (1 - lm) Beachte die Symmetrie!

Damit erhält man **AF = f = b** * l(1-m)/(1-lm) + **d** * m(1-l)/(1-lm).

Nun lassen sich die drei Mittelpunkte P, Q und R berechnen.

Dann kann man zeigen, dass gilt **(p-q)** = k * **(r-q)**, d.h. aber, dass P, Q und R kollinear sind.

Blatt 8

Einfache Beweisübungen zur Anwendung der Gesetze eines Körpers, eines Vektorraumes und linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Blatt 9

Siehe SS 90 Blatt 5 Aufgaben 22 bis 29

Blatt 10

Aufgabe 43:

Siehe SS 91 Blatt 5 Aufgabe 20

Aufgabe 45:

Einfache Beweisaufgabe über Eigenschaften linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen (Vektorraumhomomorphismen).

Aufgabe 46:

Siehe SS 90 Blatt 6 Aufgabe 31

Blatt 11

Siehe SS 90 Blatt 8

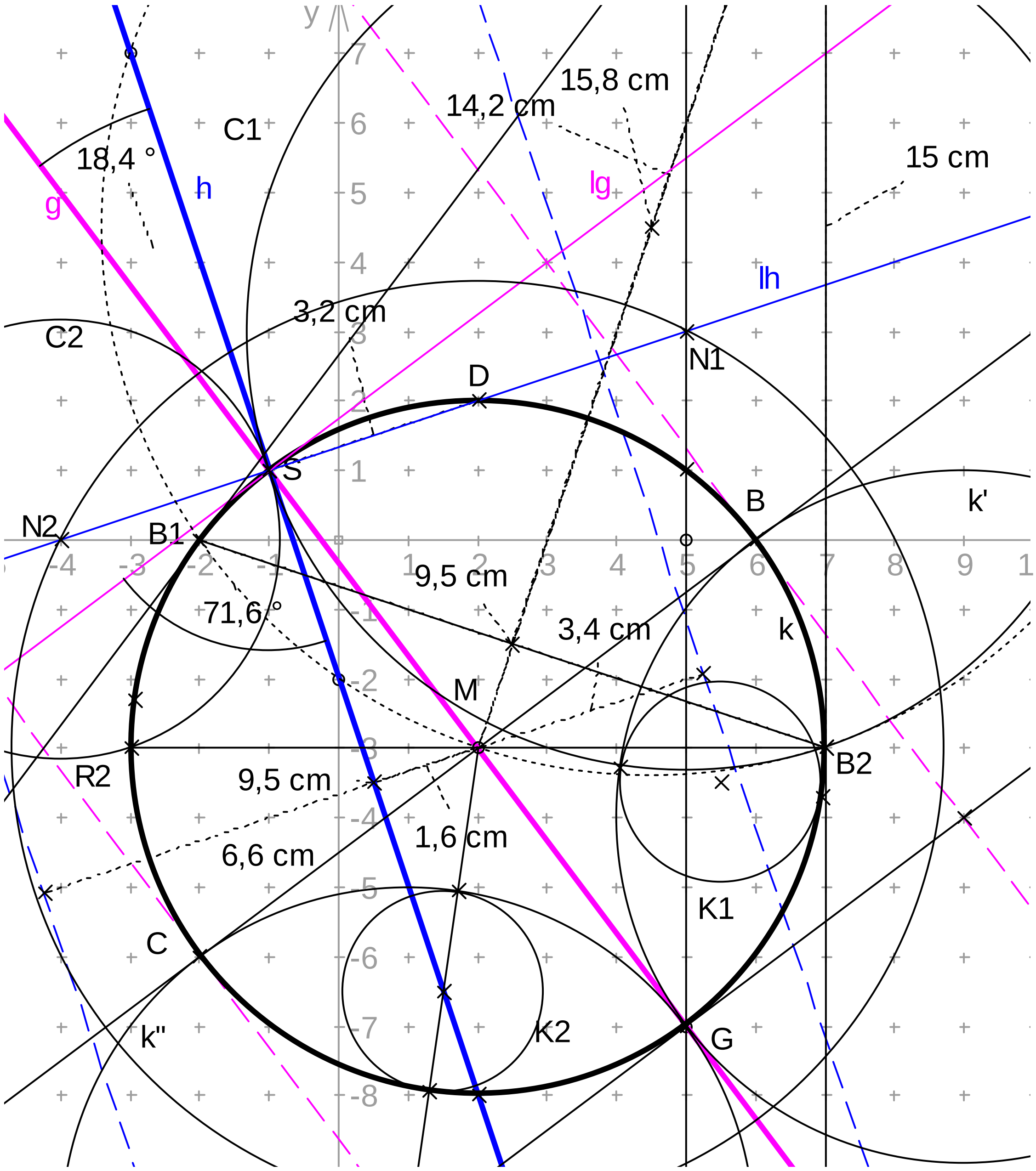
Blatt 12

Ergebnisse angegeben.

Blatt 13

Aufgabe 52:

Da es sich bei dieser Aufgabe um eine reine Fleißarbeit ohne begriffliche oder rechnerische Schwierigkeiten handelt, begnügen wir uns mit einer Zeichnung mit allen Ergebnissen.



Aufgabe 53:

Wir geben eine mit MAPLE generierte Lösung an:

```
> with(linalg);
> A:= transpose(matrix(4,3,[-1,6,-12,2,-1,5,3,4,-2,4,9,-9]));
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 4 & 9 \\ -12 & 5 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector(4,[2,3,1,1]);v:=vector(4,[0,1,-2,-3]); w:=vector(4,[5,-2,5,0]);
```

$$u := [2, 3, 1, 1]$$

$$v := [0, 1, -2, -3]$$

$$w := [5, -2, 5, 0]$$

```
> u1:=multiply(A,u);v1:=multiply(A,v);w1:=multiply(A,w);
```

$$u1 := [11, 22, -20]$$

$$v1 := [-16, -36, 36]$$

$$w1 := [6, 52, -80]$$

```
> t:=matadd((u,2*v),w);t1:=multiply(A,t);
```

$$t := [2, 5, -3, -5]$$

$$t1 := [-21, -50, 52]$$

```
> t2:=matadd((u1,2*v1),w1);
```

$$t2 := [-21, -50, 52]$$

```
> rank(A); colspace(A);
```

$$2$$

$$\left\{\left[0, 1, \frac{-19}{11}\right], \left[1, 0, \frac{18}{11}\right]\right\}$$

```
> kernel(A);
```

$$\{[-2, -3, 0, 1], [-1, -2, 1, 0]\}$$

```
> k1:=vector([-2, -3, 0, 1]);k2:=vector([-1, -2, 1, 0]);
```

$$k1 := [-2, -3, 0, 1]$$

$$k2 := [-1, -2, 1, 0]$$

```
> linsolve(A,vector(3,[-15,2,-28]));
```

$$[\_t_2, 2\,\_t_2 - 6 + \_t_1, -\_t_2 - 1 - 2\,\_t_1, \_t_1]$$

Wir schreiben dieses Ergebnis um: y = (0, -6, -1, 0) + t1 * (0, 1, -2, 1) + t2 * (1, 2, -1, 0)

```
> linsolve(A,vector(3,[1,0,0]));
> U:= matrix(3,4,[u,v,w]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rank(U); rowspace(U);
```

$$3$$

$$\left\{\left[0, 1, 0, \frac{25}{33}\right], \left[0, 0, 1, \frac{62}{33}\right], \left[1, 0, 0, \frac{-52}{33}\right]\right\}$$

```
> U1:=matrix(3,3,[u1,v1,w1]);
```

$$U1 := \begin{bmatrix} 11 & 22 & -20 \\ -16 & -36 & 36 \\ 6 & 52 & -80 \end{bmatrix}$$

```
> rank(U1);rowspace(U1);
```

$$2$$

$$\left\{\left[0, 1, \frac{-19}{11}\right], \left[1, 0, \frac{18}{11}\right]\right\}$$

Der Durchschnitt von U und Kern(f) ist der Kern von U und muss daher eindimensional sein.

Zur Berechnung setzen wir an: r * u1 + s * u2 + t * u3 - x * k1 - y * k2 = 0 mit den erzeugenden Vektoren u von U (s. o.) und den erzeugenden Kernvektoren (s.o.)

```
> B:= transpose(matrix(5,4,[u,v,w,k1,k2]));
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(B,vector(4,[0,0,0,0]));
```

$$\left[\frac{7}{5}\_t_1, \_t_1, \frac{1}{10}\_t_1, \frac{8}{5}\_t_1, \frac{1}{10}\_t_1\right]$$

Man erhält also wie vorhergesagt einen einparametrigen Raum mit -y = 1/10 * t1 und -x = 8/5 * t1, also als Lösungsvektoren (nach Erweiterung mit Faktor -10) x*k1 + y*k2 = t1 * (16 k1 + k2) = **t1 * (-33; -50; 1; 16)**
als Durchschnitt von Kern(f) und U.

Wir überprüfen zur Kontrolle nochmals, ob der Vektor (-33; -50; 1; 16) tatsächlich sowohl in U als auch in Kern(f) liegt:

```
> b:=vector(4,[-33, -50, 1, 16]);
```

$$b := [-33, -50, 1, 16]$$

```
> C:=matrix(4,4,[u,v,w,b]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \\ -33 & -50 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

```
> rank(C);
```

$$3$$

```
> E:=matrix(3,4,[k1,k2,b]);
```

$$E := \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -33 & -50 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

```
> rank(E);
```

$$2$$

Der Rang von U und Kern(f) hat sich also durch Hinzunahme von b nicht vergrößert, also liegt b jeweils in dem betreffenden Raum.

Aufgabenteil h): Urbilder von y' in U: Ansatz: y = (0, -6, -1, 0) + r * (-2, -3, 0, 1) + s * (-1, -2, 1, 0) = x * u1 + y * u2 + z * u3

Dazu ist ein geeignetes inhomogenes Gleichungssystem zu lösen:

```
> F:= transpose( matrix(5,4,[k1,k2,u,v,w]));
```

$$F := \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(F,vector(4,[0,6,1,0]));
```

$$[11 + 16\ \_t_1, 4 + \_t_1, 13 + 14\ \_t_1, 8 + 10\ \_t_1, \_t_1]$$

Man erhält die Lösungen r = 11 + 16 * t und s = 4 + t und damit die Vektoren y = (0, -6, -1, 0) + (11 + 16 * t) * (-2, -3, 0, 1) + (4 + t) * (-1, -2, 1, 0)

```
> [0, -6, -1, 0] + (11 + 16 * t) * [-2, -3, 0, 1] + (4 + t) * [-1,
-2, 1, 0];
```

$$[0, -6, -1, 0] + (11 + 16\,t)\,[-2, -3, 0, 1] + (4 + t)\,[-1, -2, 1, 0]$$

```
> simplify(%);
```

$$[-26, -47, 3, 11] + 16\,[-2, -3, 0, 1]\,t + [-1, -2, 1, 0]\,t$$

Ergebnis: (-26, -47, 3, 11) + t * (-33, -50, 1, 16)

Das Ergebnis leuchtet ein: Man erhält selbstverständlich eine Nebenklasse des Durchschnitts von U mit Kern(f).

Man wählt im R4 zwei Urbilder a1" und a2" der Basisvektoren des Bildraums f(R4) sowie zwei Kernvektoren als Basis. Im Zielraum R3 wählt man erstens die Bilder von a1 und a2 und weiter einen dazu lu Vektor wie z. B. den Vektor b1 aus Aufgabenteil f) als Basisvektoren. Dann wird die Abbildungsmatrix sehr einfach:

```
> M:= matrix(3,4,[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1

A, B seien Teilmengen der Menge X. Man beweise folgende Äquivalenzen:

a) $A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq X \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq X \setminus A$

b) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$

Aufgabe 2

A, B seien Teilmengen der Menge X. Man beweise die de Morganschen Gesetze:

a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

In Worten:

a) nicht (A und B) = (nicht A) oder (nicht B); nicht alle = mindestens eines nicht

b) nicht (A oder B) = (nicht A) und (nicht B); nicht (mindestens eines) = alle nicht

Aufgabe 3

A, B, C seien Mengen. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(C \times C) \cup (A \times B) = (C \cup A) \times (C \cup B)$

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

d) $(C \times C) \cap (A \times B) = (C \cap A) \times (C \cap B)$

Aufgabe 4

Geben Sie auf einer Menge mit 5 Elementen je ein Beispiel einer Relation, die die folgende Eigenschaft hat bzw. diese nicht hat. Zeichnen Sie Pfeilbilder.

a) reflexiv

b) irreflexiv

c) weder reflexiv noch irreflexiv

d) symmetrisch

e) antisymmetrisch (identitiv)

f) weder symmetrisch noch antisymmetrisch

g) transitiv

h) Äquivalenzrelation (RST)

i) Ordnungsrelation (RIT)

Aufgabe 5

Untersuchen Sie folgende Relationen auf geeigneten Grundmengen Ihrer Wahl auf die fünf Relationseigenschaften reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv.

a) Parallelität

b) Senkrechtstehen

c) Ähnlichkeit

d) zahlentheoretische Kongruenzrelation

e) Teilbarkeitsrelation

f) Kleinerrelation

g) Teilmengenrelation

Aufgabe 6

Für die Parallelität sind zwei Definitionen geläufig. Welche ist zu bevorzugen? Begründung?

Def.1: $g \parallel h$, falls $g \cap h = \varnothing$.

Def.2: $g \parallel h$, falls $g = h$ oder falls $g \cap h = \varnothing$.

Aufgabe 7

Geben Sie je ein Beispiel einer Abbildung f aus der Menge A in die Menge B an, die die folgenden Eigenschaften besitzt bzw. nicht besitzt. Zeichnen Sie Pfeilbilder.

a) injektiv b) surjektiv c) bijektiv.

Aufgabe 8

f sei eine Funktion (Abbildung) der Menge X in die Menge Y. $f: X \to Y$.

Man zeige für beliebige Teilmengen A, B von X bzw. C, D von Y:

a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f(X\backslash A) \supseteq f(X)\backslash f(A)$

d) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

f) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

g) $f^{-1}(Y\backslash C) = X\backslash f^{-1}(C)$

h) $f(f^{-1}(C) \subseteq C$

Warum gilt in a) bzw. c) bzw. d) bzw. h) nicht die Gleichheit?

Aufgabe 9

Es seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Funktionen und $h = g \circ f$ (gelesen: g nach f) die Verkettung der Funktionen, also eine Funktion $h: X \to Z$. Man zeige:

a) Sind f und g injektiv, so auch h.

b) Ist h injektiv so auch f.

c) Ist h surjektiv, so auch g.

d) Ist f surjektiv und h injektiv, so ist g injektiv.

e) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv

f) Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aufgabe 10

Es sei $f: X \to Y$ eine Funktion.

Eine Relation R auf X sei erklärt durch folgende Definition: a R b gdw. $f(a) = f(b)$.

Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf der Menge X ist und beschreibe die Äquivalenzklassen von R (Klassen bildgleicher Elemente bzw. vollständige Urbilder von f).

Aufgabe 11

Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige:

a) Ist f injektiv, so gilt $|X| \leq |Y|$

b) Ist f surjektiv, so gilt $|X| \geq |Y|$

c) Ist f bijektiv, so gilt $|X| = |Y|$

Aufgabe 12

Ist $f: X \to X$ eine Abbildung einer *endlichen* Menge X in sich selbst, so gilt:

f injektiv genau dann, wenn f surjektiv gdw. f bijektiv.

Zeigen Sie, dass auf die Forderung der Endlichkeit der Menge X nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 13

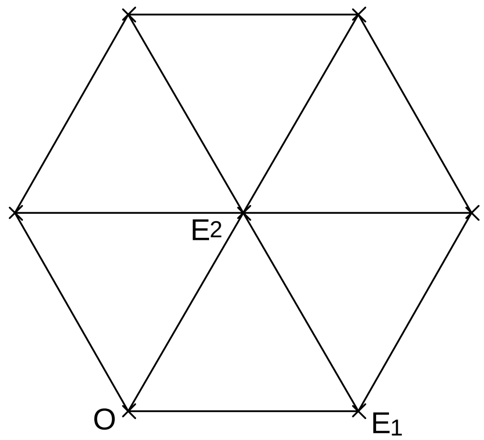
Eine affine Ebene wird durch folgende drei Axiome beschrieben:

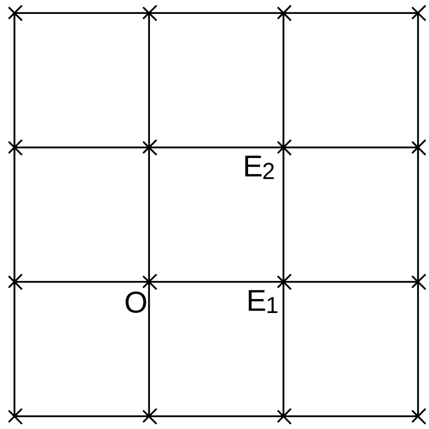
- A1: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.
- A2: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Parallele h zu g durch P.
- A3: Es gibt mindestens drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen.

a) Zeigen Sie, dass jedes der Axiome von den beiden anderen unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass ein Tetraeder die Axiome erfüllt, wenn man die Ecken als Punkte und die Kanten als Geraden interpretiert.

c) Beweisen Sie: In jeder affinen Ebene gibt es mindestens vier Punkte und sechs Geraden.





Aufgabe 14

Obenstehende Abbildungen zeigen je ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken bzw. aus Quadraten. Die Punkte O, E_1 und E_2 bilden jeweils ein ebenes Parallelkoordinatensystem.

a) Konstruieren Sie die Gitter allein mit Zirkel und Lineal.

b) Tragen Sie jeweils die Basisvektoren **i** und **j** rot ein.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Gitterpunkte bezüglich des gegebenen Koordinatensystems. Beschriften Sie die Gitterpunkte mit den Koordinaten z.B. $E_2(0; 1)$.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Vektoren, die man als Verbindung beliebiger Eckpunkte erhält z.B. $\mathbf{E_1E_2}$=(-1; 1).

Aufgabe 15

Gegeben sind zwei Vektoren **a** und **b**.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren **a** + **b**, **b** + **a**, **a** - **b**, **b** - **a**.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Vektoren 2**a** + 3**b**, 2**a** - 3**b**, 3**b** + 2**a**, 3**b** - 2**a**.

c) Bestimmen Sie die Vektoren aus a) und b) in Koordinaten mit **a**=(a_1; a_2) und **b**=(b_1; b_2).

Aufgabe 16

Beweisen Sie vektoriell den Satz von der Mittelparallelen im Dreieck:
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Aufgabe 17

a) Beweisen Sie: Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig halbieren, so sind die Gegenseiten jeweils parallel und gleich lang.

b) Formulieren und beweisen Sie auch die Umkehrung der obigen Behauptung.

c) Begründen Sie die folgende Definition:
Ein Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Aufgabe 18

Ein Parallelogramm OACB wird durch die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ = **a** und $\overrightarrow{OB}$ = **b** aufgespannt.
M_1 bis M_4 sind die Mitten der Seiten OA, AC, CB, BO. M ist Schnittpunkt der Diagonalen.

a) Drücken Sie die Vektoren AB, OC und OM_i durch **a** und **b** aus.

b) Beweisen Sie, dass M beide Diagonalen halbiert.

c) Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte von OM_2 und OM_3 mit der Diagonale AB diese in drei gleiche Teile teilen.

Aufgabe 19

Beweisen Sie vektoriell den Satz von den Seitenhalbierenden (= Schwerlinien) im Dreieck:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

Aufgabe 20

Zeigen Sie vektoriell: *Die Seitenmitten jedes beliebigen (auch nicht ebenen!) Vierecks bilden ein Parallelogramm. Der Mittelpunkt des Mittenparallelogramms ist gleichzeitig Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten.*

Aufgabe 21

Zeigen Sie für ein Tetraeder:

a) Die "Schwerlinien" (das sind die Verbindungen von einer Ecke zum Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) schneiden sich in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien im Verhältnis 3:1.

b) Die drei "Mittellinien" (das sind die Verbindungslinien von Gegenkantenmitten) halbieren sich gegenseitig.

Aufgabe 22

Eine Strecke AB ist durch die Ortsvektoren **a** und **b** ihrer Endpunkte A und B gegeben.
T ist ein Punkt der Strecke AB und teilt diese im Verhältnis x : y.

a) Drücken Sie den Ortsvektor **t** = $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ durch **a** und **b** aus.

b) Ersetzen Sie x : y durch k.

c) Zeichnen Sie für k = 1/2, 3/4, 1, 2, 4.

d) Zeichnen Sie für k = -4, -2, -3/2, -5/4.

e) Zeichnen Sie für k = -1/4, -1/2, -3/4.

f) Rechnen Sie in Koordinaten mit A(0; 0) B(6; 0).

g) Wie ändert sich k, wenn sich T von rechts bzw. von links an A bzw. an B annähert?

h) Zeigen Sie: Erhält man mit k den Teilpunkt T, so erhält man mit -k den vierten harmonischen Punkt S zu A, B und T.

i) Zeigen Sie:
Teilen S und T die Punkte A und B harmonisch im Verhältnis k, so teilen auch A und B die Punkte S und T harmonisch. Bestimmen Sie das zugehörige Verhältnis in Abhängigkeit von k.

Aufgabe 23

a) Zeichnen Sie eine Strecke AB mit 4 cm Länge. (Platzbedarf: 5 cm von A nach links, oben und unten; nach rechts 12 cm). A sei Ursprung, B Einheitspunkt eines eindimensionalen Koordinatensystems (Gerade AB als x-Achse).

b) Bestimmen Sie zu den gegebenen Teilverhältnissen k die Koordinate x des zugehörigen Teilpunkts T und umgekehrt. Füllen Sie die Tabelle aus.

k = TV(ATB)	-1	-1/2	0	1/5					1	5/4		2	3
x_T					1/3	1/2	1	3			-3		

c) Tragen Sie k als Hochwert über der x-Achse ab. Sie erhalten die Teilverhältnisfunktion.

d) Berechnen Sie aus den Koordinaten 0, 1 und x der Punkte A, B und T den Wert des zugehörigen Teilverhältnisses k = TV(ATB). Lösen Sie auch nach x auf.

e) Wie verändert sich das Teilverhältnis k = TV(ATB), wenn man die Reihenfolge der Punkte A, T, B permutiert? Wie ergibt sich z. B. TV(BTA) aus TV(ATB)?

Aufgabe 24

Geben Sie mit Hilfe von Verknüpfungstafeln Beispiele für

a) ein zwar kommutatives aber nicht assoziatives Verknüpfungsgebilde

b) ein zwar assoziatives aber nicht kommutatives Verknüpfungsgebilde

c) ein weder assoziatives noch kommutatives Verknüpfungsgebilde.

Aufgabe 25

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) In beliebigen Verknüpfungsgebilden gibt es höchstens ein Neutralelement.

b) In Halbgruppen gibt es zu einem Element a höchstens ein inverses Element.

c) In Halbgruppen gilt (vorbehaltlich der Existenz): $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

d) Ist jedes Element einer Gruppe selbstinvers, so ist die Gruppe kommutativ.

e) Eine nichtleere *endliche* Teilmenge U einer Gruppe G ist schon dann Untergruppe, falls U abgeschlossen ist.

f) Für eine beliebige natürliche Zahl m gilt: Die von der Nullrestklasse verschiedenen Restklassen mod m bilden bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Gruppe.

Aufgabe 26

Stellen Sie Verknüpfungstafeln auf und prüfen Sie auf Gruppeneigenschaften:

a) Restklassenaddition mod 2, mod 3, mod 4, mod 5, mod 6, mod 7.

b) Restklassenmultiplikation (ohne 0) mod 2, mod 3, mod 4, mod 5, mod 6, mod 7.

c) Deckabbildungen eines Rechtecks mit der Verkettung als Verknüpfung.

d) Deckdrehungen eines regelmäßigen Sechsecks mit der Verkettung als Verknüpfung.

e) Permutationen einer dreielementigen Menge M = {a, b, c} mit der Verkettung als Verknüpfung.

f) Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Verkettung als Verknüpfung.

g) Sämtliche möglichen Verkettungen der beiden reellen Funktionen f und g untereinander

$$f\colon\ x \to \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g\colon\ x \to \frac{-1}{1+x}$$

Aufgabe 27

Es sei (U, *) eine Untergruppe einer Gruppe (G, *).

a) Zeigen Sie: Die Relation a R b, gdw. $a * b^{-1} \in U$, ist eine Äquivalenzrelation in G.
Weisen Sie nach, dass die Äquivalenzklassen der Relation R genau die Rechtsnebenklassen von U in G sind. R heißt Rechtskongruenz mod U in G.

b) Zeigen Sie: Die Relation a L b, gdw. $a^{-1} * b \in U$, ist eine Äquivalenzrelation in G.
Weisen Sie nach, dass die Äquivalenzklassen der Relation L genau die Linksnebenklassen von U in G sind. L heißt Linkskongruenz mod U in G.

c) Vergleichen Sie die zahlentheoretische Kongruenzrelation mod m mit der Rechts- bzw. Linkskongruenz mod U, wobei U = m Z (= Vielfachenmenge von m) in der Gruppe (Z, +) der ganzen Zahlen.

Aufgabe 28

a) Stellen Sie Verknüpfungstafeln auf für die Restklassenkörper mod 2, mod 3 und mod 5.

b) Konstruieren Sie Verknüpfungstafeln für einen Körper mit vier Elementen.
Hinweis: Die additive Gruppe ist eine Kleinsche Vierergruppe und die multiplikative Gruppe ist eine zyklische Dreiergruppe.

Aufgabe 29

a) Gegeben sind A(-3; 5) und B(3; -4). Bestimmen Sie die Teilpunkte für die Teilverhältnisse TV(ATB) = 0,5 bzw. TV(ASB) = - 0,75. Kontrollergebnisse: T(-1; 2), S(-21; 32).

b) Gegeben sind die kollinearen Punkte A(3; -5), B(-1; 0) und C(0,6; -2). Bestimmen Sie den vierten harmonischen Punkt D, so dass AB und CD harmonisch liegen, also TV(ACB) = - TV(ADB) ist. Zeigen Sie, dass dann auch gilt: TV(CAD) = - TV(CBD). Kontrollergebnis: D(-9; 10).

c) Gegeben A(1; 1,6) und T(5; 4). Gesucht B, so dass TV(ATB) = 0,4. Kontrollergebnis: B(15; 10).

d) Man teile die Strecke AB mit A(-9; 15; -2) und B(-12; -6; 4) in drei gleiche Teile. Kontrollergebnis: P(-11; 1; 2), Q(-10; 8; 0).

Aufgabe 30

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(0; 0), B(7; 0) und C(4,5; 6) in einem *kartesischen* Koordinatensystem. Legen Sie eine Kontrollzeichnung an.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Teilpunkt T auf AB für das TV(ATB) = λ = 15/13. Zeigen Sie: T liegt auf der Winkelhalbierenden von c.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt R der Winkelhalbierenden von a mit BC. In welchem Verhältnis μ teilt R die Strecke BC?

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt J von AR mit CT.

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von AC mit BJ. In welchem Verhältnis ν = TV(CSA) teilt S die Strecke CA?

f) Zeigen Sie, dass BS Winkelhalbierende von b ist.

g) Bestätigen Sie am vorliegenden Beispiel folgende Sätze:

*Satz von Ceva: Drei Ecktransversalen AR, BS und CT eines Dreiecks ABC sind genau dann kopunktal, wenn gilt: TV(ATB) * TV(BRC) * TV(CSA) = 1.*

Satz von der Winkelhalbierenden: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Satz von der Inkreismitte: Die Winkelhalbierenden im Dreieck sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt ist die Inkreismitte.

h) In welchem Verhältnis teilt J die Strecken AR, BS und CT?

Kontrollergebnisse: T(15/4; 0), R(168/29; 84/29), S(7/3; 28/9), J(4; 2).

Aufgabe 31

Beweisen Sie folgende Sätze über **Lineare Abhängigkeit** von Vektoren:

a) Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, so ist sie sicher linear abhängig.

b) Ist eine Menge von mindestens zwei Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen Vektor in der Menge, der sich aus den übrigen linear kombinieren lässt.

c) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge von Vektoren ist linear abhängig.

d) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ist linear unabhängig.

e) Ist $\mathbf{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig.

f) Ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ linear abhängig, so lässt sich $\mathbf{b}$ linear aus den $\mathbf{a}_i$ kombinieren.

g) Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig und $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ ebenfalls linear unabhängig.

Gegeben sei der **Körper (R, +, *)** der reellen Zahlen mit den Körpereigenschaften:

K1: (R, +) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0.
K2: (R\{0}, *****) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 1.
K3: Es gilt das Distributivgesetz: a ***** (b + c) = a ***** b + a ***** c .

Ein **Vektorraum (V, #, •)** über dem Körper (R, +, *) mit nichtleerer Menge V von Vektoren ist ein Gebilde mit folgenden Axiomen:

V1: **(V, #) ist eine kommutative Gruppe mit Neutralelement 0 (Vektormodul).**

V2: **• ist eine Abbildung von R × V in V mit folgenden Eigenschaften (S-Multiplikation):**

S1: r • **(**s • **v)** = **(**r ***** s**)** • **v** **S2:** **(**r + s**)** • **v** = (r • **v)** # **(**s • **v)**

S3: r • **(v** # **w)** = **(**r • **v)** # **(**r • **w)** **S4:** 1 • **v** = **v**

Aufgabe 32

a) Beweisen Sie das **Untergruppenkriterium**:
Eine nichtleere Teilmenge T einer Gruppe (G, *) ist bereits dann Untergruppe, wenn gilt:
U1: T ist abgeschlossen, d. h. mit a und b ist auch a * b in T und
U2: T enthält mit jedem Element a auch das Inverse a^{-1} zu a.

b) Zeigen Sie, dass für endliche Teilmengen T bereits die Forderung U1 allein genügt.

c) Beweisen Sie das **Untervektorraumkriterium**:

Eine nichtleere Teilmenge W eines reellen Vektorraums (V, #, •) ist bereits dann ein Untervektorraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

UVR1: W ist abgeschlossen bez. der Vektoraddition # und
UVR2: W ist abgeschlossen bez. der S-Multiplikation,
d. h. mit **v** aus W gilt auch r • **v** aus W für jede reelle Zahl r.

d) Beweisen Sie, dass für jeden Vektorraum gilt:

(1) 0 • **a** = **0** für beliebige Vektoren **a**
(2) r • **0** = **0** für beliebige reelle Zahlen r
(3) (– r) • **a** = – (r • **a**) für beliebige reelle Zahlen r und Vektoren **a**
(4) Aus r • **a** = **0** folgt r = 0 oder **a** = **0**.

Aufgabe 33

Beweisen Sie folgende Sätze über *homogene* lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

a) Ist **x** ein Lösungsvektor, so auch r • **x** für beliebiges reelles r.

b) Sind **x** und **y** Lösungsvektoren, so auch **x # y** und sogar (r • **x) #** (s • **y**) für beliebige r, s.

c) Die Lösungsvektoren eines homogenen LGS bilden einen Vektorraum (siehe Nr. 32 c)).

Aufgabe 34

Eine Abbildung f eines Vektorraums V in einen Vektorraum W heißt **linear**, wenn gilt:

f(x # **y) = f(x)** # **f(y)** und **f(**r * **x) =** r * **f(x)** für beliebige Vektoren **x**, **y** und Zahlen r.

a) Zeigen Sie: f(**0**) = **0** f(-**x**) = - f(**x**)

b) Zeigen Sie: f((r * **a)** # (s * **b)**) = r * f(**a**)) # (s * f(**b**).
In Worten: Bild einer Linearkombination = Linearkombination der Bilder.

c) Zeigen Sie: Die Menge aller Vektoren **k** aus V, für die gilt f(**k**) = **0** bildet einen Untervektorraum U von V. Dieser heißt der **Kern** von f.
Ist **k** ein Kernvektor so gilt: f(**x** # **k**) = f(**x**).

d) Gilt f(**x**) = f(**y**) so unterscheiden sich **x** und **y** nur durch einen Kernvektor, es gilt also **x - y = k** wobei **k** ein Kernvektor ist.

e) Die Klassen bildgleicher Elemente unter f sind genau die Nebenklassen des Kerns.

Aufgabe 35

Zeigen Sie für beliebige Vektorräume:

a) $k * \mathbf{a} = \mathbf{0}$ gilt genau dann, wenn $k = 0$ oder $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

b) Beweisen Sie das Untervektorraumkriterium.

c) Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist ein Vektorraum.

d) In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jedes linear unabhängige System von n Vektoren eine Basis.

e) Sind U_1 und U_2 zwei Teilräume so ist die Vereinigung von U_1 und U_2 genau dann wieder ein Teilraum, wenn U_1 Teilmenge von U_2 oder U_2 Teilmenge von U_1 ist.

Aufgabe 36

Sind folgende Mengen lineare Teilräume des R^3?

a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$ b) $B = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \}$

Aufgabe 37

a) Kombinieren Sie $\mathbf{b} = (0; 4; -2)$ linear aus $\mathbf{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1; 2; 0)$ und $\mathbf{a}_3 = (0; 1; -1)$.

b) Ist $\mathbf{b}_1 = (3; -1; 1)$ bzw. $\mathbf{b}_2 = (-1; 1; 0)$ linear abhängig von $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 1)$ und $\mathbf{a}_2 = (0; 2; 1)$?

Aufgabe 38

Im R^3 sind folgende Mengen gegeben:

$U_1 = \{(1; 3; 0), (-2; 1; 2)\}$, $U_2 = \{(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 1{,}5)\}$,

$U_3 = \{(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)\}$, $U_4 = \{(3; 5; 2), (1; 1; 1), (3; 6; 2), (8; 13; 6)\}$.

a) Welche dieser Mengen sind linear unabhängig, welche bilden eine Basis des R^3?

b) Bestimmen Sie jeweils den Rang und eine Basis der von den Mengen aufgespannten Räume.

c) Geben Sie ein System von n+1 Vektoren des K^n an, von denen je n linear unabhängig sind. K sei dabei ein beliebiger Körper.

Aufgabe 39

a) Zeigen Sie, dass $U = \{(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)\}$ eine Basis des R^3 ist.

b) Ersetzen Sie nach dem Austauschsatz von Steinitz zwei Vektoren in U durch die Vektoren $\mathbf{b}_1 = (1; 3; 0)$ und $\mathbf{b}_2 = (-2; 1; 2)$.

Aufgabe 40

Stellen Sie den Vektor $\mathbf{b} = (1; 3; 0)$ des R^3 bezüglich der beiden Basissysteme U_1 und U_2 dar: $U_1 = \{(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)\}$ und $U_2 = \{(3; 5; 2), (1; 1; -1), (2; 4; 1)\}$.

Aufgabe 41

$A = \{(1; 3; -2; 4), (-1; -1; 5; -9), (2; 0; -13; 23), (1; 5; 1; -2)\}$

$B = \{(2; 3; -1; 0), (-4; 5; 0; 1), (6; -2; 2; -2), (-2; 8; 1; 3)\}$

a) Stellen Sie die Vektoren jeweils als Zeilenvektoren einer Matrix dar.

b) Berechnen Sie jeweils den Zeilenrang und eine Basis für den von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraum.

c) Berechnen Sie jeweils den Spaltenrang und eine Basis für den von den Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 42

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des von folgenden Vektoren aufgespannten Unterraumes des R^5: (1; 1; 0; 1; 1), (0; 0; 1; 1; 0), (0; 1; 0; 0; 0),.(1; 0; 0; 1; 1),.(1; 0; 1; 0; 1).

Aufgabe 43

Gegeben sind die Punkte P(-1; 3), Q(1; -1) und R(1; 5) in einem Parallelkoordinatensystem. Führen Sie eine Kontrollzeichnung neben Ihrer Rechnung.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade PQ (Parameterdarstellung und Koordinatengleichung). Ermitteln Sie die Schnittpunkte X und Y von g mit den Koordinatenachsen. In welchem Verhältnis teilen X bzw. Y die Strecke PQ?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung von h = QR an. Beschreiben Sie die besondere Lage von h. Wie und in welchem Verhältnis teilt die x-Achse die Strecke QR?

c) Bestimmen Sie den Punkt T auf PR mit dem TV(PTR) = - 0,6. Ermitteln Sie den vierten harmonischen Teilpunkt U für die Strecke PR.

d) Eine Gerade k hat die Achsenabschnitte s = 2,5 auf der x-Achse und t = - 2,5 auf der y-Achse. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von k mit ganzzahligen Koeffizienten. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von k und zeigen Sie, dass k zu PR parallel ist.

e) Berechnen Sie die Seitenmitten und den Schwerpunkt des Dreiecks PQR. Bilden Sie das Dreieck PQR durch Punktspiegelung am Schwerpunkt S ab auf das Dreieck P'Q'R'. Zeigen Sie, dass S auch Schwerpunkt von Dreieck P'Q'R' ist.

f) Es sei r die Schrägspiegelung an der Geraden g in Richtung der Geraden k. Durch r geht die Gerade h in h^* über. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung, eine Koordinatengleichung und die Achsenabschnitte von h^*.

g) Die Gerade a habe folgende Eigenschaft: Schrägspiegelung an a in Richtung g bildet die x-Achse auf die y-Achse ab. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung für a.

Aufgabe 44

Gegeben sind die Ebene E...2x - 3y - 6z + 12 = 0 und die Gerade g... **x** = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1).

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden der Ebene E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen. Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen. (Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen).

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen. Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den v = - 2w gilt. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse TV(BAC), TV(CBA) und TV(ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r; s; t) auf P'(r'; s'; t') ab. Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an. Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist. Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

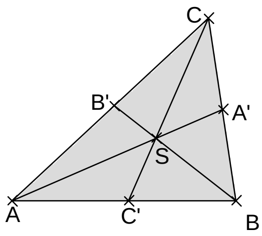
f) Gegeben ist die Gerade h... **x** = (6; - 6; 7) + t * (3; 2; 0). Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Aufgabe 45

Beweisen Sie den **Satz von Ceva**:

*Sind AA', BB' und CC' kopunktale (!) Ecktransversalen im Dreieck ABC, so gilt: TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = 1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?



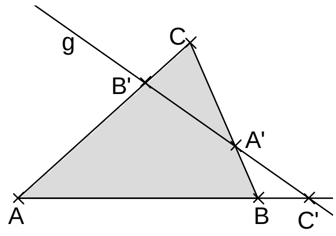
Aufgabe 46

Beweisen Sie den **Satz von Menelaos**:

Sind A', B' und C' drei kollineare (!) Punkte auf den drei Seitengeraden des Dreiecks ABC, so gilt:

*TV(AC'B) * TV(BA'C) * TV(CB'A) = -1.*

Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Formulieren Sie diese. Beweisidee?



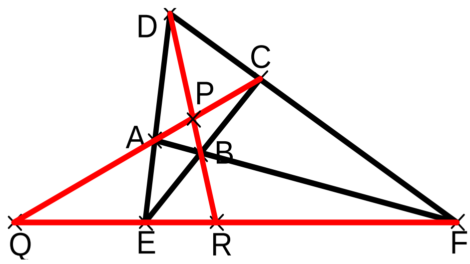
Aufgabe 47

Beweisen Sie den **Satz vom vollständigen Vierseit**:

Auf jeder Diagonalen werden die Ecken des Vierseits durch die beiden Diagonalpunkte harmonisch getrennt:

Also z. B. TV(APC) = – TV(AQC) usf.

Hinweis: Benutzen Sie Ceva mit Punkt B und Menelaos mit Gerade CAQ für Dreieck DEF.



Aufgabe 48

Das Fünfeck ABCDE mit A(7; 4; 0), B(3; 4; 0), C(3; 4; 2), D(5; 4; 4,5) und E(7; 4; 2) ist Grundfläche eines Prismas, dessen Kanten parallel zur y-Achse verlaufen. Die Ebene (E) enthält die Punkte A, B und G(5; 1; 4,5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Prismenkanten mit der Ebene (E).
Zeichnen Sie ein Schrägbild (a = 45°; k = 0,5). Deuten Sie die Figur als Bild einer Dachgaube.

Aufgabe 49

Die Gerade g enthält die Punkte A(2; 1; 3) und B(2; 0; 4), die Gerade h die Punkte C(2; 1; 7) und D(4; 0; 7). Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.
Welche Ebene (E) enthält die Gerade g und den Punkt P(8; 8; 5)?
Welche Gerade t durch P trifft sowohl die Gerade g als auch die Gerade h?
Ermitteln Sie die zugehörigen Schnittpunkte G und H.

Aufgabe 50

Die Ebene (E) geht durch die Punkte A(-5; 1; -2), B(-4; 3; -2) und C(-5; 3; -1).
Die Gerade g enthält die Punkte D(1; -3; 1) und E(3; -4; 4), h die Punkte F(2; -5; 3) und G(4; 3; 5) und k die Punkte H(-6; -3; -3) und K(-1; 3; -5).
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene (E) mit den Geraden g, h und k.

Aufgabe 51

Die Gerade g geht durch A(5; -10; 6) und B(5; -5; 4). Für a ∈ R ist $D_a(a + 3; 10; 2)$ gegeben.
Die Gerade h_a geht durch C(3; 0; -2) und D_a.
Für welche a schneiden sich g und h_a, für welche a sind g und h_a parallel?
Zeigen Sie: Alle D_a liegen auf einer Gerade und alle Geraden h_a liegen in einer Ebene.

Aufgabe 52

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A * B, B * A, C * D und D * C. (Kontrolle mit Computerprogramm!).

Aufgabe 53

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Geraden im R^2 ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Dreiecksecken: g ... x + 3y = 5 h ... 3x + 2y = 8 i ... 2x - 2y = - 6.

Ergebnis: P(2; 1), Q(-1; 2), R(2/5; 17/5).

Aufgabe 54

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der folgenden vier Ebenen des R^3. Zeigen Sie, dass die Ebenen einem Ebenenbüschel (alle Ebenen durch eine gemeinsame Gerade als Achse) angehören und bestimmen Sie die Büschelgerade.

E ... x + 4y - 2z = 3 F ... 3x + 2y = 1 G ... 4x + y + z = 0 H ... 3x - 8y + 6z = - 7

Ergebnis: Achse a... **x** = (-1/5; 4/5; 0) + t * (-2; 3; 5)

Aufgabe 55

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die Inversen. Kontrollieren Sie mit einem Rechner.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 56

a) Lösen Sie das *homogene* lineare Gleichungssystem mit der untenstehenden Koeffizientenmatrix A. Ergebnis: **x** = t * (1; -2; 3; 2).

b) Lösen Sie die *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme mit den untenstehenden erweiterten Matrizen B bzw. C.
Ergebnisse: B...**x** = (2; -3; 5). C...**x** = (-3; 0; -3; 0) + r * (-3; 1; 0; 0) + t * (5; 0; 2; 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right)$$

Aufgabe 57

Gegeben sind die drei linearen Gleichungssysteme (I), (II) und (III) mit derselben Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{array}{rccc} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 & = 1 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 & = 1 & = 1 \\ 4x_2 + tx_3 & = 0 & = 2 & = 1 \\ & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \end{array}$$

a) Lösen Sie die drei Gleichungssysteme durch elementare Umformungen in einem Arbeitsgang. Ermitteln Sie die Lösungsmenge von (I) in Abhängigkeit von t.

b) Für welche t besitzen (II) bzw. (III) Lösungen, für welche sogar eindeutige? Für welche t sind (II) bzw. (III) unlösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösungsmengen von (II) und (III) in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 58

$$
\begin{array}{lrr|llll}
2x_1 - 3x_2 + 5x_3 & & = & t+3 & = & t-3 \\
10x_1 + 4x_2 - 13x_3 & & = & -4 & = & 4 \\
14x_1 - 2x_2 + (t-5)x_3 & = -2 & = & 2 & & \\
 & & & \text{(I)} & & \text{(II)}
\end{array}
$$

a) Formen Sie die Koeffizientenmatrix und beide rechte Spalten I und II in einem Arbeitsgang in Dreiecksform (Staffelform) um. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der beiden Systeme für $t = 0$.

c) Ermitteln Sie alle Lösungen der beiden Systeme, für welche $x_3 = 0$ ist.

d) Für welchen Wert t_1 von t besitzt das homogene System einen eindimensionalen Lösungsraum? Bestimmen Sie diesen Lösungsraum.
Beschreiben Sie den Lösungsraum des homogenen Systems für $t \neq t_1$.

e) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Wert t_2 von t, für den das System (I) keine Lösung besitzt.
Geben Sie t_2 an. Wie viele Lösungen besitzt das System (I) im Falle $t \neq t_2$?

f) Bestimmen Sie für $t = 2$ die Lösungsmenge des Systems (II).
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von (II) für $t \neq 2$.

Aufgabe 59

Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem mit dem reellen Parameter t:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & - & z & = & 1 \\
2x & + & 3y & + & tz & = & 3 \\
x & + & ty & + & 3z & = & 2
\end{array}
$$

.

Es sei $\mathbf{L}_t$ die Lösungsmenge dieses inhomogenen Gleichungssystems und $\mathbf{H}_t$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

a) Ermitteln Sie die Lösungsmengen $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ zu den Parametern $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$.
Was folgt hieraus jeweils für die Lösungsmengen $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$?

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte t^* von t, für welche das *homogene* System nicht nur die triviale Lösung besitzt.
Bestimmen Sie die zu diesen Werten t^* gehörenden Lösungsmengen $\mathbf{H}_{t^*}$.

c) Für welche Werte t besitzt das gegebene *inhomogene* Gleichungssystem

(1) genau eine Lösung,

(2) mehr als eine Lösung,

(3) keine Lösung ?

Zur Begründung können bisherige Resultate herangezogen werden.

Aufgabe 60 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Die Gleichung **A * x** = **y** mit gegebener Matrix **A** vom Typ (m, n) = (2; 3) und Vektoren **x** aus R^n bzw. **y** aus R^m kann man interpretieren als Abbildung f, die jedem Vektor **x** aus R^n einen Vektor **y** aus R^m zuordnet.
Die Lösungen von **A * x = 0** bzw. **A * x = b** ergeben dann die vollständigen Urbilder des Nullvektors (das ist der **Kern** der genannten Abbildung) bzw. des Vektors **b**.

a) Bestimmen Sie für die gegebene Matrix **A** die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ = (1; 0; 0), $\mathbf{e}_2$ = (0; 1; 0) und $\mathbf{e}_3$ = (0; 0; 1) sowie der Vektoren **u** = (3; 1; 0) und **v** = (6; 2; 1).

b) Bestimmen Sie den Kern der durch **A** vermittelten Abbildung f, also die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems **A * x = 0**.

c) Bestimmen Sie die vollständigen Urbilder der Bildvektoren **b** = (7; 8) und **c** = (18; 20). Zeigen Sie, dass es sich jeweils um eine Nebenklasse des Kerns handelt.

d) Beweisen Sie, dass die obige Abbildung f **linear** ist, dass also gilt:

e) **f(x + y) = f(x) + f(y)** und **f(**k *** x) =** k *** f(x)**.
Was ist demnach das Bild des Vektors w(1; 1; 1)?

Aufgabe 61 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie den Kern sowie die Urbilder der Vektoren **b** = (1; 1; 2) und **c** = (1; 1; 1) bei der durch die Matrix **A** gegebenen linearen Abbildung in Abhängigkeit vom Parameter t.

b) Bestimmen Sie die Bilder der Einheitsvektoren bei der gegebenen Abbildung.

Ergebnisse: t = 1: Kern ist s * (-1; -1; 4); **b** besitzt kein Urbild; Urbild von **c** ist (1/4; 1/4; 0) + Kern.
$t \neq 1$: Kern ist **0**; Urbilder eindeutig: 1/(4t-4) * (t - 2; t – 2; 4) bzw. (1/4; 1/4; 0).

Aufgabe 62

Es sei f eine lineare Abbildung von V in W. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Das Bild des Nullvektors aus V ist der Nullvektor in W.

b) Das Bild einer la-Teilmenge von V ist eine la-Teilmenge von W.

c) Das Urbild einer lu-Teilmenge von W ist eine lu-Teilmenge von V.

d) Das Bild von V ist ein Unterraum von W.

e) Das Bild irgendeines Unterraumes von V ist ein Unterraum von W.

f) Das Urbild eines Unterraums von W ist stets ein Unterraum von V.

g) Die Dimension des Bildraums von V ist höchstens gleich der Dimension von V.

h) Der Kern von f ist ein Unterraum von V.

i) Das Urbild f^{-1}(**w**) eines Vektors **w** aus W ist eine Nebenklasse des Kerns: M = **v** + Kern(f).

Aufgabe 63

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen über eine lineare Abbildung f: V $\rightarrow$ W:

(10) f ist bijektiv (also injektiv und surjektiv).

(11) Rang f = dim V = dim W.

(12) Ist {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$} eine Basis von V, so ist {f($\mathbf{b}_1$), f($\mathbf{b}_2$), ..., f($\mathbf{b}_n$)} eine Basis von W.

Hinweis: In diesem Falle nennt man f einen **Vektorraumisomorphismus** und die Räume V und W sind isomorph.

Aufgabe 64

Eine lineare Abbildung z: $R^3 \to R^4$ ist durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren bestimmt:
$z(\mathbf{e}_1) = (1; -3; 2; 4)$, $z(\mathbf{e}_2) = (5; -3; 0; 2)$, $z(\mathbf{e}_3) = (-2; 0; 1; 1)$.
Bestimmen Sie den Kern, den Rang und den Defekt der Abbildung z.

Aufgabe 65

a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1; 0; 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1; 2; 1)$ bzw. durch $\mathbf{b}_1 = (1; 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1; -1)$ je eine Basis des R^3 bzw. des R^2 gegeben ist.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt bezüglich der kanonischen Basen des R^3 und des R^2 eine lineare Abbildung φ: $R^3 \to R^2$.
Welche Matrix hat φ bezüglich der Basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ des R^3 und $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ des R^2?
Welche Koordinaten hat der Bildvektor des Vektors (4; 1; 3) hinsichtlich der Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$?

Aufgabe 66

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ Die Matrix M beschreibt eine lineare Abbildung φ: V $\to$ W.

$\mathbf{a} = (3; 2; 1; 1)$, $\mathbf{b} = (1; 0; -2; -3)$, $\mathbf{c} = (-2; 5; 5; 0)$ sind drei Vektoren aus V.

a) Bestimmen Sie den Rang von φ und die Bilder von **a**, **b** und **c**.

b) Welche Dimension besitzt der von **a**, **b** und **c** aufgespannte Unterraum U und welche Dimension besitzt sein Bild φ(U)?

Aufgabe 67 φ

$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ bzw. $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ seien Basis des R^4 bzw. des R^3.

Durch $\varphi(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 - 12\mathbf{b}_3$ $\quad\varphi(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$

$\varphi(\mathbf{a}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ $\quad\varphi(\mathbf{a}_4) = 4\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2 - 9\mathbf{b}_3$

ist eine lineare Abbildung z: $R^4 \to R^3$ bestimmt.

a) Ermitteln Sie die Bildvektoren zu $\mathbf{u} = (2; 3; 1; 1)$, $\mathbf{v} = (0; 1; -2; -3)$ und $\mathbf{w} = (5; -2; 5; 0)$.
Berechnen Sie außerdem das Bild $\varphi(\mathbf{t})$ des Vektors $\mathbf{t} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

b) Geben Sie die Abbildungsgleichungen für φ an. Warum kann φ nicht injektiv sein?

c) Ermitteln Sie Rang und Kern der Abbildung φ. Geben Sie eine Basis des Kerns an.
Folgern Sie, dass φ auch nicht surjektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Menge Y aller Urbilder von $\mathbf{y'} = -15\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 28\mathbf{b}_3$ in R^4.
Zeigen Sie, dass es zu $\mathbf{z'} = 11\mathbf{b}_1$ und damit auch zu $\mathbf{b}_1$ kein Urbild in R^4 gibt.

e) Es sei U der von **u**, **v** und **w** aus a) aufgespannte Unterraum des R^4. Ermitteln Sie die Dimensionen von U und von φ (U). Was folgt hieraus über den Unterraum U $\cap$ (Kern φ)?
Geben Sie eine Basis von U $\cap$ (Kern φ) an.

f) Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die zu U gehörenden Urbilder des Vektors **y'** aus d).

g) Ermitteln Sie eine Basis $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$ des R^4 und eine Basis $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ des R^3, so dass die lineare Abbildung φ bezüglich dieser Basen durch eine Matrix der Gestalt

$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Welche Werte nehmen a, b und c dabei an?

Aufgabe 68

Durch die Gleichung **x' = A * x + c** mit Matrix **A** = $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ und Vektor **c** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ wird eine affine Punktabbildung des R^2 in sich definiert.

a) Berechnen Sie die Bilder der Punkte A(1; 0); B(0; 1); C(1; 1); D(0; 0); E(-5; 0).
Fertigen Sie eine Zeichnung an und tragen Sie Ihre Ergebnisse ein.
b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung.
c) Die zur obigen Punktabbildung gehörige Vektorabbildung wird durch die homogene Transformation **x' = A * x** beschrieben. Berechnen Sie den Kern der Abbildung.
d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren dieser Vektorabbildung. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis in b). Welche geometrischen Schlüsse können Sie über die Art der Abbildung aus ihren Ergebnissen ziehen?
e) Bestimmen Sie eine Normalform der angegebenen Punktabbildung durch Wahl eines problemangepassten Koordinatensystems. Gehen Sie dazu in zwei Schritten vor:
f) Wahl eines Fixpunkts als neuen Koordinatenursprung.
g) Wahl der erhaltenen Eigenvektoren als neue Basisvektoren.
h) Von welcher einfachen Form wird die Abbildungsmatrix im neuen Koordinatensystem?

Aufgabe 69 **A** = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ **a** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A beschreibt eine lineare Abbildung z des R^4 in den R^3.

a) Ermitteln Sie die Bilder von **a**, **b** und **c** sowie die Dimension und eine Basis von z(U).
b) Bestimmen Sie den Kern der durch A vermittelten Abbildung.
c) Berechnen Sie das Urbild des Vektors (1; -5; 2).
d) Zeigen Sie, dass keiner der kanonischen Basisvektoren des R^3 bei z ein Urbild im R^4 besitzt.
e) Warum ist die Frage nach Eigenvektoren in diesem Fall nicht sinnvoll?

Aufgabe 70 **A** = $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **C** = $\begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}$ **A'** = $\begin{pmatrix} -t & -2 \\ 6 & 7-t \end{pmatrix}$

a) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^2 in sich. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist.
Hinweis: Benutzen Sie die einschlägigen Sätze.
b) Bestimmen Sie die **Eigenvektoren** der durch A vermittelten Abbildung, also die Vektoren **x** mit der Eigenschaft **x**' = A * **x** = t * **x**. (Hinweis: Dazu ist das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix A' nichttrivial zu lösen. Benützen Sie ein Computerprogramm.)
Ergebnisse: t = 4 ergibt (-1; 2) und t = 3 ergibt (-2; 3).
c) Wählen Sie nun die beiden in b) berechneten Eigenvektoren als Basis des R^2 und stellen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis auf.
d) Verfahren Sie mit den Matrizen B und C, die Abbildungen des R^3 in sich darstellen, gemäß a) bis c). Ergebnisse: B: t = 2: (1; 0; 0), t = 4: (0; 0; 1), t = 1: (15; - 1,5 ; 1)
C: t = 18: (2; 1;0), t = 27: (0,5; 0; 1), t = 9: (0; 2; 1).

Aufgabe 71

$x + y - z = b$	Lassen sich reelle Zahlen a und b so bestimmen, dass das
$x - ay - z = 2a$	gegebene Gleichungssystem a) keine
$2x + y = b+2$	b) genau eine c) unendlich viele Lösungen besitzt?
$x + z = 2$	Geben Sie eine vollständige Übersicht über alle möglichen Fälle und die zugehörigen Lösungen.

Ergebnisse: $a = -1$: nur lösbar falls $b = -2$: $(0; 0; 2) + s * (1; -2; -1)$.

$a \neq -1$: eind. Lösung $1/(2 * a + 2) * [a * (b + 4) + 2; 2 * (b - 2a); 2 - b * a]$

Aufgabe 72

$2x_1 + ax_2 + x_3 + 4x_4 = -2$	Für welche reellen Werte a bzw. b hat das **gegebene**
$5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$	Gleichungssystem **a) keine** **b) genau eine**
$x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$	c) unendlich viele Lösungen?
$-x_2 + 2x_3 + 5x_4 = b$	Geben Sie eine vollständige Lösungsübersicht.

Ergebnisse: $a = 0$: eindeutig lösbar $1/11 * (b - 26 ; 48 - 12b ; 14 + 2b ; 4 - b)$

$a \neq 0$: $a = 1/2$: $b = 4$: Lösung einparametrig: $(0; -4; 0; 0) + s * (-1; 2; 1; 0)$

$b \neq 4$: keine Lösung.

$a \neq 1/2$: eind. Lösung: $1/(11*(2a-1)) * (26-10ab-4a-b; 12(b-4); 4a(4b-5)-2(b+7); (2a-1)(4-b))$.

Aufgabe 73 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

Die vorstehende Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung des R^4 in sich und zwar bezüglich der kanonischen Basis.

a) Bestimmen Sie den Bildraum der linearen Abbildung sowie eine zugehörige Basis.

b) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung sowie die Urbilder der folgenden Vektoren:
a = (1; 1; 1; 1); **b** = (4; -14; -8; 8); **c** = (1; 0; 0; 0); **d** = (2; 2; -22; -14).

c) Bestätigen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 74

Die Abbildungsgleichung $f(x; y; s; t) = (x - y + s + t; x + 2s - t; x + y + 3s - 3t)$ definiert eine lineare Abbildung des R^4 in den R^3.

a) Berechnen Sie die Bilder der kanonischen Basisvektoren sowie der Vektoren
u = (1; 2; 3; 4) und **v** = (1; 1; 1; 1).
Geben Sie die Matrix A dieser linearen Abbildung f an.

b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildraums $W = f(R^4)$.

c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns K der Abbildung f.
Kontrollergebnis: Kern = k * (2; 1; -1; 0) + **l** * (1; 2; 0;1)

d) Bestätigen Sie den Dimensionssatz über lineare Abbildungen.

e) Ermitteln Sie jeweils das vollständige Urbild der Vektoren **r'** = (1; 2; 3) und **s'** = (1; 1; 0).

f) Ergänzen Sie die beiden kanonischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ des R^4 durch zwei Kernvektoren zu einer Basis des R^4.

g) Zeigen Sie, dass $f(\mathbf{e}_1)$ und $f(\mathbf{e}_2)$ eine Basis des Bildraums $W = f(R^4)$ bilden.
Ergänzen Sie diese beiden Vektoren zu einer Basis des R^3.

h) Welche einfache Matrix (Normalform) besitzt die Abbildung f bezüglich dieser beiden Basen?

Aufgabe 75

a) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkelgrößen des gegebenen Dreiecks ABC unter Verwendung des Skalarprodukts. A(8; 0), B(10; 11) und C(0; 6)

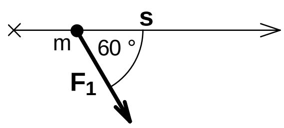
b) Berechnen Sie jeweils das Produkt zweier Seitenvektoren des Dreiecks und deuten Sie das Ergebnis geometrisch als Rechtecksfläche.

c) Beweisen Sie den Projektionssatz: In jedem Dreieck sind die Rechtecke aus einer Seite und der senkrechten Projektion der Nachbarseite auf diese Seite inhaltsgleich.

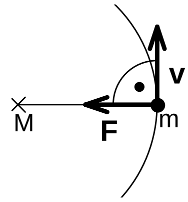
d) Berechnen Sie die Höhen und deren Fußpunkte sowie die Winkelhalbierenden und deren Teilpunkte.

e) Bestätigen Sie den Satz über die Eulergerade: Schwerpunkt, Umkreismitte und Höhenschnittpunkt liegen auf einer Geraden (Eulergerade des Dreiecks). Der Schwerpunkt teilt die Strecke zwischen Höhenschnittpunkt und Umkreismitte im Verhältnis 2 : 1.

Aufgabe 76



a) Welche Arbeit verrichtet die Kraft $\mathbf{F}_1$ = 500 N längs des Weges **s** = 25 m?



b) Um eine Masse m = 5 kg mit konstanter Geschwindigkeit **v** = 20 m/s auf einer Kreisbahn von r = 2 m Radius zu halten ist eine Zentripetalkraft von **F** = m * v² / r nötig. Berechnen Sie den Betrag dieser stets auf den Mittelpunkt ausgerichteten Kraft **F**. Welche Arbeit W = **F * s** verrichtet diese Kraft **F** längs eines Bahnumlaufs der Masse m?

c) Zeigen Sie vektoriell:
Die beiden Winkelhalbierenden einer Geradenkreuzung stehen aufeinander senkrecht.

Aufgabe 77

a) Gegeben: A(-2; 1; 4), B(1; - 5; 7), C(4; 3; 2), D(-1; 5; 11)

- Beweisen Sie, dass die in A zusammentreffenden Kanten der Pyramide ABCD paarweise senkrecht zueinander stehen.
- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.
- Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Kanten BD und CD gegen die Grundfläche ABC.
- Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Seitenfläche BCD gegen die Grundfläche.
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Seitenfläche BCD.

b) Gegeben: g:... **x** = (1; 2; 5) + r * (-3; -6; 2) h:... **x** = (4; 4; 6) + s * (0; -2; 1)

- Welche besondere Lage hat die Gerade h im Raum R^3?
- Beweisen Sie, dass g und h zueinander windschief sind und berechnen Sie deren Abstand.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punkts A(1; 2; 5) von der Geraden h.
- Bestimmen Sie die Gerade k durch A parallel zur x-y-Ebene, die die Gerade h schneidet.
- Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von h und k sowie den spitzen Winkel zwischen h und k.
- Bestimmen Sie die Spurpunkte von g und von h sowie die Projektionen von g bzw. h auf die Koordinatenebenen.

Aufgabe 78

a) Gegeben: E... $\mathbf{x}$ = (1; 0; 3) + r * (3; 2; 2) + s * (0; -2; 1).g... $\mathbf{x}$ = (5; -2; -1) + t * (0; 1; 1)
Bestimmen Sie
1. Normalengleichung von E. Schnittpunkt S sowie Schnittwinkel zwischen E und g.
2. Spurgeraden von E in den Koordinatenebenen.
3. Spurpunkte von g. Projektionen von g in die Koordinatenebenen.
4. Gleichung der Geraden p, die die senkrechte Projektion von g auf E ist.
5. Gleichung von g', die zu g symmetrisch bezüglich E liegt.
6. Abstand des Punktes G(5; - 2; - 1) von E.
7. Abstand des Ursprungs von g und Fußpunkt des Lots vom Ursprung auf g.

b) Gegeben: E_1... 2x + y - 2z - 3 = 0. E2 ... x - y + 3z = 0. g ... $\mathbf{x}$ = (2; 5; 1) + t * (-5; 6; -2)
Bestimmen Sie
1. Parameterdarstellungen und Achsenabschnitte von E_1 und E_2.
2. Lage von g zu E_1 bzw. E_2 und ggf. Schnittpunkt bzw. Abstand.
3. Schnittgerade h und Schnittwinkel zwischen E_1 und E_2.
4. Abstand des Punkts A(2; 5; 1) von E_1 bzw. von E_2.
5. Gleichung der Spiegelebene von E_2 an E_1.
6. Gerade k in der Ebene E_2, mit k senkrecht zu g und B(-1; 2; ?) auf k.
7. Nachweis, dass g und k windschief zueinander.

Aufgabe 79

Gegeben sind die Ebene E...2x - 3y - 6z + 12 = 0 und die Gerade g... $\mathbf{x}$ = (3; 0; 2) + k * (0; -3; 1).

a) Ermitteln Sie die Achsenabschnitte, eine Parameterdarstellung sowie die Spurgeraden der Ebene E.

b) Zeigen Sie, dass g zu einer der Koordinatenebenen parallel ist und bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit den beiden anderen Koordinatenebenen.
Ermitteln Sie Koordinatengleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen.
(Die Projektion soll jeweils in Richtung der dritten Achse erfolgen).

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S von E mit g und zeigen Sie, dass S einer der Spurpunkte von g ist. g^* sei das Bild von g bei der Projektion von g in z-Richtung auf die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von g^*.

d) Zeigen Sie, dass A(3; 6; 0) und B(3; 0; 2) auf g liegen. Bestimmen Sie den Punkt C(u; v; w) auf g, für den v = - 2w gilt. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse TV(BAC), TV(CBA) und TV(ACB).

e) Die Punktspiegelung an A bilde den Punkt P(r; s; t) auf P'(r'; s'; t') ab. Die Punktspiegelung an B bilde P auf P'' ab. Geben Sie jeweils die Abbildungsgleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Verkettung der beiden Abbildungen eine Translation ist. Bestimmen Sie die Verschiebungsvektoren der Translationen für beide Verkettungsreihenfolgen.

f) Gegeben ist die Gerade h... $\mathbf{x}$ = (6; - 6; 7) + l * (3; 2; 0).
Beweisen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. Bestimmen Sie die Spurpunkte von h. Wie liegt die Gerade h zur Ebene E?

Aufgabe 80

Beweisen Sie den Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:

Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite des Dreiecks harmonisch im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Lösungen zu einzelnen Aufgaben:

Blatt 2:

Aufgabe 9:

a) Wenn h(a) = h(b), also g(f(a)) = g(f(b)), dann ist f(a) = f(b), weil g injektiv ist. Da zusätzlich auch f injektiv ist, folgt weiter a = b, also ist h injektiv.

b) Kontraposition: Ist f nicht injektiv, so auch nicht h.
Sei also f nicht injektiv, d. h. es gibt $a \neq b$ mit f(a) = f(b) . Dann ist aber auch h(a) = h(b), obwohl $a \neq b$ und daher ist h nicht injektiv.

c) Es ist h surjektiv, wenn h(X) = Z. Wegen $h(X) \subseteq g(Y) \subseteq Z$ folgt daraus die Behauptung g(X) = Z.

d) Wir bilden die Kontraposition der Behauptung unter Verwendung von de Morgan:
Wenn g nicht injektiv, dann f nicht surjektiv oder h nicht injektiv.
Diese Behauptung beweisen wir nun:
g nicht injektiv, d. h. es gibt $a \neq b$ mit g(a) = g(b). Ist nun f surjektiv, so gibt es $a \neq b$ mit h(a) = h(b) und d. h. h ist nicht injektiv.

e) Beweis analog zu d).

f) Seien f und g bijektiv. Wegen a) folgt dann, dass h injektiv ist. Weiter gilt g(Y) = Z also folgt g(Y) = g(f(X)) = h(X) = Z und daher ist h auch surjektiv.

Blatt 9:

Aufgabe 43:

a) X(1/2; 0) und TV(PXQ) = +3. Y(0; 1) also TV(PYQ) = +1, d. h. Y ist Mitte von PQ.

b) h = QR ... x = (1; -1) + t * (0; 6). h ist parallel zur y-Achse.   A(1; 0).   TV(QAR) = 1/5.

c) T(-4; 0). U(-1/4; 15/4).

d) k…2x – 2y – 5 = 0.

e) MPQ = (0; 1).   MQR = (1; 2)   MRP = (0; 4). S = (1/3; 7/3).
P'(5/3; 5/3)Q'(-1/3; 17/3)   R'(-1/3; -1/3).   S' = (1/3; 7/3) = S.

f) Schnittpunkt von g mit h ist Fixpunkt Q(1; -1). PR ist parallel zu k und schneidet g in P. Daher ist R* = (-3; 1) und h* ... x = (1; -1) + t * (4; -2) oder x + 2y = -1 oder x/(-1) + y/(-1/2) = 1.

g) Achse a geht durch den Ursprung und durch die Mitte von XY: a ... y = 2x. x = t * (1; 2).

Aufgabe 45 und 46:

Ansatz: A = Ursprung U.   AC' = k * UC' = k * **b** und AB' = **l** * UB' = **l** * **c**.
Dann einfaches Durchrechnen.

Aufgabe 47:

Wir zeigen TV(ERF) = - TV(EQF):
Ceva mit B für Dreieck EFD: (ERF) * (FCD) * (DAE) = 1.
Menelaos mit Gerade CAQ für Dreieck EFD: (EQF) * (FCD) * (DAE) = -1
Daraus folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 48:

E'(7; 8/3; 2)   C'(3; 8/3; 2)   D' = G A' = A B' = B.

Aufgabe 49:

E… x = (2; 1; 3) + r * (0; -1; 1) + s * (6; 7; 2) bzw. -3x +2y +2z = 2.   H(4; 0; 7)   G(2; -4; 8)

Aufgabe 50:

E…x = (-5; 1; -2) + r * (1; 2; 0) + s * (0; 2; 1)   bzw. 2x – y + 2z + 15 = 0.

Schnitt von E mit g: (-3; -1; -5)

mit h: h ist parallel zu E im Abstand d = 10

mit k: k liegt ganz in E.

Aufgabe 51:

ha …x = (3; 0; -2) + r * (a; 10; 4)   g und ha sind für kein a zueinander parallel.

Schnittpunkte gibt es für a = 4:   S(5; 5; 0).

Sämtliche Da erfüllen die Gleichung x = (3; 10; 2) + a * (1; 0; 0) liegen also auf einer Geraden.

Alle ha erfüllen die Gleichung 2y – 5z = 10, liegen also in einer Ebene.

<u>Blatt 11:</u>

Aufgabe 57:

(I) Für t = 1 erhält man x = r * (-1; -1; 4)

Für t ≠ 1 erhält man (0; 0; 0) als einzige Lösung.

(II) Für t = 1 erhält man keine Lösung

Für t ≠ 1 erhält man x = 1/[4 * (t – 1)] * (t – 2; t – 2; 4)

(III) Für t = 1 erhält man x = ¼ * ((1; 1; 0) * r * (-1; -1; 4)

Für t ≠ 1 erhält man x = ¼ * (1; 1; 0)

Aufgabe 58:

(I) Für t = 2 erhält man keine Lösung

Für t ≠ 2 erhält man $\frac{1}{19t-38}$ * (2t² - 23t – 38; -5t² -85t -114; -38t)

(II) Für t = 2 erhält man x = 1/19 * (4; 9; 0) + r * (1; 4; 2)

Für t ≠ 2 erhält man x = 1/19 * (2t – 19; -5t – 57; -38)

Homogenes System: Für t = 2 erhält man x = r * (1; 4; 2)

Für t ≠ 2 erhält man nur (0; 0; 0) als Lösung.

Aufgabe 59:

t = 0: Lösung eindeutig: (1; 1/3; 1/3)

t = 1: Lösung eindeutig: (1; 1/4; 1/4)

t = 2: einparametrige Lösung: x = (0; 1; 0) + r * (5; -4; 1).

Allgemeinfälle:

t = 2: siehe oben.

t = -3 keine Lösung

t ≠ 2 und t ≠-3: eindeutige Lösung: x = 1/(t + 3) * (t + 3; 1; 1)

<u>Blatt 16:</u>

Aufgabe 73:

a) Bildraum (= Spaltenraum der Abbildungsmatrix) ist zweidimensional mit der möglichen Basis (2; -7; -4; 4) und (0; 1; -2; -2).

b) Kern der Abbildung ist zweidimensional mit der möglichen Basis ((-1; -3; 2; 0) und (1; -1; 0; 2). Urbild von b ist ((2; 0; 0; 0) + Kern von d (1; 3; 0; 0) + Kern. a und c besitzen kein Urbild.

Aufgabe 68:

Abbildungsgleichung für die Punkte (Spaltenvektoren): **X' = A * X + c**

In Koordinaten: $x_1` = 3/5 * x_1 + 4/5 * x_2 - 2$

$x_2` = 4/5 * x_1 - 3/5 * x_2 + 4$

a) Ergebnisse: A`(-7/5; 24/5); B`(-6/5; 17/5); C`(-3/5; 21/5); D`(-2; 4); E` = E(-5; 0).

b) Fixpunkte erhält man aus der Gleichung **X` = X ,** also als Lösungen des Systems $x_1` = x_1$ und $x_2` = x_2$. Ergebnis: Fixpunktgerade a (Achse): **x = (-5; 0) + t * (2; 1)**

c) Kern der Abbildung sind die Urbilder des Nullvektors **x'** = (0; 0), also die Lösungen des homogenen (!) Systems **A * x = (0; 0)** .
Ergebnis: Kern = {(0; 0)}, also ist die Abbildung injektiv.

d) Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen der Gleichung **x`** = t * **x** .
Ergebnisse: Für t = 1 ergibt sich r * (2; 1) (Vgl. b)!); für t = -1 erhält man s * (-1; 2).
Folgerungen: Es handelt sich offenbar um eine Spiegelung mit der Achse a in Richtung (2; 1) und der Spiegelrichtung (-1; 2).

e) Normalform (problemangepasstes Koordinatensystem):
1. Schritt: Wir wählen den Fixpunkt E(-5; 0) als neuen Koordinatenursprung im Y-System. Die zugehörige Transformationsgleichung lautet: Y = X - E. Eingesetzt in die Abbildungsgleichung erhält man: Y`+ E = A * (Y + E) + c, also Y' = A * Y + (A * E + c - E). Zur Kontrolle: die letzte Klammer muss natürlich (0;0) ergeben.

2. Schritt: Wir wählen als neue Basisvektoren eines Z-Koordinatensystems die in d) berechneten Eigenvektoren **l** = 2 * **i** + 1 * **k** und **m** = -1 * **i** + 2 * **k** . Damit erhält man die Transformationsmatrix R für die Transformation zwischen den Y- und den Z-Koordinaten:

Y = R * Z mit R = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und Z` = Inv(R) * A * R * Z = B * Z mit B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 69

Abbildungsgleichung für die Vektoren: **x` = A * x.**

a) a` = (2; 2; 10); b` = (1; 1; 5); c` = (-2; -2; -10). Was aufgefallen?

b) Der Kern besteht aus den sämtlichen Urbildern des Nullvektors, also aus der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems **A * x = 0.**
Ergebnis: **x** = r * (-1; -5; 2; 0) + s * (-1; -3; 0; 2) mit r, s aus **R.** Der Kern ist also ein zweidimensionaler Vektorraum.

c) Bildraum ist der Spaltenraum der Matrix A: Rang A = 2. Basis z. B.: (-1; 7; 1) und (0; 2; 1)

d) Dim(Urraum) = Dim(Bildraum) + Dim(Kern) = 4 = 2 + 2.

e) Urbildmenge von **x`**=(1; -5; 2) ist die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems **A * x** = (1; -5; 2) . Ergebnis: x = (0; 2; 0; -1) + Kern.

f) Zu zeigen ist, dass die Gleichungssysteme A * x = (1; 0; 0) bzw. = (0; 1; 0) bzw. = (0; 0; 1) unlösbar sind. Lösungsweg in einem Durchgang!

g) Eigenvektoren kann es nur geben, wenn man eine Abbildung eines Raumes in sich selbst hat. Hier jedoch wird ein Raum, der R^4, in einen anderen, den R^3, abgebildet. Also ist die Gleichung **x'** = t * **x** sicher nicht erfüllbar, ja sogar sinnlos.

Aufgabe 70

Normalformen der drei Abbildungsmatrizen:

Zu A: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ zu B: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu C: $\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Lineare Algebra und Analytische Geometrie SS 90 Klausur am 23.10.90.

Zu bearbeiten sind die Aufgaben 1 oder 2 und die Aufgabe 3.

Aufgabe 1 : Geraden und Ebenen im euklidischen R^3

Gegeben ist der affine Punktraum R^3 mit einer Orthonormalbasis (kartesisches Koordinatensystem).

Die Gerade g verbindet die Punkte A (2; 3; 3) und B (0; 1; 3).

Die Gerade h hat die Gleichung **x** = (4; 2; 0) + t * (1; 2; - 2).

a) Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.

b) Ermitteln Sie den kürzesten Abstand d zwischen g und h sowie die zugehörigen Fußpunkte G auf g und H auf h. [Kontrollergebnisse: H (3; 0; 2), G (1; 2; 3)]

c) Die Ebene E enthält die Gerade g und ist parallel zur Gerade h. Bestimmen Sie eine Gleichung von E. [Kontrollergebnis: 2x - 2y - z + 5 = 0]

d) Der Punkt H und die Gerade h werden an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts H' sowie eine Gleichung der Bildgerade h'.

e) Zeigen Sie: Die Gleichung X' = T * X + **d** mit $T = \frac{1}{9} * \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{d} = \frac{10}{9} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

beschreibt genau die in d) genannte Spiegelung an der Ebene E.

Aufgabe 2 : Lineare Abbildung

Durch folgende Abbildungsvorschrift ist eine lineare Abbildung f des R^4 in den R^3 definiert:

f (x; y; s; t) = (x – y + s + t; x + 2s - t; x + y + 3s - 3t).

a) Berechnen Sie die Bilder der kanonischen Basisvektoren sowie der Vektoren **u** = (1; 2; 3; 4) und **v** = (1; 1; 1; 1).

b) Geben Sie die Matrix A dieser linearen Abbildung f an.

c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildraums W = f(R^4).

d) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns K der Abbildung f. [Kontrollergebnis: Kern = k * (2; 1; -1; 0) + l * (1; 2; 0; 1)]

e) Bestätigen Sie den Dimensionssatz über lineare Abbildungen.

f) Ermitteln Sie jeweils das vollständige Urbild der Vektoren **r'** = (1; 2; 3) und **s'** = (1; 1; 0). [Kontrollergebnis: (2; 1; 0; 0) + Kern]

g) Ergänzen Sie die beiden kanonischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ des R^4 durch zwei Kernvektoren zu einer Basis des R^4.
Zeigen Sie, dass f($\mathbf{e}_1$) und f($\mathbf{e}_2$) eine Basis des Bildraums W = f(R^4) bilden.
Ergänzen Sie diese beiden Vektoren zu einer Basis des R^3.
Welche einfache Matrix besitzt die Abbildung f bezüglich dieser beiden Basen?

Aufgabe 3 : Eigenschaften linearer Abbildungen

V und W seien Vektorräume von endlicher Dimension.

Es sei f eine lineare Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum W.

a) Nennen Sie zwei Kriterien dafür, dass f injektiv ist (ohne Beweis).

b) Nennen Sie zwei Kriterien dafür, dass f surjektiv ist (ohne Beweis).

c) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung f von V in sich ist genau dann injektiv, wenn auch surjektiv.

d) Definieren Sie, was man unter dem Kern der linearen Abbildung f versteht.

e) Beweisen Sie, dass der Kern einer linearen Abbildung stets ein Vektorraum ist.

f) Beweisen Sie, dass das vollständige Urbild $f^{-1}(\mathbf{w})$ eines beliebigen Vektors **w** aus W entweder die leere Menge oder eine Nebenklasse des Kerns von f ist.

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) Die Richtungsvektoren sind lu, also die Geraden nicht zueinander parallel.

Wenn ein Schnittpunkt existiert, dann muss $\overrightarrow{AB}$ mit den Richtungsvektoren la sein. Dies ist jedoch nicht der Fall, also sind die Geraden zueinander windschief.

b) Gemeinlot e = (-2; 2; 1).
Ebene durch g, die das Gemeinlot enthält: x = (2; 3; 3) + t * (1; 1; 0) + s * (-2; 2; 1).
Schnitt mit h ergibt H(3; 0; 2).
Analog: Fußpunkt des Gemeinlots auf g ergibt G(1; 2; 3). Damit Abstand(g, h) =3.

c) E… x = (2; 3; 3) + r * (1; 1; 0) + s * (1; 2; -2).

d) Lotfußpunkt von H auf E ist G, daher ist G Mitte von HH' also H'(-1; 4; 4).
h ist parallel E also auch h parallel h' und damit h' … x = (-1; 4; 4) + r * (1; 2; -2).

e) E ist Fixpunktebene der angegebenen Trafo. Dazu berechnet man die Lösungen der Fixpunktgleichung und erhält E.
Das Gemeinlot e ist Eigenvektor von T mit dem Eigenwert -1: Dies zeigt man durch Einsetzen und Nachrechnen.
Mit diesen beiden Aussagen ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 2:

a) b_1' = (1; 1; 1); b_2' = (-1; 0; 1); b_3' = (1; 2; 3); b_4' = (1; -1; 3);
u' = (6; 3; 0); v' = (2; 2; 2). Wir bemerken, dass v Eigenvektor mit dem Eigenwert 2 ist.

b) Spalten von A sind die Bilder der Basisvektoren: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) Bildraum ist 2-dimensional und hat als Basis z. B.
{(1; 1; 1); (0; 1; 2)} bzw. {(1; 0; -1); (0; 1; 2)}.

d) Kern ist 2-dimensional und hat als Basis z. B. {(1; 2; 0; 1); (-2; -1; 1; 0)}

e) dim(kern) + dim(bild) = dim(Ausgangsraum). Hier: 2 + 2 = 4

f) Urbild von r' ist (0; 0; 1; 0) + Kern [siehe Aufgabe a): b_3' = r'].
Der Vektor s' besitzt kein Urbild.

g) Wir ergänzen die ersten beiden kanonischen Basisvektoren – deren Bilder den Bildraum aufspannen – durch zwei Kernvektoren zu einer Basis:
k_3 = (-2; -1; 1; 0) und k_4 = (1; 2; 0; 1).
Wir ergänzen die Basis b_1' und b_2' des Bildraums durch einen weiteren, der kein Urbild besitzt wie z. B. s' = (1; 1; 0) zu einer vollen Basis des Zielraumes. Dann hat die Abbildungsmatrix die Gestalt $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Wählen wir als Spalten der Trafomatrix T in R^4 die Vektoren der gewählten neuen Basis und als Spalten der Trafomatrix S in R^3 die Spalten der gewählten neuen Basis:

T = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ S = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Dann gilt M = T^{-1} A S.

Aufgabe 3:

a) Kern(f) = Nullvektor bzw. dim(V) = dim(f(V)) bzw. Bild der Basis von V ist lu.

b) dim(f) = dim(W) bzw. Bild der Basis von V erzeugt W.

c) f injektiv gdw. Kern(f) = Nullraum gdw. dim(V) = dim(f) gdw. f(V) = W gdw. f surjektiv

d) Kern = Untermenge von V, die auf den Nullvektor abgebildet wird.

e) Nachweis der Untervektorraumkriterien:
nichtleer und abgeschlossen gegenüber + und *.

f) Jede zwei Vektoren aus der gleichen Nebenklasse des Kerns haben das gleiche Bild:
Ist y = x + k, wobei k Kernvektor ist, so gilt: f(y) = f(x + k) = f(x) + f(k) = f(x).
Zwei Vektoren mit dem gleichen Bild unterscheiden sich um einen Kernvektor:
Ist f(y) = f(x) so ist f(x – y) = f(x) – f(y) = 0, also x – y ein Kernvektor und y = x + k.

**Verlangt ist die Bearbeitung der Aufgabe 1
und mindestens einer der Aufgaben 2 oder 3.**

Aufgabe 1

Es sei f eine lineare Abbildung des Vektorraums V in den Vektorraum W. Beweisen Sie:

a) Der Kern der Abbildung f ist ein Untervektorraum von V.

b) Es gilt **f(x) = f(y)** genau dann, wenn **k = x - y** ein Kernvektor ist, d. h.:
Die Klassen bildgleicher Elemente von f sind genau die Nebenklassen des Kerns.

c) Die Bilder einer Menge M von linear abhängigen Vektoren sind linear abhängig.

d) f ist genau dann bijektiv, wenn die Bildvektoren einer Basis von V eine Basis von W bilden.

Aufgabe 2

Es sei A = {$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$} eine Basis des R^4, B = {$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$} eine Basis des R^3 und C={$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$} eine Basis des R^2.

Bezüglich dieser Basen sind durch die Matrizen **A** bzw. **B** zwei lineare Abbildungen α und β gemäß folgendem Diagramm definiert:

$$R^4 \xrightarrow{\alpha} R^3 \xrightarrow{\beta} R^2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Verkettung von α und β ist $\gamma = \alpha \circ \beta$ (zuerst α, danach β).

a) Ermitteln Sie das Bild von $\mathbf{v} = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_4$ bei α sowie das Bild von $\mathbf{w} = 3\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ bei b. Geben Sie das Bild von **v** bei der Verkettung $\gamma = \alpha \circ \beta$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\alpha(\mathbf{a}_1)$ und $\alpha(\mathbf{a}_2)$ eine Basis des Bildraumes $\alpha(R^4)$ bilden.
Bestimmen Sie die Ränge der Abbildungen α und β.
Bestimmen Sie nun die Dimensionen von Kern α und von Kern β.

c) Berechnen Sie eine Basis von Kern(α) und von Kern(β) und bestätigen Sie Ihre Ergebnisse aus b).

d) Ermitteln Sie die Menge aller Urbilder von $\mathbf{d} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$ bei α.

e) Folgern Sie aus dem Ergebnis für Rang β (vgl. b), dass die Basisvektoren $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ von R^2 Urbilder in R^3 besitzen müssen.
Ermitteln Sie zu $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ je ein Urbild $\mathbf{u}_1$ bzw. $\mathbf{u}_2$. Bestätigen Sie, dass $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ linear unabhängig sein müssen.

f) Ergänzen Sie $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ durch Hinzunahme eines geeigneten Vektors **z** aus Kern β zu einer Basis des R^3.
Welche einfache Matrix **B*** entspricht der Abbildung β hinsichtlich der Basen {$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, **z**} und {$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$} des R^3 bzw. des R^2? (Begründung!)

g) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren der Basis A bei der Abbildung γ.

Welche Matrix **C** beschreibt die lineare Abbildung γ bezüglich der gegebenen Basen A des R^4 bzw. C des R^2?

h) Bestimmen Sie den Rang von γ sowie eine Basis von Kern γ.

i) Ergänzen Sie die in h) berechnete Basis von Kern γ zu einer Basis des R^4.

Welche Matrix **C*** entspricht der Abbildung γ bezüglich dieser neuen Basis des R4 und der Basis C des R^2?

Aufgabe 3

Im R^3 sei eine Orthonormalbasis gegeben. Eine lineare Abbildung f des R^3 in sich wird bezüglich dieser Basis beschrieben durch die Matrix **A**. Identifiziert man jeden Ortsvektor **x** = **OX** mit dem Punkt X, so wird durch X' = **A** * X gleichzeitig eine Punktabbildung F des R^3 in sich definiert.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{Kontrollergebnis:} \qquad A^{-1} = 1/7 * \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie Kern f und Rang f. Folgern Sie, dass f und damit auch F bijektiv ist.
Warum ist F sicher keine längen- bzw. winkeltreue Abbildung?

b) Ermitteln Sie die Urbilder der gegebenen Basisvektoren des R^3.
Wählt man diese Urbilder als Spaltenvektoren einer Matrix **B** so gilt: **B** ist zu **A** invers.
Berechnen Sie **B** und berechnen Sie **A** * **B**.

c) Bestimmen Sie die Menge aller Fixpunkte von F.
Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Ursprungsebene E handelt.
Ermitteln Sie zueinander orthogonale Vektoren **u** und **v**, die diese Ebene E aufspannen.
Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an. [Kontrollergebnis: $x - y + 2z = 0$].

d) Zeigen Sie, dass der Vektor **w** = (1; -1; 2) ein Eigenvektor von **A** mit dem Eigenwert 7 ist, d. h. dass gilt: **A * w** = 7**w**. Zeigen Sie, dass **w** zur Ebene E orthogonal ist.

e) Beweisen Sie aufgrund der bisherigen Ergebnisse: Jede zu **w** parallele Gerade geht bei der Abbildung F in sich über, ist also Fixgerade.

f) Zeigen Sie, dass **u** und **v** aus c) Eigenvektoren von **A** mit dem Eigenwert 1 sind.
Zeigen Sie, dass {**u, v, w**} eine Orthogonalbasis von R^3 ist.
Welche Matrix **A*** entspricht der Abbildung f bezüglich dieser Basis des R^3?

g) Beschreiben Sie, wie man nach den Ergebnissen aus d) bis f) zu einem gegebenen Punkt P seinen Bildpunkt F(P) auf geometrischem Weg gewinnen kann.
Führen Sie das Verfahren durch für den Punkt P(4; - 6; 1).
Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung von F(P) = **A** * P.

h) Die mit den Spaltenvektoren **u**, **v** und **w** gebildete Matrix sei **T**.
Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichung: $\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1} * \mathbf{A} * T$.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zeilenvektoren von $\mathbf{T}^{-1}$ und den Vektoren **u**, **v** und **w** ?

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) Man weist das Erfülltsein der UVR-Kriterien nach.

b) Man zeigt einfach zwei Dinge mit Hilfe der Homomorphiebedingung:
   (1) Je zwei Vektoren derselben Kernnebenklasse haben das gleiche Bild.
   (2) Haben zwei Vektoren das gleiche Bild, so gehören sie zur selben Nebenklasse des Kerns.

c) Man beweist dies durch Kontraposition: Sind die Bilder x_1', x_2', …, x_k' lu, so notwendigerweise auch deren Urbilder, sonst ließe sich der Nullvektor aus ihnen nichttrivial kombinieren.

d) f bijektiv gdw. f injektiv und surjektiv gdw. Kern ist der Nullraum und die Bilder der Basis von V erzeugen ganz W gdw. die Bilder der Basisvektoren von V bilden eine Basis von W.

Aufgabe 2:

a) $v' = (3; -5; 1) = w$; $w^* = (4; 0) = \gamma(v)$.

b) Rang(A) = 2 und $a_1' = (1; 2; 4)$ und $a_2' = (1; -1; 1)$ bilden eine Basis des Bildraums.
   Rang(A) = Rang(α) = 2. Dim(Kern (α)) = 2. Rang(B) = Rang(β) = 2. Dim(Kern(β) = 1.

c) Kern(α) hat eine Basis {(-1; 8; 5; 0); (1; -3; 0; 5)}.
   Kern(β) hat eine Basis {(-1; 3; 1)}.

d) (0; 1; 0; -1) + Kern(α).

e) Da der Rang = 2 ist, muss die Abbildung β surjektiv auf R^2 sein, also müssen auch die Basisvektoren des R^2 Urbilder bezüglich β in R^3 besitzen.
   Man erhält z. B.: $u_1 = (1; -2; 0)$ und $u_2 = (0; 1; 0)$.

f) Wir wählen z. B. z = (-1; 3; 1) aus dem Kern von β und erhalten $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, denn die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren.

g) $C = B * A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Spalten von B sind die γ-Bilder der kanonischen Basisvektoren des Raumes R^4.

h) Rang(γ) = Rang(C) = 1 und damit hat Kern(γ) die Dimension 3 und z. B. die folgende Basis: {(-1; 1; 0; 0); (7; 0; 5; 0); (-2; 0; 0; 5)}

i) $a_4 = (0; 0; 0; 1)$ ergänzt die Basis von h) zu einer solchen des R^4.
   Mit diesen Basen erhält man die Abbildungsmatrix $C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:

a) Rang(A) = Rang(f) = 3. Damit ist dim(Kern(f)) = 0, also der Kern von f der Nullraum und damit die Abbildung bijektiv.
F ist sicher nicht längentreu, denn z. B. (1; 0; 0) geht über in den Vektor (2; -1; 2).
F ist nicht winkeltreu, denn die Bilder der orthogonalen ersten beiden Basisvektoren sind nicht orthogonal, ihr Skalarprodukt ergibt -8.

b) Man bildet A^{-1} und berechnet die Bilder bei der Umkehrabbildung (Ergebnis siehe Aufgabe: Spalten von A^{-1})

c) Fixpunkte: x = r * (1; 1; 0) + s * (-2; 0; 1) Das ist eine Ebene E durch den Ursprung.
Wir wählen u = (1; 1; 0) und v = (-1; 1; 1).

d) Man erhält A * w = (7; -7; 14) = 7 * w. w ist Normalenvektor der Ebene E (siehe Koordinatengleichung).

e) Alle zu w parallelen Vektoren werden wegen der Linearität wieder in solche abgebildet. Jede Gerade in dieser Richtung besitzt einen Fixpunkt auf der Ebene E ist also insgesamt fix.

f) A * u = u und A * v = v. u, v und w sind paarweise orthogonal.
Man erhält A* = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

g) Parallele zu w durch P und Schnitt mit der Ebene in F. F ist dann Mitte der Strecke PP'.
Für den gegebenen Punkt P erhält man F(2; -4; -3) und P'(16, -18; 25).

h) $T^{-1} = 1/6 * \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und es gilt: $A^* = T^{-1} A T$.

Vektorgeometrie und Lineare Algebra SS 92 Klausur am 22.10.92

Verlangt ist die Bearbeitung jeweils einer Aufgabe aus Aufgabengruppe I, II und III. Von jeder Aufgabengruppe wird nur eine Aufgabe zur Bewertung herangezogen!

Aufgabe I.1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der von der Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ aufgespannte Vektorraum V und der von der Menge $\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ aufgespannte Vektorraum W sind gleich, es gilt also: $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$.

b) Sind $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig und ist $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so sind die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ ebenfalls linear unabhängig.

c) Eine lineare Abbildung $f: V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn die Bilder der Basisvektoren von V linear unabhängig sind.

d) Das Urbild einer linear unabhängigen Menge von Vektoren bei einer linearen Abbildung ist ebenfalls linear unabhängig.

Aufgabe I.2

Es sei $\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Variablen.

$\mathbf{A}$ ist eine m-n-Matrix mit Zeilenrang Rang($\mathbf{A}$) = r.

Der Rang der erweiterten Matrix ($\mathbf{A}, \mathbf{b}$) werde mit Rang($\mathbf{A}, \mathbf{b}$) = r_e bezeichnet.

a) Formulieren Sie Aussagen über die Lösbarkeitsbedingungen dieses Systems. Behandeln Sie dabei sowohl den homogenen als auch den inhomogenen Fall.

b) Formulieren Sie Aussagen über die Lösungsgesamtheit (Lösungsmenge) dieses Systems (homogener und inhomogener Fall).

c) Begründen Sie Ihre Aussagen aus a) und b) mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Ergebnisse aus der Theorie der linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Aufgabe II.1

Ein Dreieck werde aufgespannt durch die beiden linear unabhängigen Vektoren **CA = b** und **CB = a**. (Hinweis: Die Bezeichnungen wurden in Anlehnung an die in Dreiecken üblichen Bezeichnungen der Seiten gewählt!).

a) D sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreieckswinkels bei C mit der Geraden AB. Berechnen Sie das Teilverhältnis TV(A, D, B).

b) E sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Nebenwinkels bei C mit der Geraden AB. Berechnen Sie das Teilverhältnis TV(A, E, B).

c) Folgern Sie nun den folgenden Dreieckssatz:
Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Aufgabe II.2

Siehe beiliegendes Extrablatt!

Aufgabe III.1

Gegeben sind die Punkte A(8; 0), B(10; 11) und C(0; 6) in einem kartesischen Koordinatensystem. Fertigen Sie eine Kontrollzeichnung an (LE = 1 cm).

a) Bestimmen Sie die Gleichungen (Parameterdarstellung und Normalenform) der Dreieckshöhen, die Koordinaten der Höhenfußpunkte und den Höhenschnittpunkt H.

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S und die Umkreismitte U des Dreiecks ABC.

c) Mit Z sei die zentrische Streckung mit Zentrum S und dem Faktor k = - 1/2 bezeichnet.
Bestimmen Sie die Bilder folgender Punkte unter der Abbildung Z: A, B, C; H; U.
Welche Bedeutung haben die Bildpunkte für das Dreieck ABC?
Warum gilt **HS** = 2 * **SU**?
(Hinweis: Die Gerade HSU heißt Eulergerade des Dreiecks ABC.)

d) Berechnen Sie den Mittelpunkt F der Strecke HU.
Zeigen Sie: F und U teilen die Strecke HS harmonisch.
Warum ist F Umkreismitte des Mittendreiecks PQR von Dreieck ABC?

e) Bestimmen Sie die Gleichungen der Umkreise K_1 von Dreieck ABC und K_2 von Dreieck PQR. Zeigen Sie, dass die Höhenfußpunkte auf K_2 liegen.

f) Zeigen Sie: Die Mittelpunkte von HA, HB und HC liegen ebenfalls auf dem Kreis K_2.
Hinweis: K_2 heißt Feuerbachscher Neunpunktekreis des Dreiecks ABC.

g) Auf welcher Ortslinie bewegt sich die Umkreismitte U bzw. der Schwerpunkt S von Dreieck ABC, wenn C auf der y-Achse wandert?

Aufgabe III.2

Eine Affinität f des affinen Punktraums R^2 in sich mit Fixpunkt O(0; 0) bildet die Punkte B(10; 0) bzw. C(10; 10) ab in die Punkte B'(- 6; - 8) bzw. C'(- 6; 2).

a) Zeichnen Sie die gegebenen Punkte in ein Koordinatensystem ein (LE = 1cm).
Berechnen Sie die Abbildungsmatrix A. Kontrollergebnis: $A = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix}$

b) Begründen Sie, warum die Abbildung f bijektiv ist.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.
(Hinweis: A besitzt zwei verschiedene Eigenwerte!).

d) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung F.

e) Von welcher Art ist die Abbildung F (kurze Begründung)?

f) Geben Sie die affine Normalform der Abbildungsmatrix A an.

g) Zeichnen Sie das Quadrat OBCD, seinen Inkreis, sein Mittenviereck und dessen Diagonalen ein. Zeichnen Sie das Bild dieser Figur.
Hinweis: Zur Zeichnung des Inkreisbildes kann man geeignete Tangenten verwenden.

h) Zeigen Sie: Es gibt genau zwei zueinander orthogonale Richtungen **a** und **b**, deren Bilder **a'** und **b'** ebenfalls zueinander orthogonal sind. Ermitteln Sie das so genannte Rechtwinkelpaar dieser Affinität.

Lösungen:

Aufgabe I.1:

a) Beweisgang klar, denn jeder von der ersten Menge erzeugte Vektor lässt sich auch aus der zweiten Menge kombinieren und umgekehrt.
b) Beweisführung indirekt.
c) Man zeigt den ersten Teil „wenn f injektiv, dann bi lu" indirekt und den zweiten direkt.
d) Man beweist die Kontraposition der Aussage.

Aufgabe I.2:

a) Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Matrix übereinstimmt.
b) Im homogenen Fall ist dies stets der Fall, also gibt es stets mindestens eine Lösung. Die Gesamtheit der Lösungen in diesem Fall ist ein VR der Dimension n – r, wenn r der Rang von A ist. Das folgt aus dem Satz über den Kern einer linearen Abbildung.
c) Im inhomogenen Fall ist die Lösung ein affiner Punktraum der Dimension n – r. Das folgt aus der Tatsache, dass die Urbilder bei linearen Abbildungen Nebenklassen des Kerns sind.

Aufgabe II.1:

Man berechnet mit Hilfe des Schnittpunkts D der Winkelhalbierenden bei C mit AB das Teilverhältnis TV(ADB) = b/a und ebenso das TV(AEB) = - b/a woraus der Satz folgt.

Aufgabe II.2:

Wird hier nicht aufgeführt. Bezieht sich auf die Verwendung der Computersprache SCHEME.

Aufgabe III.1:

a) H(5,5; 5) Ha(4; 8) Hb(4; 3) Hc(8,8; 4,4)

b) S(6; 5 2/3) MAC(4; 3) MCB(5; 8,5) MBA(9; 5,5) U(6,25; 6)

c) A'(5; 8,5) = MCB B'(4; 3) = MAC C'(9; 5,5) = MAB H'(6,25; 6) = U U'(47/8; 11/2).

d) F = MHU = U' = (47/8; 11/2)

e) K1… $(x – 6{,}25)^2 + (y – 6)^2 = (25/4)^2$ K2 … $(x – 47/8)^2 + (y – 11/2)^2 = (25/8)^2$

f) Hi auf K2.

g) U bewegt sich auf der Mittelsenkrechten von AB, S auf x = 6.

Aufgabe III.2:

a) Siehe Kontrollergebnis.

b) Rang A = 2.

c) Eigenwerte t = 1 mit e1 = (0; 1) und t = -3/5 mit e2 = (2; 1).

d) Fixpunktgerade ist die y-Achse.

e) Schiefe Achsenaffinität mit der y-Achse als Achse in Richtung (2; 1) mit dem Affinitätsfaktor k = - 3/5.

f) Normalform der Abbildungsmatrix ist daher $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

g) Rechtwinkelpaar: (1; 1) und (1; -1) im Original sowie (-3; 1) und (1; 3) im Bild.

Vektorgeometrie und Lineare Algebra SS 93 Klausur am 25.10.93

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner.
Sie können aus den fünf gestellten Aufgaben nach Belieben auswählen.
Zur Bewertung werden die Punktzahlen aus höchstens drei bearbeiteten Aufgaben herangezogen.

Aufgabe 1: Koordinatenfreie Vektorrechnung

Im R^3 spannen drei von einem Punkt D ausgehende linear unabhängige Vektoren **a**, **b** und **c** ein Tetraeder (vierseitige Pyramide) ABCD auf. (Skizze empfehlenswert)

a) Berechnen Sie die Schwerpunkte der vier Seitenflächen dieser Pyramide (Ortsvektoren der Schwerpunkte ausgedrückt als Linearkombinationen von **a**, **b** und **c**).

b) Die Verbindungslinie zwischen einem Eckpunkt und dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche heißt eine **Schwerlinie** des Tetraeders.
Zeigen Sie: Die vier Schwerlinien treffen sich in einem gemeinsamen Punkt S. Dieser teilt die Schwerlinien von den Ecken aus im Verhältnis 3:1. Berechnen Sie die Lage des Punktes S.

c) Die Verbindungslinien der Mittelpunkte von gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders nennen wir **Mittenlinien** des Tetraeders.
Zeigen Sie: Die drei Mittenlinien des Tetraeders treffen sich in einem gemeinsamen Punkt M. Dieser halbiert jede Mittenlinie. Berechnen Sie die Lage des Punktes M.

d) Im R^3 sei das gewöhnliche Skalarprodukt gegeben. Zeigen Sie: Das Tetraeder ist sicher regelmäßig, wenn folgende Gleichungen gelten: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ und $\mathbf{ab} = \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = \mathbf{a}^2/2$.

e) Zeigen Sie: Im Falle d) einer regelmäßigen Pyramide stehen die Mittenlinien gemäß c) paarweise aufeinander senkrecht.

Aufgabe 2: Lineare Abbildung zwischen Vektorräumen

Gegeben sei eine Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ des R^4 und eine Basis $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ des R^3.
Eine lineare Abbildung f des R^4 in den R^3 wird bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren:

$f(\mathbf{b}_1) = (1; 2; 1)_C$; $f(\mathbf{b}_2) = (2; -1; -3)_C$; $f(\mathbf{b}_3) = (0; 2; 2)_C$; $f(\mathbf{b}_4) = (1; -1; -2)_C$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Linearitätseigenschaften das Bild des Vektors $(5; 5; 5; 5)_B$.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix A der Abbildung f bezüglich der gegebenen Basen an.
Bestätigen Sie mit Hilfe der Abbildungsmatrix Ihr Ergebnis aus a).

c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Bildraums $f(R^4)$.

d) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns K der Abbildung f.

e) Bestimmen Sie die Urbilder der Vektoren **p = (5; 5; 0), q = (0; 5; 5), r = (1; 1; 1)** und **s = (4; 2; -2).**

f) Bestimmen Sie geeignete Basen D des R^4 und E des R^3, so dass die Abbildungsmatrix von f möglichst einfache Gestalt annimmt. Geben Sie die Basen D und E sowie die zugehörige Matrix A an.

g) Zeigen Sie: Das Gleichungssystem **A * x = b** mit obiger Matrix A aus b) ist genau dann lösbar, wenn **b** folgende Form hat: **b** = (k; k + l; l) für beliebige reelle k und l.

Aufgabe 3: Beweis des Dimensionssatzes

Formulieren und beweisen Sie den ***Dimensionssatz über lineare Abbildungen*** zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Es sind vollständige und exakte Angaben verlangt.

a) Voraussetzungen b) Behauptung c) Beweisidee d) Beweisführung

Aufgabe 4: Aussagen über Lineare Gleichungssysteme

A * x = b sei ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen.

a) Von welchem Typ ist die Matrix A sowie die Vektoren **x** und **b**?

b) Geben Sie ein Kriterium für die Lösbarkeit des Gleichungssystems an.

c) Welche Bedingung muss vorliegen, damit das System für beliebiges **b** des in a) genannten Typs lösbar ist?

d) Beantworten Sie die Frage c) für den Fall n = m.
Wie viele Lösungen besitzt in diesem Fall das System?

Aufgabe 5: Geraden und Ebenen im R^3

In einem kartesischen Koordinatensystem des R^3 sind die beiden Geraden

g ... x = (4; 6; -7) + r * (1; 2; 2) und h ... x = (1; 6; 6) + s * (0; 4; 3) gegeben.

a) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand eines Punktes G auf g und eines Punktes H auf h samt diesen beiden Punkten. [Kontrollergebnis: G (5; 8; -5); H (1; 2; 3)]

b) Bestimmen Sie eine Ebene E, die weder mit g noch mit h einen Punkt gemeinsam hat und von der g und h denselben Abstand haben. Geben Sie für E sowohl eine Gleichung in Parameterform als auch in Normalenform (Koordinatengleichung) an. [Kontrollergebnis: 2x + 3y - 4z - 25 = 0]

c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von der Ebene E aus b).

d) Geben Sie eine Gleichung der Spiegelgerade g' von g an der Ebene E an.

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunkts L vom Ursprung auf die Gerade g.

Lösungen:

Aufgabe 1:

Mit D als Ursprung und a = DA, b = DB und c = DC als aufspannende Vektoren berechnet man den Schwerpunkt zu S = ¼ * (a + b + c) und erhält das gewünschte Ergebnis. Dieser Punkt ist zugleich der gesuchte Mittelpunkt von Gegenseitenmittenpaaren.
Die Behauptungen aus d) und e) folgen unmittelbar mit Hilfe des Skalarprodukts.

Aufgabe 2:

a) Man erhält (20; 10; -10)

b) Bilder der Basisvektoren sind die Spalten von A.

c) Spaltenraum von A ist Bildraum.
Man erhält als Basis z. B. {(1; 0; -1); (0; 1; 1)} also die Dimension 2.

d) Dimension des Kerns ist 2, eine Basis z. B. {(1; -3; 0; 5); (-4; 2; 5; 0)}

e) p* = (3; 1; 0; 0) + K q* = (2; -1; 0; 0) + K r* gibt es nicht s* = (1; 1; 1; 1) + K

f)

Basis von R4:	(3; 1; 0; 0)	(2; -1; 0; 0)	(1; -3; 0; 5)	(-4; 2; 5; 0)
Bilder dieser Vektoren:	(5; 5; 0)	(0; 5; 5)	(0; 0; 0)	(0; 0; 0)
Basis des R3:	(5; 5; 0)	(0; 5; 5)	(5; 5; 5)	

Damit wird die Abbildungsmatrix sehr einfach: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn b im Bildraum der Abbildung f liegt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn b die Gestalt b = (r; r+s; s) hat wie man leicht berechnet.

Aufgabe 3:

Man geht nach folgender Beweisidee vor:

Bilden die r Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_r$ eine Basis des Bildraums f(V), so sind deren Urbilder $a_1, a_2, \dots, a_r$ sicher linear unabhängig (lu).

Man ergänzt diese a_i durch k lu Kernvektoren $c_1, c_2, \dots, c_k$ zu einer Basis von V wobei k die Dimension des Kerns ist.

Damit ist der Satz bewiesen. Für die detaillierte Beweisführung siehe Vorlesungsinhalt.

Aufgabe 4:

a) Amn, m Zeilen, n Spalten, x aus Rn, b aus Rm.

b) Rang(A) = Rang(A, b)

c) Rang(A) = m

d) Rang(A) = m = n. Eindeutige Lösung.

Aufgabe 5:

a) Gemeinlot l = (2; 3; 4) H(1; 2; 3) G(5; 8; -5). GH = 2 * $\sqrt{29}$

b) E … x = (3; 5; 1) + r * (1; 2; 2) + s * (0; 4; 3) oder 2x + 3y – 4z – 25 = 0

c) dist(O; E) = 25/29 * $\sqrt{29}$

d) g’ … x = (1; 2; 3) + t * (1; 2; 2)

e) L = 1/9 * (34; 50; -67)

Vektorgeometrie und Lineare Algebra SS 92 Entwürfe für Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Es seien U, V und W reelle Vektorräume sowie f und g lineare Abbildungen:

$f: U \to V$ $g: V \to W$ $h: U \to W$ mit $h = f \circ g$ (zuerst f danach g).

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Rang h = Rang f

b) Kern h = Kern f

c) Die Einschränkung von g auf Bild(f) ist injektiv.

Aufgabe 2

Es seien U, V und W reelle Vektorräume sowie f und g lineare Abbildungen:

$f: U \to V$ $g: V \to W$ $h: U \to W$ mit $h = f \circ g$ (zuerst f danach g).

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Rang h = Rang g

b) Bild h = Bild g

c) Bild f + Kern g = V

Aufgabe 3

Formulieren Sie die grundlegenden Aussagen über die **Lösbarkeitsbedingungen** und über die **Lösungsmengen** linearer homogener bzw. inhomogener Gleichungssysteme.

Begründen Sie diese Aussagen mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Ergebnisse über lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der von der Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ aufgespannte Vektorraum V und der von der Menge $\{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ aufgespannte Vektorraum W sind gleich, es gilt also:
$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$.
Folgern Sie daraus:
Der Zeilenrang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile eine andere addiert.

b) Sind $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig und ist $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der $\mathbf{a}_i$, so ist die Menge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ ebenfalls linear unabhängig.

c) Eine lineare Abbildung $f: V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn die Bilder der Basisvektoren von V linear unabhängig sind.

d) Eine lineare Abbildung $f: V \to W$ ist genau dann surjektiv, wenn die Bilder der Basisvektoren von V ein Erzeugendensystem von W bilden.

e) Ein System paarweise orthogonaler Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ eines euklidischen Vektorraums V ist stets linear unabhängig.

f) Das Urbild einer linear unabhängigen Menge von Vektoren bei einer linearen Abbildung ist ebenfalls linear unabhängig.

Aufgabe 5

$$A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Gegeben ist die affine Abbildung u des euklidischen Punktraums R^3 in sich durch die Matrix A und den Vektor **c** = 1/9 * (-7; 19; 2) mit der Abbildungsgleichung: **x' = A * x + c.**

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung u bijektiv ist.

b) Berechnen Sie die Fixpunkte der Abbildung u.

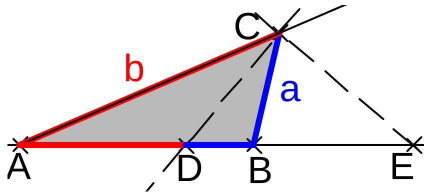
c) Zeigen Sie, dass t = 1 Eigenwert der Matrix A ist und berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 6

Beweisen Sie den Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:

Die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch (innen und außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Es gilt also zu zeigen: TV(ADB) = - TV(AEB) = b : a.



Aufgabe 7

Die Matrix A bestimmt sowohl eine lineare Abbildung f des Vektorraums R^2 in sich als auch eine affine Abbildung F des affinen Punktraums R^2 in sich vermöge folgender Gleichungen:

x' = A * x **X\`= A * X** mit Matrix $A = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix}$

a) Begründen Sie, warum die Abbildung f - und damit auch F - bijektiv ist.

b) Berechnen Sie die Bilder der Punkte B(0; 10), C(10; 10) und D(10; 0).

c) Zeichnen Sie Ihre Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (LE = 1cm).

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.
(Hinweis: A besitzt zwei verschiedene Eigenwerte)

e) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung F.
Von welcher Art ist die Abbildung F (kurze Begründung)?

f) Geben Sie die affine Normalform der Abbildungsmatrix A an.

g) Zeichnen Sie das Viereck OBCD, seinen Inkreis, sein Mittenviereck und dessen Diagonalen ein. Zeichnen Sie das Bild dieser Figur.

Hinweis: Zur Zeichnung des Inkreisbildes kann man geeignete Tangenten verwenden.

Aufgabe 8 (zur Wiederholung der analytischen Geometrie im R^3)

Gegeben sind der Punkt P (6; 5; 7) und die Vektoren **u** = (1; -4; 3) und **v** = (- 5; 8; - 6).

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E die P enthält und zu **u** und **v** parallel ist.

Ergebnis: E ... $3y + 4z - 43 = 0$

b) Bestimmen Sie Gleichung und Mittelpunkt der Kugel K mit Radius $r = 5$, die E in P berührt und auf derselben Seite von E liegt wie der Punkt O.

Ergebnis: K ... $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

c) Gegeben sind die Geraden g_k ... $x = (-1; 2; 2) + r * (3 + k; 0; 4 - 7k)$.
Zeigen Sie, dass alle g_k in einer Ebene F liegen und bestimmen Sie deren Gleichung.

Ergebnis: F ... $y = 2$

d) Für welche Werte k ist g_k Tangente bzw. Passante bzw. Sekante der Kugel K?
Bestimmen Sie im ersten Fall die zugehörigen Berührpunkte samt Tangentialebene.

Ergebnis: Tangente für $k = 0$: $B_0 = (2; 2; 6)$; E_0 ... $- 4x + 3z - 10 = 0$

$k = 1$: $B_1 = (3; 2; -1)$; E_1 ... $3x + 4z - 5 = 0$

Passante für $k < 0$ oder $k > 1$ Sekante für $0 < k < 1$

e) Bestimmen Sie die Schnittgerade h der beiden Tangentialebenen aus d).

Ergebnis: $x = (-1; 0; 2) + s * (0; 1; 0)$

f) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Gerade h.

Ergebnis: 74

g) Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Gleichung der Kugel K' , die zu K symmetrisch bezüglich h liegt.

Ergebnis: K' ... $(x + 8)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$

h) Zeigen Sie, dass E_0 und E_1 die Kugel K' berühren und berechnen Sie die Berührpunkte.

Ergebnis: $P_0 = (- 4; 2; - 2)$; $P_1 = (- 5; 2; 5)$

i) Zeigen Sie, dass h und $l = B_1B_2$ zueinander windschief sind. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden samt den zugehörigen Fußpunkten des Gemeinlots.

Ergebnis: H = (- 1; 2; 2) L = (2,5; 2; 2,5) d = 12,5

j) Berechnen Sie die Gleichung und den Mittelpunkt derjenigen Kugel K'' mit kleinstem Radius, die h und l berührt.

Ergebnis: $(4x - 3)^2 + 16 * (y - 2)^2 + (4z – 9)^2 = 50$

k) Berechnen Sie die Schnittebene von K und K''.

Ergebnis: $21x + 3z - 35 = 0$

l) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises von K und K''.

Ergebnis: S = (4/3; 2; 7/3) rad = 5/3

m) Bestimmen Sie die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen für die Ebenen E_0 und E_1.

Ergebnis: w_1 ... $7x + z + 5 = 0$ und w_2 ... $x - 7z + 15 = 0$. $w_1 \perp w_2$.